MODELO DE AULA INVERTIDA PARA PROPICIAR EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA REPRESENTAR, EN TORNO A LA FUNCIÓN DERIVADA,

APLICADO EN LA I.E JOAQUÍN DE CAYZEDO Y CUERO – CALI.

TRABAJO DE GRADO

JULIO MANUEL RAMÍREZ ORTEGA

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Santiago de Cali

2017

MODELO DE AULA INVERTIDA PARA PROPICIAR EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA REPRESENTAR, EN TORNO A LA FUNCIÓN DERIVADA,

APLICADO EN LA I.E JOAQUÍN DE CAYZEDO Y CUERO – CALI.

TRABAJO DE GRADO

Director: José Darío Sáenz, PhD.

Director de la Maestría en Educación.

Asesoría de investigación: Sandra Patricia Peña Bernate, Ph.D. (c)

JULIO MANUEL RAMÍREZ ORTEGA

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Santiago de Cali

2017

TABLA DE CONTENIDO

Introducción **1**

Planteamiento del problema **3**

Objetivo general **7**

Objetivos específicos **7**

Justificación **9**

Marco teórico **12**

El pensamiento variacional **12**

La razón de cambio como idea fuerte en el cálculo **14**

Las competencias matemáticas **18**

El Modelo Teórico a Priori (MTP) **22**

La representación como competencia matemática **23**

El objeto matemático **24**

La razón de cambio y la derivada a través de los estándares de competencias matemáticas ligados al pensamiento variacional **27**

La función derivada y sus registros de representación semiótica **33**

Mediación didáctica-tecnológica con GeoGebra como apoyo en la representación semiótica de la función derivada. **38**

El programa informático GeoGebra **39**

Las TIC en el ámbito educativo **44**

El aprendizaje híbrido o aprendizaje mixto (*blended learning*) **47**

El modelo de aula invertida **48**

Taxonomía de Bloom para la era digital 54

Modelos de integración TIC en el aula. Modelo TPACK 57

Modelo de sustitución, aumento, modificación y redefinición (SAMR) 59

La teoría de situaciones didácticas (T.D.S) 62

Contextualización 66

Sujetos 69

Contexto tecnológico de los sujetos 73

Metodología 77

Diseño de investigación 77

Diseño de la situación didáctica 78

Procedimiento 87

Implementación de la situación didáctica 88

Primer momento de la situación didáctica: problema contextualizado 89

Segundo momento: mediación didáctica-tecnológica a través del método de aula invertida 93

Resultados 94

La prueba diagnóstica (pre-prueba) 94

Resultados de la tarea N°1 96

Resultados de la mediación didáctica-tecnológica (tratamiento) 97

Síntesis de la mediación didáctica – tecnológica basada en el modelo de aula invertida 102

La prueba final (post-prueba) 103

La red social Facebook como espacio de validación de la información 105

El aula se constituye en un ambiente de reflexión 107

Conclusiones 109

Recomendaciones **112**

Bibliografía **114**

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Perspectivas de las competencias matemáticas en Colombia. 19

Tabla 2. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 1° y 5° 28

Tabla 3. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 6° y 7° 29

Tabla 4. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 8° y 9° 30

Tabla 5. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 10° y 11° 30

Tabla 6. Coherencia horizontal entre el pensamiento variacional y los demás pensamientos 32

Tabla 7. Registros de representación semiótica de la tasa de cambio promedio. 41

Tabla 8. Registros de representación semiótica para la tasa de variación instantánea. 42

Tabla 9. Diferentes registros de representación semiótica de la función derivada. 43

Tabla 10. Un ejemplo de las etapas del modelo SAMR..... 60

Tabla 11. Transición de niveles en el modelo SAMR 61

Tabla 12. Estrato donde se ubica la vivienda de los estudiantes. 70

Tabla 13. Distribución del porcentaje de estudiantes de acuerdo a la comuna que habita. 70

Tabla 14. Nivel de estudios de los padres de familia 71

Tabla 15. Equipos TIC que poseen los estudiantes. 73

Tabla 16. Redes sociales que manejan los estudiantes. 74

Tabla 17. Materias que los estudiantes repararían con videotutoriales. 75

Tabla 18. Nivel de aprendizaje autónomo de los estudiantes. 75

Tabla 19. Fases de la situación didáctica. 83

Tabla 20. Fases de la situación didáctica. 84

Tabla 21. Fase de implementación de la situación didáctica. 85

Tabla 22. Fase de evaluación de la situación didáctica. 86

Tabla 23. Procedimiento de la situación didáctica. 87

Tabla 23. Estructura de la prueba diagnóstica 94

Tabla 24. Resultados de la tarea N°1 97

Tabla 25. Resultados de la actividad con el video N°1 98

Tabla 26. Resultados de la actividad con el video N°2 99

Tabla 27. Resultados de la actividad con el video N°3 101

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Registro analítico para la operación de tratamiento de la función derivada. 33

Figura 2. Registro simbólico para la operación de conversión de la función derivada. 34

Figura 3. La recta secante se convierte en recta tangente. 35

Figura 4. Problema contextualizado. 89

Figura 5. Asignación N°1. 90

Figura 6. Asignación N°2 90

Figura 7. Asignación N°3 91

Figura 8. Asignación N°4 91

Figura 9. Asignación N°5 92

Figura 10. Asignación N°6. 92

Figura 11. Información compartida por el estudiante a través del blog 106

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Solicitud de consentimiento. 125

Anexo 2. Prueba diagnóstica..... 126

Anexo 3. Interfaz EDPuzzle. 130

Anexo 4. Procesos evidenciados en la tarea 1. 131

Anexo 5. Procesos evidenciados en la solución de la tarea 1 – video 1. 132

Anexo 6. Procesos evidenciados en la actividad con el video 2. 133

Anexo 7. Procesos evidenciados en la actividad con el video 3 134

Introducción

La génesis de las ideas que propician el desarrollo de este trabajo se halla en los eventos que generan jornadas irregulares de clase en la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero de la ciudad de Santiago de Cali. Por un lado, están aquellas propias del contexto de la Institución Educativa: capacitaciones, reunión del consejo académico, reunión de la comisión de evaluación y promoción, reunión de docentes de carácter especial y la entrega de boletines, etc. Por otro lado se encuentran los que atañen al Magisterio Colombiano en general, por ejemplo, aquel ocurrido entre el 11 de mayo y el 16 de Junio de 2017 cuando el país se estremeció debido a un nuevo cese de actividades del Magisterio.

Ahora bien, el panorama que ofrece el conjunto de los sucesos mencionados incide en la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero de manera muy particular. En efecto, los profesores del área de matemáticas hemos detectado cómo algunos contenidos se ven "damnificados" como consecuencia del recorte de tiempo de clases; en otras palabras, existen temáticas que son tratadas de manera superficial con el propósito de dar cumplimiento a lo estipulado en el plan de área, y entre ellas, se encuentra la función derivada; tema culminante del pensamiento variacional.

Reflexionar al respecto, sustenta la búsqueda de una alternativa que permita al estudiante continuar con su proceso académico, aun en las circunstancias antes mencionadas. Esto implica brindar al estudiante la posibilidad de acceder a un entorno

distinto al colegio, de manera que este sea adecuado para propiciar el desarrollo de competencias, es decir, que permita la oportunidad de establecer contacto permanente con sus compañeros y con el docente para validar el conocimiento de manera similar a como se haría en clase.

Así las cosas, el desarrollo de esta tesis describe dos aspectos importantes. Por un lado, la incorporación de las TIC a la escuela a través del modelo de educación híbrida conocido como *aula invertida;* y por otro, la manera en que los procesos matemáticos relacionados con la competencia *representar*, en torno al aprendizaje de la función derivada, se pueden enriquecer a través de la implementación de ese modelo. En este sentido, las TIC se convierten en un medio potente para lograr los fines educativos centrados en el aprendizaje del estudiante.

Aunque la experiencia que se desarrolla a través de esta tesis tiene un contexto específico, posee particularidades que posibilitan su aplicación en otros entornos; pues en términos generales, constituyen una guía para el docente que desee implementar metodologías híbridas de aprendizaje.

Termino esta breve introducción invitando al lector a seguir a través del texto el camino que he recorrido para ofrecer una respuesta satisfactoria a mi inquietud. De igual manera pongo a su consideración las ideas y reflexiones planteadas aquí, bien sea como punto de partida para ofrecer nuevas luces o como alternativa de solución para problemáticas similares a las expuestas en líneas anteriores.

Planteamiento del problema

Las experiencias vividas durante los seis años que llevo vinculado como docente de matemáticas en la Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero (I.E JOCAYCU) fueron las que motivaron el planteamiento del problema de investigación que aborda esta tesis. En primer lugar, identifico una reducción de horas efectivas de clase con los estudiantes debido a las dinámicas propias de la educación pública (movilizaciones, paros y reuniones de profesores que generan jornadas escolares irregulares), lo que conlleva a que se presenten dos situaciones particulares; por un lado, puede ser que algunos temas incluidos en el plan de área no sean tratados en clase, y por otro, que las temáticas sean cubiertas de manera parcial y con poca profundidad.

En segundo lugar, me percato de las dificultades que impiden el uso efectivo de las TIC al interior de la clase de matemáticas en la I.E JOCAYCU, debido a la inadecuada distribución de los computadores en sus salas de informática y a la carencia de conectividad en una de ellas.

Ahondando en la primera situación, debo aclarar que el plan de área de matemáticas de la I.E JOCAYCU contempla que en el último periodo del año escolar, el grado undécimo debe estudiar la temática propia del cálculo diferencial, esto es, lo correspondiente a la función derivada y sus aplicaciones. Sin embargo, existen circunstancias inherentes a la educación pública que conllevan a la disminución de horas

efectivas de clase, provocando ajustes en la marcha al plan de aula para lograr cumplir con la programación estipulada. En consecuencia, el contenido previsto a desarrollar en la clase de cálculo se modifica de tal manera que algunas temáticas se excluyen, otras se fusionan y unas cuantas se enseñan de manera superficial; tal es el caso de la función derivada.

En este sentido, la enseñanza de la función derivada se enfoca en el registro algebraico, dejando un vacío respecto a las representaciones de tipo tabular, icónico y gráfico y sus relaciones con las aplicaciones que permiten la resolución de problemas, es decir, la derivada aparece como un tema descontextualizado y sin nexos previos con otros conceptos matemáticos, lo que conlleva a que los estudiantes no desarrollen el pensamiento variacional ni la competencia matemática de representación a través del aprendizaje de la derivada (Villa, 2006).

En cuanto a la segunda situación, es importante destacar el aspecto correspondiente al uso de las TIC en la clase de cálculo, tarea que ha sido difícil de llevar a cabo debido a la particular distribución de los computadores en las salas de sistemas con las que cuenta la sede central de la I.E JOCAYCU. Imagínese Usted estimado lector, que se encuentra en clase observando la pantalla de su computador y en un momento determinado escucha que su profesor interviene para brindar una explicación general; en ese instante Usted deja de mirar la pantalla de su equipo y gira su cabeza al menos 120° para atender las indicaciones que el docente le transmite utilizando el proyector; luego vuelve la vista hacia su computador para aplicar las instrucciones que acaba de recibir, pero justo en ese momento el profesor interviene de nuevo para brindar información adicional, así que Usted gira de nuevo su cabeza, recibe las nuevas orientaciones y regresa a su trabajo. En ese momento se

percata que ha perdido el hilo de la actividad y no puede llevar a cabo la tarea asignada, así que se dirige hacia su profesor para solicitarle que le repita las instrucciones de manera personalizada.

Esta breve exposición ilustra las dificultades que impiden el aprendizaje mediado por las TIC en la clase de cálculo. Al respecto, y comprendiendo que la adecuación de las salas de informática implica una gestión a largo plazo, es de suma importancia proponer una alternativa para llevar a cabo un correcto ejercicio de mediación didáctica-tecnológica que le permita a los estudiantes no sólo estudiar cálculo, sino también, colocarse a la vanguardia de las últimas tendencias de aprendizaje del mundo globalizado.

Pese a este complicado panorama, son las mismas TIC las que permiten vislumbrar una solución. En ese sentido, y dado que la tecnología crece en sofisticación y la interconexión se hace posible gracias a internet, surge la posibilidad de la educación virtual, la cual trae consigo transformaciones al enfoque de la escuela tradicional.

Al respecto, El Ministerio de Educación Nacional (2015) se refiere a la educación virtual como aquella que enfatiza en el desarrollo de programas de formación a través del ciberespacio, es decir, sin que se haga necesario que el cuerpo, tiempo y espacio se conjuguen para lograr establecer un encuentro de diálogo o experiencia de aprendizaje.

> “La educación virtual es una acción que busca propiciar espacios de formación, apoyándose en las TIC para instaurar una nueva forma de enseñar y de aprender. La educación virtual es una modalidad de la educación a distancia; implica una nueva

> visión de las exigencias del entorno económico, social y político, así como de las relaciones pedagógicas y de las TIC. No se trata simplemente de una forma singular de hacer llegar la información a lugares distantes, sino que es toda una perspectiva pedagógica" (MINEDUCACION, 2015).

Para aclarar esta perspectiva, es pertinente establecer que dentro de los espacios de formación apoyados en TIC se encuentran entre otras las siguientes modalidades: e-*learning*, *mobile learning* y *blended learning*, ésta última de interés particular en el desarrollo de este trabajo. El *blended learning* se define como el uso mezclado de entornos presenciales y no presenciales (Bartolomé, 2017) por lo que se le conoce como aprendizaje híbrido, mixto o semipresencial.

Ampliando el panorama, la modalidad de *blended learning* permite distinguir entre sus categorías, el método *flipped classroom* o aula invertida, cuyo enfoque de aprendizaje reemplaza la instrucción directa por videos, mientras que en los salones de clase, se anima a los estudiantes a enfocarse en actividades de aprendizaje importantes bajo la guía de los docentes (Zunboylu y Karagözlü, 2017).

Estas observaciones advierten dos elementos valiosos con los que se puede desarrollar una investigación. En primer lugar, es indispensable determinar la importancia de la competencia matemática de representación para la adecuada comprensión de la función derivada. En segundo lugar, es importante determinar si a través del modelo de aula invertida, como estrategia de educación híbrida mediada por TIC y alternativa para enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, se logra propiciar el desarrollo de la

competencia matemática de representación en torno a la función derivada en el contexto de la I.E JOCAYCU.

Entonces a partir de las observaciones planteadas surge la pregunta:

¿En qué medida una situación didáctica basada en el método de aula invertida favorece el desarrollo de la competencia matemática de representación, en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero de la ciudad de Cali?

Objetivo general

Determinar la medida en la que una situación didáctica basada en el método de aula invertida favorece el desarrollo de la competencia matemática de representación, en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

Objetivos específicos

1. Precisar los aspectos relevantes que propician el desarrollo de la competencia matemática de representación para la adecuada comprensión de la función derivada.

2. Diseñar una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida para favorecer el desarrollo de la competencia matemática de representación en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

3. Implementar una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida para favorecer el desarrollo de la competencia matemática de representación en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

4. Estimar la medida en la que la implementación de una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida favorece el aprendizaje en torno la función derivada en los estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

Justificación

Para que el lector comprenda la justificación de esta tesis, utilizaré tres frases que pertenecen a la cotidianidad que se vive en las instituciones educativas y con las que quizá Usted se identifique.

- Estudiante: "*Profe, yo no vine la clase anterior. ¿Me puede explicar lo que vieron?"*

Esta es posiblemente una de las preguntas que mayor preocupación trae a un docente; y no es para menos, pues quienes han vivido esta situación saben lo difícil que resulta dedicar exclusividad a un alumno, mientras hay al menos otros treinta estudiantes que también demandan atención.

Ante esta coyuntura, el desarrollo de este trabajo ofrece a los profesores la posibilidad de considerar las alternativas que surgen a través de los enfoques de aprendizaje mixto que ofrecen las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC); en particular el concerniente al método de *flipped classroom* o aula invertida (Bergman y Sams, 2012).

•Docente: *"Ahora, imaginen que la recta secante que pasa por los puntos A y B, se desliza hasta pasar únicamente por el punto C"*

Es cierto, es muy común que los docentes pidan a sus estudiantes que imaginen tanto las representaciones gráficas de objetos matemáticos, como sus movimientos en el plano, esto en el ámbito de la solución de una situación problema. Con esto sólo queda decir que ya se tienen dos problemas, pues ahora los estudiantes están enfrascados en descifrar lo que pasa por la mente del profesor.

Por otro lado, el enfoque matemático que aborda este trabajo permite reconocer en la tecnología una herramienta poderosa para diseñar ambientes de aprendizaje mediados por TIC, lo que posibilita al estudiante la distinción de diferentes representaciones de un objeto matemático para lograr una mejor comprensión de éste (Duval, 1998).

•Estudiante: "*Profe, con el computador podemos terminar más rápido el trabajo"*

El uso de las TIC enfocado en el ahorro de tiempo para efectuar tareas escolares prima la razón instrumental sobre los procesos de pensamiento. Esta percepción equivocada del uso de las TIC conlleva a que el proceso educativo pierda su sentido, dando más importancia a la tecnología que al propio aprendizaje.

Tan importante como las dos perspectivas anteriores, es el vínculo que permite la integración curricular de la tecnología. Así pues, el centro del proceso educativo es el aprendizaje, mientras que la tecnología es una herramienta que permite alcanzar este

propósito (Cendoya y Martino, 2015). De acuerdo a lo anterior, este trabajo incluye aspectos importantes de los modelos de integración SAMR y TPACK, a través de los cuales se comprende que el objetivo de la mediación didáctica-tecnológica se centra en procesos de enseñanza y aprendizaje que serían inconcebibles sin TIC (Coll, 2009).

En concordancia con lo anterior, esta tesis constituye un punto de referencia para aquellos docentes que planean integrar las TIC al área de matemáticas, pues en sus líneas se logra vislumbrar que no se trata de sustituir la tecnología del tablero y el marcador borrable por otra constituida por circuitos y luz. La cuestión va más allá, y parte del hecho de que el docente debe conocer los fundamentos de aquello que quiere que el estudiante aprenda, para luego preguntarse la manera en que la tecnología contribuye a que esto sea posible. Ya en este punto, todo queda en manos de la creatividad, el ingenio y la voluntad del profesor.

Marco teórico

El pensamiento variacional

Dentro del contexto de las matemáticas, el desarrollo de este trabajo se enmarca en el pensamiento variacional, pues desde ahí emerge el objeto matemático de interés para esta tesis: la función derivada.

El pensamiento variacional está ligado a todas aquellas situaciones en contextos cotidianos de la escuela, del entorno sociocultural, de las matemáticas mismas y de otras ciencias donde se presentan fenómenos de cambio y variación. De acuerdo al MEN (2004) "El pensamiento variacional se entiende como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas" (p.17)

Por otro lado, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) definen el pensamiento variacional como el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Esta definición adquiere un valor enorme, pues deja entrever la importancia de los registros de representación semiótica y las operaciones de tratamiento y conversión dentro del pensamiento variacional, y a partir de este, hacia los demás pensamientos matemáticos. Al respecto el MEN (2004) sostiene que:

> "El pensamiento variacional está relacionado con los pensamientos numérico (tablas, patrones numéricos), geométrico (mecanismos geométricos y gráficas cartesianas), algebraico (expresiones y ecuaciones), métrico (medición de magnitudes en situaciones de variación y cambio) y estadístico (tratamiento de datos y regresiones), a través de las formas de representación cuantitativas de las situaciones de variación y cambio. Esto quiere decir que no es posible dejar de lado los otros pensamientos cuando se estudian situaciones de variación y cambio" (MEN, 2004, p.21).

Antes de continuar, es pertinente brindar claridad en cuanto a las conexiones entre los términos: variacional, cambio y variación; en este sentido Vrancken (2011) hace el siguiente aporte:

> "Para poder explicar el sentido del término "variacional" es importante dejar en claro la diferencia entre cambio y variación. La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación se entiende como una cuantificación del cambio, esto significa utilizar nuestro entendimiento para

conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. En este sentido nos referiremos a argumentos de tipo variacional" (Vrancken, 2011, p.74).

De acuerdo a lo anterior, el pensamiento variacional está cohesionado con los demás pensamientos matemáticos, de tal manera que en todos ellos podemos encontrar situaciones de variación y cambio. Ahora bien, dentro de cada uno de estos pensamientos dichas situaciones se expresan de una manera particular utilizando variados registros simbólicos, por lo cual, se considera una competencia matemática dentro del pensamiento variacional, la capacidad de interpretar, transformar y utilizar las diversas representaciones de cambio para dar respuesta a situaciones en contextos tanto matemáticos como de la vida cotidiana. A partir de lo anterior, se distinguen los fenómenos de cambio y variación como núcleo del pensamiento variacional, pero queda pendiente la manera en que estos influyen en la emergencia de la función derivada. Este aspecto, considerado de gran importancia para el desarrollo del cálculo merece una explicación más detallada.

La razón de cambio como idea fuerte en el cálculo

El cálculo es una rama de las matemáticas cuyo desarrollo llevó cerca de dos mil años. Sus orígenes se remontan a las ideas sobre los infinitesimales propuesta por Eudoxo (300 a.C) pasando luego por la exploración de los máximos y los mínimos realizada por Fermat y el método para hallar rectas normales en un punto específico de una curva propuesta por Descartes (siglo XIV). Posteriormente llegaría el descubrimiento del cálculo y el desarrollo de métodos para encontrar la derivada y los máximos y mínimos de una

función, elaborados independientemente por Leibnitz y Newton (siglo XV). Continúan a estos descubrimientos, los trabajos realizados por Lagrange (siglo XVI) quien aplicaría el cálculo a la mecánica, además de aportar la notación actual de derivada. Finalmente Cauchy y Wierstrass (siglo XVII) le dan rigor al análisis matemático.

Algunos autores (Ponce, 2015; Vidal, 2012; Gutiérrez, 2010; González, 2004; Barceló, 2002) concuerdan en señalar que los problemas que dieron origen al concepto de derivada y en consecuencia condujeron al descubrimiento del cálculo fueron:

- Hallar la razón de cambio de una magnitud dada.
- Trazar la recta tangente a una curva en cualquier punto.
- Calcular la velocidad de un movimiento no uniforme en cualquier instante.
- Calcular máximos y mínimos

Dentro del currículo escolar, el cálculo aparece en la educación media (regularmente en undécimo grado) marcando el pináculo del pensamiento variacional, además, también se imparte en los primeros semestres universitarios de algunas carreras.

En el caso del bachillerato, la enseñanza del cálculo se ha reducido a resolver ejercicios sobre límites y derivadas, conduciendo a que el estudiante deba hacer un alto grado de abstracción sobre unas matemáticas descontextualizadas de la realidad, pero que para los docentes es importante, pues les interesa que sus estudiantes vayan “mejor

preparados" a la universidad (Vrancken, 2011; Sánchez-Matamores, García y Llinares, 2008; Artigue, 1995).

En la búsqueda de cambiar ese panorama, este trabajo busca mostrar una perspectiva diferente en cuanto a la importancia del cálculo en el currículo de educación media y su valía en el desarrollo del pensamiento variacional, por ello, esta tesis se adhiere a la postura de Vasco (2010) quien afirma que:

> "El cálculo también puede enseñarse para desarrollar y ejercitar el pensamiento numérico, espacial y métrico, así como el pensamiento variacional que los cruza a todos, por medio de la utilización de sistemas conceptuales analíticos, con sus distintos registros simbólicos para la modelación de procesos y para resolver problemas." (p.67).

De inmediato surge la inquietud referente a los temas que son imprescindibles para un estudiante que curse cálculo en educación media pueda desarrollar el pensamiento variacional. A propósito, Vasco (2010) nos brinda una orientación al respecto.

> "En mi opinión, las tres ideas fuertes del cálculo diferencial e integral son, en primer lugar, la variación y la covariación de las cantidades de distintas magnitudes (en la que incluyo, por supuesto, la covariación funcional, la covariación lineal y el estudio local de las maneras como las funciones no lineales transmiten la variación

del dominio al codominio); en segunda instancia, las razones, tasas o ratas de cambio que llevan a las derivadas, y en tercer término, la acumulación que conduce a las integrales." (p.67).

En relación con los objetivos trazados en este trabajo, el desarrollo de esta tesis se apoyará en la segunda idea de Vasco (2010), la cual hace énfasis en la adecuada enseñanza de la tasa de cambio promedio y la tasa de cambio instantánea para una mejor comprensión de la derivada.

Con respecto a la razones de cambio, Dolores (2010) afirma que al estudiar fenómenos de variación es importante determinar qué tan rápido cambia eso que cambia. En la razón de cambio promedio se comparan cambios entre dos eventos diferentes de un mismo fenómeno, mientras que en la razón de cambio instantánea se introducen diferenciales para medir lo que cambia una variable respecto a otra en un instante.

En síntesis, la razón de cambio constituye uno de los pilares que propiciaron el desarrollo del cálculo, por ello, existe una conexión potente entre las razones de cambio como núcleo del pensamiento variacional y la función derivada. Además, desde la perspectiva de Vasco (2010) existen registros simbólicos que le brindan carácter transversal al pensamiento variacional sobre los demás pensamientos matemáticos. Con este panorama expuesto, es pertinente que el lector se familiarice con las competencias matemáticas, específicamente con la competencia *representar*; y con los registros de representación semiótica; aspectos de gran trascendencia para esta tesis y que trataré a continuación.

Las competencias matemáticas

El término competencia tiene carácter polisémico, pues adquiere una connotación diferente de acuerdo al contexto donde se desarrolle. De acuerdo a la Organización de Estados Iberoamericanos (2003), el término competencia en el ámbito laboral hace referencia a: "La capacidad que una persona posee para desempeñar una función productiva en escenarios laborales usando diferentes recursos bajo ciertas condiciones, que aseguran la calidad en el logro de los resultados."(p.6).

Desde otra óptica (García et al., 2013) establecen que la competencia en el ámbito educativo puede ser asociada con:

> "La educación integral y la formación de sujetos críticos, en donde el saber – hacer que se invoca ha de vincularse con los contextos socio – culturales y el sentido ético humanístico en las decisiones sobre los usos del conocimiento y la cualificación de las condiciones de vida de las personas" (p.24).

De acuerdo a su etimología, el término competencia proviene del latín *cum- petere* el cual tiene entre otras las siguientes acepciones: "capacidad para concurrir, coincidir en la dirección" (Tobón, Rial, Carretero y García, 2006) o "dirigirse con" (García et al., 2013). Desde la perspectiva de estos autores, la competencia dentro del contexto educativo se aleja del estereotipo de lo competitivo e individualista, adquiriendo sentido a través de la cooperación e interacción entre personas.

En lo que concierne a las competencias matemáticas en la educación escolar en Colombia, es pertinente contemplar las dos perspectivas que se sintetizan en tabla 1.

Tabla 1. Perspectivas de las competencias matemáticas en Colombia.

	Ministerio de Educación Nacional (2006)	García et al. (2013)
COMPETENCIAS MATEMÁTICAS	Comunicar	Comunicar
	Formular y resolver problemas	Plantear y resolver problemas
	Formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos	Representar
	Razonar	Pensar y razonar
	Modelar procesos y fenómenos de la realidad	Modelizar

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2016) y García et al. (2013).

Para comprender el carácter potente de las competencias matemáticas relacionadas en la tabla 1, es importante tener en cuenta la perspectiva de Solar (2009). Para este autor, las competencias matemáticas son procesos que articulan el currículo a distintos niveles, y para ello, deben cumplir los siguientes criterios:

a) Vincular a una competencia una serie de procesos matemáticos específicos.

b) Contribuir a organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que se desarrollan.

c) Ser significativas para la actividad matemática escolar. Ello contribuye a generar sentido y calidad a la actividad matemática de aprendizaje.

En procura de cumplir con estos criterios, el autor sostiene que una competencia matemática debe constituirse de: tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad; aspectos que se explican a continuación:

- **Tareas matemáticas**: De acuerdo con (Solar, 2009; García et al., 2015) Las tareas deben ser específicas, relacionadas con un contenido y asociadas a una expectativa de aprendizaje a corto plazo, por ejemplo, el objetivo de la clase o de la unidad. En todo caso, deben estar formuladas para el desarrollo de procesos matemáticos que ponen en juego capacidades del estudiante.

- **Procesos matemáticos**: De acuerdo a García et al. (2015) es a partir de los procesos matemáticos que un estudiante puede llegar a desarrollar competencias en el área. Entre los procesos que conforman la base de cada competencia matemática podemos destacar: representar, demostrar, argumentar, analizar, resolver, graficar, calcular, modelizar, visualizar, codificar, decodificar, traducir, entre otros.

- **Niveles de complejidad**: este nivel depende de la complejidad de las tareas y de los procesos matemáticos vinculados con esa competencia. García et al. (2015) los configura en el siguiente orden para valorar y caracterizar el aspecto cognitivo de las competencias matemáticas: reproducción, conexión y reflexión.

Cabe señalar que los aspectos anteriores tienen un componente cognitivo fuerte, sin embargo no son suficientes para el desarrollo de competencias matemáticas. En este

sentido, D´amore (2003) sostiene que sin procesos afectivos, metacognitivos y de tendencia de acción, un estudiante difícilmente se interesará en resolver problemas matemáticos; afirmación que resume en la siguiente frase: "¿Qué sería una competencia sin el deseo, sin la voluntad y sin el gusto de hacer uso de ella?" (p.8)

Es importante destacar cómo las ideas de estos autores guardan conexión con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

> "A medida que los estudiantes avancen en la educación básica y media, la complejidad conceptual de sus conocimientos no se evidencia solo en los aspectos formales de la disciplina que ellos pueden expresar verbalmente o por escrito, sino también en el tipo de procesos generales de la actividad matemática que pueden realizar con solvencia, eficacia y actitud positiva. A medida que los estudiantes vayan disponiendo de mejores compresiones conceptuales, van a poder desarrollar procesos de mayor complejidad y estarán en capacidad de enfrentar el tratamiento de situaciones de mayor nivel de abstracción" (p.78).

De esta manera, la adquisición de competencias matemáticas adquiere otro matiz, puesto que en ninguna de las ideas expuestas por las voces traídas a colación se hizo énfasis en los contenidos, en cambio, se resaltó la importancia que determinan los procesos que se vinculan a las competencias, entendiendo estos como aquellos vinculados con aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos. En este sentido, se puede inferir que los procesos matemáticos, las tareas matemáticas y los niveles de complejidad contribuyen al desarrollo

de competencias, mientras que la adquisición de las mismas se lleva a cabo en el largo plazo.

El Modelo Teórico a Priori (MTP)

El aparte anterior culmina con un llamado de atención sobre los aspectos que se deben tener en cuenta para el desarrollo de competencias matemáticas. Es este sentido D´amore (2003) sostiene que lo cognitivo es sólo uno de esos aspectos, y que no se deben dejar de lado los procesos afectivos y de tendencia de acción debido a que estos proveen al estudiante voluntad y gusto para emprender tareas matemáticas.

Articular las tareas matemáticas, los procesos matemáticos y los niveles de complejidad con la actividad matemática de aprendizaje del estudiante; requiere de un modelo donde dicha articulación sea evidente. Con ello en mente esta tesis adopta el Modelo Teórico A Priori (García et al., 2015) "como una estructura para organizar, describir, explicar y articular los componentes de la competencia matemática" (p.27)

De acuerdo con el autor, El Modelo Teórico a Priori (MTP) es una estructura para organizar, describir, explicar y articular los componentes de la competencia matemática con la actividad matemática de aprendizaje, los objetivos de las tareas y las formas de evaluación. El fin de este modelo es planificar el desarrollo progresivo de movilización de las competencias matemáticas cuando el estudiante resuelve tareas y desarrolla procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción con complejidad creciente (García et al., 2015).

La representación como competencia matemática

La comunicación entre los seres humanos integra el lenguaje verbal con las manifestaciones no verbales, con ello, la lengua materna y el lenguaje corporal, parecen suficientes para que las personas comprendan lo que su interlocutor quiere transmitir. Sin embargo, aquellos que tenemos formación matemática y desempeñamos labores de docencia en el área, usamos el lenguaje natural (lengua materna) para nombrar objetos matemáticos, además, para referirnos a ellos utilizamos regularmente representaciones aritméticas, algebraicas y geométricas. La idea anterior es sintetizada por Vásquez (1990) quien expresa que: "Los elementos, sean cosas, prácticas, ideas, cualidades o discursos, todos ellos, podemos reducirlos a un denominador común: son signos." Al respecto, Benveniste (citado en Vásquez, 1990) expresa que la comprensión de las ideas, objetos y discursos llegan a través del signo y por esta vía se logra una apropiación del mundo; en este sentido, la semiótica identifica, describe y señala las relaciones de los signos en la cultura.

En concordancia con lo anterior, el MEN (2006) explicita que para ser matemáticamente competente se deben manejar los procesos que permitan:

> "Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos." (p.51)

En resumen, el ser humano ha desbordado sus formas de comunicación, la verbalidad y la gestualidad acompañan ahora al *signo* como manera de comprender ideas u objetos. Tal es el caso de las matemáticas, la cual se halla inmersa en símbolos, figuras, tablas y gráficas que se utilizan para resolver un problema o representar una situación. Ahora bien, adquirir competencias relacionadas con la representación exige, tanto el reconocimiento de los registros mencionados como su transformación en otros registros. Lo anterior implica que la información contenida en una tabla puede ser transformada en un gráfico o que la información contenida en un problema verbal pueda ser transformada en símbolos matemáticos o lenguaje algebraico. Sin embargo, en el contexto de esta tesis esto no es suficiente para adquirir comprensión en matemáticas, razón por la cual es indispensable tener en cuenta lo concerniente a los términos: objeto matemático y registro semiótico.

El objeto matemático

Las matemáticas son producto de las pragmáticas humanas (o, al menos, de grupos homogéneos de individuos), cuyo fin es responder a situaciones del contexto (mundo real, de las propias matemáticas o de otras ciencias). Es así como a partir de las soluciones propuestas emergen los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, entre otros) que evolucionan progresivamente y pueden ser dotados de diversos significados dependiendo de las personas o de las instituciones (D`amore, 2012; Godino, 2010).

Llegado a este punto, es importante la definición de objeto matemático desde la perspectiva pragmática de Chevallard (citado en D`amore, 2012).

> "Un objeto matemático es un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir aquello que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos,…), se puede decir, registro de la escritura."(p.6)

Bajo este punto de vista, la relación que tiene una persona o institución con un objeto, es más importante que la noción del significado de éste; lo que constituye la idea central de lo que Chevallard llama: antropología cognitiva.

Es pertinente traer a colación la posición que algunos autores toman respecto a los objetos matemáticos, tal es el caso de Pecharroman (2013) quien sostiene que estos, al ser producto de la razón, son reales pero no materiales. Sin embargo Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) afirman que los objetos matemáticos no son reales y en consecuencia no son accesibles a la percepción, siendo esta la causa de recurrir a las representaciones para su estudio. Duval (1999) comparte este punto de vista y añade que no puede haber comprensión si no se establecen diferencias entre un objeto matemático y su representación.

Con respecto a esto último, las posiciones pragmatistas del enfoque ontosemiótico consideran que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (Godino y Font, 2007). De manera similar, Chemello (2001) amplía esta idea afirmando que para aprender un concepto habrá que

poder utilizarlo y reflexionar sobre él en diferentes situaciones particulares donde aparezca con distintos significados y diferentes representaciones, propiedades, y relaciones.

Ofreciendo un panorama más amplio, y en concordancia con lo anterior, Douady (1984) plantea que los conceptos matemáticos presentan un doble estatus inseparable: de instrumento (o herramienta) y de objeto. Cuando se utilizan ciertos conocimientos para resolver un problema, se le está dando a esos conocimientos estatus de instrumento, y cuando se reflexiona sobre ellos, estos se oficializan como objetos matemáticos reconocidos socialmente.

En síntesis, este aparte ofrece una conexión entre la competencia matemática representar y la comprensión en matemáticas, la cual determina un aspecto vital en el desarrollo de esta tesis. Por un lado, se establece la importancia de la competencia representar en el contexto de las matemáticas, mientras que por otro lado, Duval (1999) hace un llamado de atención respecto a esta competencia, pues la compresión en matemáticas se alcanza cuando se puede determinar la diferencia entre un objeto matemático y su representación. En este sentido, se deben explorar alternativas que permitan determinar las diferentes representaciones de un objeto matemático sin que se pierda el significado de éste.

Lo dicho hasta el momento, me permite introducir la función derivada como objeto matemático de interés para esta tesis desde la perspectiva de su representación semiótica. Esto, aunado a la postura de Vasco (2010) respecto a la razón de cambio como idea fuerte del cálculo, hace indispensable realizar una búsqueda exhaustiva dentro de los estándares

de competencias matemáticas (MEN, 2006) que permita confirmar los planteamientos anteriores y comprender el carácter de los registros simbólicos a los que se hace alusión.

La razón de cambio y la derivada a través de los estándares de competencias matemáticas ligados al pensamiento variacional

La complejidad conceptual y gradualidad del aprendizaje de las matemáticas exigen de los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal entendiéndose por coherencia vertical la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados; y por coherencia horizontal como la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Por tanto nuestro interés sobre los estándares radica en que muestran una posible forma en cómo los conocimientos, procesos y contextos se van complejizando a medida que avanza la escolaridad.

Es en el fondo, la idea piagetiana sobre el viaje de lo intuitivo a lo formal que se presenta en cada uno de los ciclos escolares que se pueden relacionar con etapas de aprendizaje cada una de ellas con diversos aspectos de la actividad matemática que muestran el carácter constructivo y flexible de cómo se relaciona lo nuevo con lo anterior (MEN, 2006).

Tabla 2. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 1° y 5°

	Grado	Estándares
Coherencia vertical Pensamiento variacional	1° - 3°	Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
		Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
	4° - 5°	Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos
		Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
		Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales
		Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2006).

La tabla 2 permite distinguir a partir de los estándares que se manejan en este conjunto de grados, la importancia de las representaciones aritméticas y geométricas dentro del pensamiento variacional; lo que indica la posibilidad de introducir operaciones de conversión y tratamiento pertinentes.

Al respecto, es importante tener en cuenta que el registro de representación semiótica recurrente está dado en lengua materna, relacionado con los contextos de otras ciencias.

En cuanto al pensamiento variacional se identifican: Las regularidades, los patrones, situaciones de cambio y variación, y las relaciones de dependencia respecto al tiempo.

Tabla 3. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 6° y 7°

	Grado	Estándares
Coherencia vertical Pensamiento variacional	6° - 7°	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)
		Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación)
		Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos
		Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2006).

La tabla 3 permite destacar en los estándares matemáticos de 6° y 7° el uso de los registros de representación en lengua materna, gráfica, tabular e icónica; al igual que las situaciones de conversión y tratamiento a partir de éstas. En estos grados se detecta la aparición del registro cartesiano para identificar variaciones directas e inversas de carácter lineal.

Por otro lado, la tabla 4 permite reconocer los registros de representación semiótica predominante en los grados 8 ° y 9 ° son de carácter algebraico y gráfico, entre los cuales se presentan situaciones de conversión y tratamiento. Se destaca en su contenido el análisis variacional de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, a través del uso del concepto de pendiente.

Tabla 4. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 8° y 9°

	Grado	Estándares
Coherencia vertical Pensamiento variacional	8° - 9°	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
		Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
		Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
		Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
		Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
		Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan
		Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2006).

Tabla 5. Coherencia vertical del pensamiento variacional entre 10° y 11°

	Grado	Estándares
Coherencia vertical Pensamiento variacional	10° - 11°	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
		Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
		Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
		Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2006).

La tabla 5 permite reconocer que en los grados 10° y 11° los registros de representación semiótica predominantes son algebraicos y gráficos, teniendo en cuenta para ello el contexto en el que se utilizan. Las situaciones de cambio y variación se analizan a través del uso de la derivada.

En síntesis, se evidencia la coherencia vertical de los estándares matemáticos ligados al pensamiento variacional. Las conexiones entre los procesos matemáticos involucrados (representar, demostrar, argumentar, analizar, resolver, graficar, calcular, modelizar, visualizar, codificar, decodificar, traducir, calcular, etc.) y los niveles de complejidad creciente (García et al., 2015) guardan concordancia con una de las ideas fuertes del cálculo (Vasco, 2010) a través de la cual se establece la importancia de las situaciones de cambio y variación para la comprensión de la función derivada.

El recorrido a través de los estándares de competencias matemáticas dentro del pensamiento variacional (Tabla 6), permite evidenciar el camino que recorren las situaciones de variación y cambio a través de todas las formas de pensamiento matemático, para los grados 10º y 11º. Este escenario es adecuado para realizar una introducción a los registros de representación semiótica de la función derivada, en el sentido que permita sustentar la importancia de la competencia *representar* en la comprensión de este objeto matemático.

Tabla 6. Coherencia horizontal entre el pensamiento variacional y los demás pensamientos

COHERENCIA HORIZONTAL ENTRE EL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LOS DEMÁS PENSAMIENTOS DENTRO DEL CONTEXTO MATEMÁTICO EN GRADO 10 Y 11					
Grado	Pensamiento Numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico sistemas de medidas	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
10° y 11°	Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.	Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Elaboración propia. Adaptada de MEN (2006).

La función derivada y sus registros de representación semiótica

De acuerdo a Duval (citado en García et al., 2013) no hay comprensión matemática si el estudiante no logra diferenciar un objeto matemático (funciones, números, figuras geométricas, entre otros) de su representación (símbolos, gráficos, iconos, tablas, escritura). Agrega este autor, que un objeto matemático acepta varias formas de representación semiótica, y que un estudiante que logre distinguirlas incrementa sus capacidades cognitivas.

En este sentido, García et al. (2013) afirma que la transformación de un objeto matemático se puede llevar a cabo de dos formas: a través de una operación tratamiento o por medio de una operación de conversión. En otras palabras, si un objeto matemático se transforma al interior de un mismo sistema de representación semiótica, se dice que fue sometido a una operación de tratamiento. La figura 1 ilustra la operación de tratamiento para el registro analítico de la función derivada.

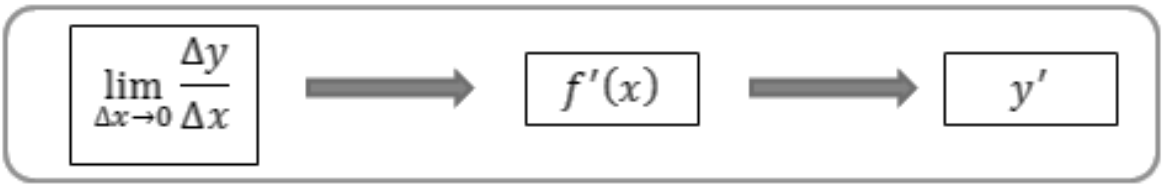


Figura 1. Registro analítico para la operación de tratamiento de la función derivada.

Por otro lado, si un objeto matemático se transforma entre diferentes sistemas de representación semiótica, tenemos entonces que ha sido sometido a una operación de conversión. En el contexto de la función derivada tenemos el paso de un registro de representación algebraico a un registro de representación gráfico (figura 2).

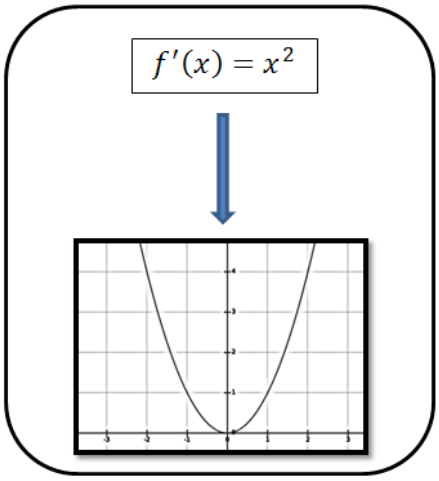


Figura 2. Registro simbólico para la operación de conversión de la función derivada.

En contexto, mi experiencia como estudiante y como docente me ha permitido evidenciar que por lo general la enseñanza de la derivada se lleva a cabo de forma analítica, reduciéndose a una serie de reglas para resolver ejercicios. Ahondando en ello, algunos profesores con buenas intenciones pedagógicas tratan de explicar a sus estudiantes que la derivada se puede comprender a través de una representación gráfica, dibujando una curva sobre la cual trazan muchas rectas de diferentes colores, al final, la derivada resulta ser asociada una recta a la que llaman tangente (Figura 3).

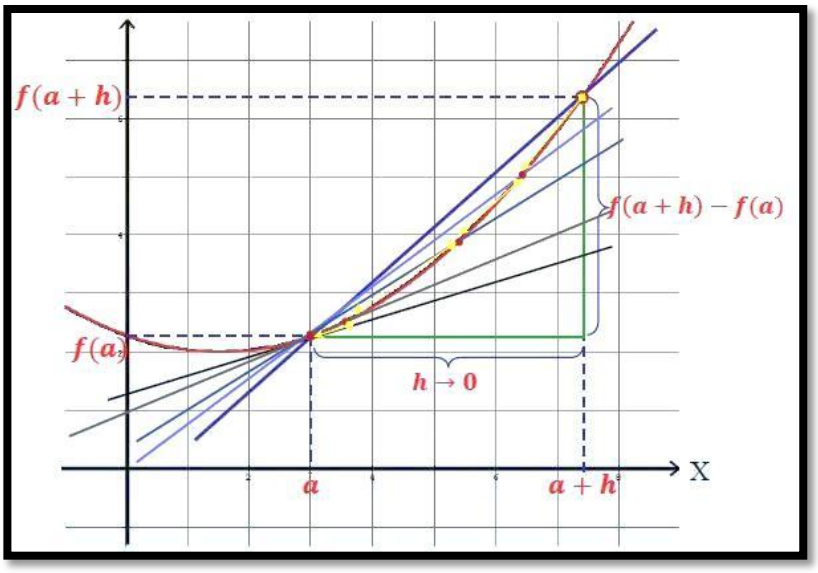


Figura 3. La recta secante se convierte en recta tangente.
Imagen tomada de: https://sites.google.com/site/lapaltacom/2-6

Traigo esto a colación porque esta situación no corresponde a un acontecimiento fortuito. Esta problemática se presenta en muchos cursos de cálculo y se detecta en los primeros años de universidad. En relación con lo expuesto, Sánchez-Matamores et al. (2008) realizan un exhaustivo análisis bibliográfico de esta problemática para contrastarla con sus observaciones directas. Los resultados señalan algunos aspectos importantes por los cuales se originan *obstáculos epistemológicos* (Bachellard, 1976) en el aprendizaje de la función derivada, es decir, barreras que impiden que un individuo adquiera o construya nuevo conocimiento como consecuencia de las limitaciones impuestas por conocimientos previos adquiridos de manera equivocada.

En resumen, la investigación de Sánchez-Matamores et al. (2008) arroja datos importantes, entre los cuales resalto los siguientes:

1) Los estudiantes pueden considerar a los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas.

2) Los estudiantes confunden la derivada en un punto $f'(a)$ con la función derivada $f' x$.

3) Los estudiantes reducen la expresión simbólica $f' x$ a la ecuación de la recta tangente.

4) Los estudiantes reducen la gráfica de $f' x$ a la gráfica de la recta tangente.

5) Los estudiantes necesitan concebir a la primera derivada en sí misma como una función para entender la importancia de la segunda derivada.

En las entrevistas realizadas a los estudiantes que participaron en este estudio se pudo comprobar que en la enseñanza que recibieron de la función derivada predominó la explicación analítica, lo que constituyó un obstáculo epistemológico que impidió generar situaciones de tratamiento y conversión adecuadas. Al respecto, Duval (1998), afirma que un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la Semiosis:

A. La presencia de una representación identificable.

B. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.

C. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...". Es decir con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.

Se comprende entonces la posición de Duval (citado por Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012) respecto a que la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos.
En el caso de la investigación de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) puede decirse que los resultados arrojados evidencian ausencia de conversión y preponderancia de situaciones de tratamiento.

En síntesis, los autores citados en esta sección nos advierten de las consecuencias del abuso de un determinado registro de representación para referirnos a la función derivada. Sin embargo, nos ilustran acerca de las ventajas de transformar un registro de representación semiótica en otro a partir de las operaciones de tratamiento y conversión. Este ejercicio de transformación es potente porque el permite al estudiante identificar un objeto matemático en diferentes contextos, ya sean matemáticos, de otras ciencias o de la vida cotidiana.

En lo que concierne a esta tesis, es importante tener claridad respecto a las dificultades que impiden la comprensión de la función derivada desde la perspectiva de su representación semiótica, pues a partir de ello se inicia otra fase en el desarrollo de este

trabajo. Lo anterior implica explorar opciones didácticas que permitan el manejo simultáneo de las los registros de representación semiótica de la función derivada para no perder de vista su significado.

Mediación didáctica-tecnológica con GeoGebra como apoyo en la representación semiótica de la función derivada.

Es habitual que la gente perciba las matemáticas como un ejercicio que se lleva a cabo exclusivamente usando lápiz y papel, por lo tanto, requiere de la mecanización y la repetición para garantizar que lo aprendido nunca se olvide. Sin embargo, la realidad de nuestro contexto ofrece un panorama completamente diferente, pues la incursión de las tecnologías en el ámbito educativo permiten visualizar ciertas propiedades de los objetos matemáticos, en el sentido que estos pueden ser manipulados y transformados, lo que contribuye al mejoramiento de las capacidades cognitivas de los estudiantes (Lupiáñez y Moreno, 2001).

Actualmente, los recursos informáticos están al alcance de los estudiantes desde temprana edad, abarcando el uso de calculadoras, paquetes informáticos de geometría dinámica y tutoriales entre otros. La incursión de la tecnología ha permitido integrar diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.) poniendo al alcance de los estudiantes, problemáticas antes reservadas a otros niveles más avanzados de la escolaridad (MEN 2006).

En este sentido, Gutiérrez (2010, Citado en Müller, 2014), afirma que el computador no sólo ofrece a los estudiantes una reducción significativa del tiempo dedicado a los cálculos rutinarios; también brinda la posibilidad a los alumnos de relacionar unas formas de representación con otras para profundizar en la comprensión de los conceptos en cuestión.

De acuerdo con la segunda idea fuerte del cálculo planteada por Vasco (2010), el desarrollo de esta tesis parte de las razones de cambio promedio e instantánea para que los estudiantes logren un correcto aprendizaje de la función derivada, en este sentido y en concordancia con la mediación didáctica tecnológica que permite acceder a varios registros de representación semiótica, es pertinente ilustrar la manera en que estos aparecen en la intervención didáctica que plantea este trabajo.

El programa informático GeoGebra

GeoGebra es un programa informático gratuito de matemáticas que puede ser utilizado por estudiantes de todos los niveles académicos. La principal característica de GeoGebra radica en su posibilidad de ofrecer movimiento a los objetos geométricos construidos en él, por lo cual se le considera un *software* de geometría dinámica.

Además de la particularidad mencionada, GeoGebra permite trabajar al tiempo con representaciones de tipo algebraico, tabular, geométrico y estadístico; convirtiéndolo en una herramienta valiosa para la enseñanza y el aprendizaje, permitiendo visualizar propiedades

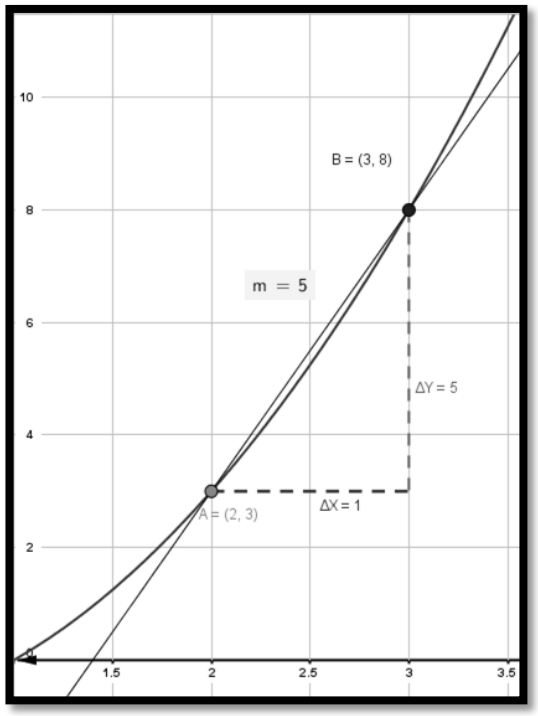
de objetos matemáticos a través de su manipulación y transformación (Lupiáñez y Moreno, 2001).

En lo concerniente al desarrollo de esta tesis, el programa informático GeoGebra permite visualizar en el mismo entorno varios registros de representación semiótica del mismo objeto matemático, por lo tanto se constituye en una herramienta valiosa para la consecución de los objetivos planteados en este trabajo. A continuación se presentan algunas capturas de pantalla que ilustran las razones de cambio y la derivada junto a varias de sus representaciones semióticas.

Con el propósito de condensar los registros de representación semiótica relacionados con las situaciones de cambio y variación, específicamente con la razón de cambio promedio, la razón de cambio instantánea y la derivada; he construido unas tablas que permiten una mirada general a cada uno de estos aspectos.

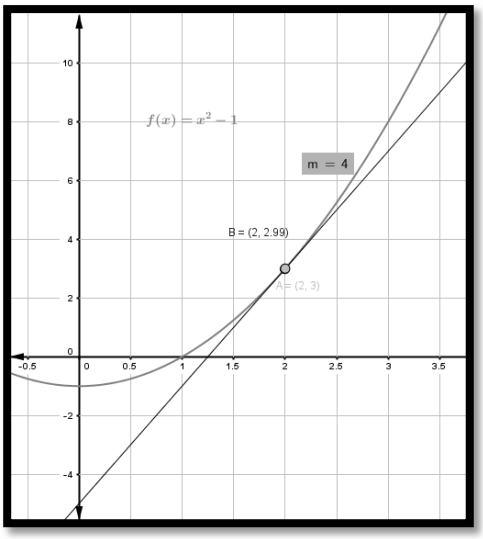
La tabla 7 muestra los registros de representación semiótica relacionados con la razón de cambio promedio cuando se aplica a un caso específico; entretanto la tabla 8 condensa los registros de representación semiótica para la razón de cambio instantánea.

Tabla 7. Registros de representación semiótica de la tasa de cambio promedio.

<table>
<tr><td colspan="5">Registros de representación semiótica para la razón de cambio promedio entre los puntos A (2,3) y B (3,8) correspondientes a la función $f\ x\ = x^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>Registro en lengua materna</td><td>Registro simbólico</td><td colspan="2">Registro tabular</td><td>Registro analítico</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Razón de cambio promedio</td><td rowspan="4">$\frac{\Delta y}{\Delta x}$</td><td>x</td><td>$f(x)$</td><td rowspan="4">$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\ x_2\ - f\ x_1}{x_2 - x_1}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Registro numérico</td><td colspan="3">Registro gráfico</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-3}{3-2} = 5$
El valor numérico 5 corresponde a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos A (2,3) y B (3,8)</td><td colspan="3"> 
</td></tr>
</table>

Elaboración propia.

Tabla 8. Registros de representación semiótica para la tasa de variación instantánea.

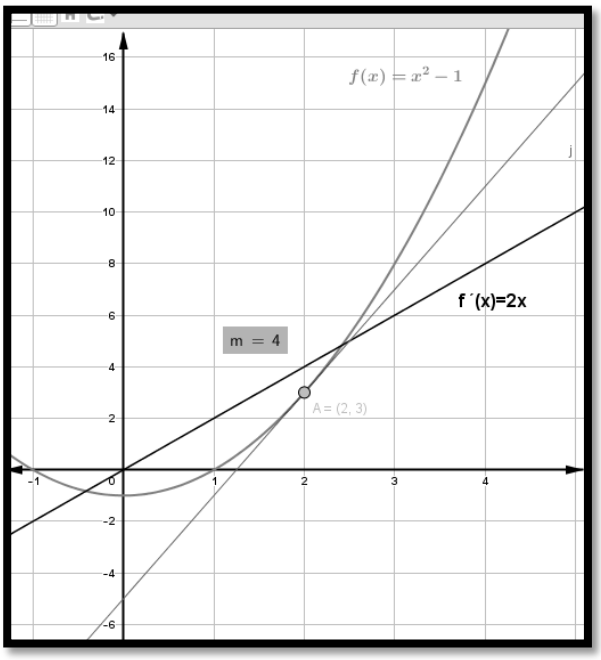
<table>
<tr><th colspan="4">Registros de representación semiótica para la razón de cambio instantánea en el punto A (2,3) $f\ x\ = x^2 - 1$</th></tr>
<tr><th>Registro en lengua materna</th><th>Registro simbólico</th><th colspan="2">Registro tabular</th><th>Registro analítico</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Razón de cambio Instantánea</td><td rowspan="2">$f'\ a$</td><td>a</td><td>$f(a)$</td><td rowspan="2">$f'\ a\ = \lim_{x \to a} \frac{f\ x\ - f(a)}{x - a}$
$f'\ a\ = \lim_{h \to 0} \frac{f\ a + h\ - f(a)}{h}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="2">Registro algebraico</th><th colspan="3">Registro gráfico</th></tr>
<tr><td colspan="2">$f\ x\ = x^2 - 1$
$f\ a\ = a^2 - 1$
$f'\ a\ = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1\ -\ a^2 - 1}{x - a}$
$f'\ a\ = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1 - a^2 + 1}{x - a}$
$f'\ a\ = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$
$f'\ a\ = \lim_{x \to a} \frac{x + a\ \ x - a}{x - a}$
$f'\ a\ = \lim_{x \to a}\ x + a$
$f'\ a\ = a + a$
$f'\ a\ = 2a$</td><td colspan="3"> 
</td></tr>
<tr><th colspan="5">Registro aritmético</th></tr>
<tr><td colspan="5">Donde a es un elemento perteneciente a las abscisas o eje x.
En este caso a = 2, luego $f'\ 2\ = 2\ 2$ $f'\ 2\ = 4$
El valor numérico 4 corresponde a la pendiente de la recta tangente que pasa por la coordenada (2,3).</td></tr>
</table>

Elaboración propia.

Por otro lado, la tabla 9 ilustra la recopilación de los registros de representación semiótica relacionados con la función derivada.

Tabla 9. Diferentes registros de representación semiótica de la función derivada.

Registros de representación semiótica para la función derivada de $f\ x\ = x^2 - 1$		
Registro en lengua materna	Registro simbólico	Registro analítico
Razón de cambio Instantánea	$f'\ x$	$f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{f\ x+h\ - f(x)}{h}$

Registro algebraico	Registro gráfico
$f\ x\ = x^2 - 1$ $f\ x+h\ =\ x+h\ ^2 - 1$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{f\ x+h\ - f\ x}{h}$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{x+h\ ^2 - 1 - x^2 - 1}{h}$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2x.h + h^2 - 1 - x^2 + 1}{h}$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{2x.h + h^2}{h}$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{h\ 2x. + h}{h}$ $f'\ x\ = \lim_{h\to 0}\ 2x + h$ $f'\ x\ = 2x$	
$f'\ x\ = 2x$ Representa la gráfica una función lineal que pasa por el origen.	

Elaboración propia.

La información consignada en las tablas 7, 8 y 9 anteriores permite distinguir el camino que construyen las razones de cambio para una mejor comprensión de la función derivada. El programa de geometría dinámica GeoGebra, al facilitar el trabajo simultáneo con varios registros de representación semiótica, posibilita la identificación de conexiones existentes entre las representaciones que brindan significado a un objeto matemático. En consecuencia, el programa informático GeoGebra se considera adecuado para ser incorporado al diseño de la situación didáctica cuyo enfoque trataré a continuación.

Las TIC en el ámbito educativo

Computadoras e internet se han convertido en un verdadero dúo dinámico, cuyo robustecimiento ha propiciado que las bibliotecas familiares vayan a parar a los sótanos de las librerías donde se comercian libros de segunda mano. Además de estos dos aspectos, es importante considerar que la información y la comunicación han adquirido otro nivel a través de la movilidad que le proporcionan los dispositivos de telefonía celular y las *tablets*.

De acuerdo con García et al. (2015), las TIC representan el medio (y no el fin) para el logro de educación por competencias centrada en el aprendizaje virtual. Al respecto, el reto del docente consiste en formarse y actualizarse en estas competencias para incorporarlas a su práctica profesional. Este autor señala que algunas de las características del paradigma educativo centrado en el aprendizaje virtual son:

a) Permanencia: los estudiantes nunca pierden sus trabajos.

b) Accesibilidad: los estudiantes tienen acceso a sus documentos, datos o vídeos desde cualquier sitio mediante una conexión a Internet.
c) Inmediatez: en cualquier momento, los estudiantes pueden acceder a nuevas información de manera inmediata.
d) Interactividad: los estudiantes interactúan con ordenadores y dispositivos integrados por las herramientas de comunicación.
e) Actividades situadas: el aprendizaje de los estudiantes se realiza de manera natural con base en sus necesidades e inquietudes.
f) Adaptabilidad: la información la pueden obtener en los tiempos y lugares elegidos por los estudiantes.

Es importante tener en cuenta que la tecnología avanza a pasos agigantados, y que el uso del computador dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje toma otra perspectiva cuando hablamos de Internet. En este sentido Müller (2011), afirma que la irrupción de internet al ámbito educativo amplía las posibilidades de compartir información con mayor cantidad de personas e interactuar con estas en directo o en diferido a través de videos o asignaciones que requieran aprendizaje de tipo colaborativo.

Así las cosas, es oportuno señalar que la mediación didáctica-tecnológica que se desarrolla en esta tesis, está sustentada en las siguientes tendencias sobre las cuales se incorporan las TIC en el contexto educativo (Díaz-Barriga, 2013).

a) **Las tendencias que habilitan al docente en el uso de diversos programas libres existentes en la red**: el interés de esta corriente es capacitar a los docentes para hacer uso de las herramientas disponibles en la red.

b) **Las tendencias orientadas a desarrollar contenidos que pueden ser usados en línea**: el estudiante tiene la ventaja de acceder cuantas veces sea necesario a los temas que necesita estudiar para desarrollar las tareas propuestas. La innegable mejoría que adquieren las representaciones gracias al color, el sonido y el movimiento, se consideran importantes en el desarrollo de un concepto. Esta tendencia es la base de la educación virtual y a distancia.

c) **Las tendencias que buscan que la incorporación de las TIC en el aula se realicen a partir de criterios psicopedagógicos**: los didactas trabajan en la creación de crear ambientes de aprendizaje, de tal manera que permitan al estudiante trabajar con los contenidos que han sido habilitados para su acceso virtual, a la vez que aprovecha el espacio de la clase para socializar y validar con otros estudiantes los aprendizajes adquiridos, lo que permite alcanzar desarrollos desde la perspectiva socio-constructivista. A esto se le denomina "aprendizaje híbrido".

Las posturas de los autores referenciados en este apartado ofrecen un panorama claro respecto al paradigma educativo en torno al aprendizaje virtual. En este sentido, es importante aclarar que no se trata que el docente ponga a disposición de sus estudiantes equipos de cómputo para que estos últimos realicen sus tareas; de aquí que el verdadero reto es para el docente, quien debe actualizarse a para sumergirse en una realidad que

representa la cotidianidad para el joven estudiante. De acuerdo a lo anterior, es pertinente exponer las características que fundamentan la incorporación de las TIC desde la perspectiva de la educación virtual a través del aprendizaje híbrido como parte del desarrollo de esta tesis.

El aprendizaje híbrido o aprendizaje mixto (*blended learning*)

Un ambiente híbrido de aprendizaje es aquel donde se integran los entornos de aprendizaje presencial y virtual. De acuerdo a la investigación de Osorio (2011) el aprendizaje híbrido permite un continuo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que contribuye a que el estudiante desarrolle no sólo la autonomía a través de experiencias educativas asincrónicas, sino también el aprendizaje colaborativo en vivo y en diferido. En este sentido, Freeman, Adams, Cummins, Davis y Hall (2017) enmarcan a través del Reporte Horizonte, la importancia de las tendencias educativas que contribuyen al diseño de aprendizajes mixtos aprovechando los entornos digitales, ya sean móviles en vivo o en la nube. Por otro lado, estos autores sostienen que uno de los retos de la educación es potenciar la alfabetización digital a través de la adopción e incorporación de nueva tecnología en las tareas cotidianas del contexto escolar.

La revisión sistemática de la literatura respecto a la aplicación de las TIC en modelos educativos *blended learning* (González, Perdomo y Pascuas, 2017) concluye que no es suficiente con la integración de nueva tecnología en la educación, pues para que el aprendizaje sea significativo bajo la modalidad *blended*, es indispensable la adecuada

selección de los medios para cada necesidad educativa; lo anterior permite al estudiante desarrollar habilidades competitivas y pensamiento crítico para solucionar problemas.

Ahora bien, dentro de los modelos de aprendizaje mixto se destaca el modelo de rotación, el cual posee cuatro énfasis a) Rotación entre estaciones. b) Rotación de laboratorio. c) Aula invertida. d) rotación individual.

A continuación se ofrece una mirada más cercana al énfasis concerniente al aula invertida y sus particularidades, las cuales permiten enriquecer el trabajo que se desarrolla a través de esta tesis.

El modelo de aula invertida

El modelo de Aula Invertida, modelo inverso o *flipped classroom,* es método de educación basada en TIC bajo la modalidad de aprendizaje mixto o híbrido *(blended learning).* La implementación del modelo de aula invertida se remonta al año 2007, cuando los profesores Jonathan Bergmann y Aaron Sams utilizaron un *software* que hacía posible grabar y publicar las clases en internet para aquellos estudiantes que no podían acudir regularmente a clase.

El modelo de aula invertida transforma la clase magistral tradicional a través del uso de videos, presentaciones, aplicaciones, simulaciones, foros, blogs y lecturas, entre otras actividades mediadas por TIC, que ofrecen a los estudiantes la posibilidad de tener a su disposición las explicaciones que el profesor desarrolla en clase, por lo tanto, el docente utiliza la clase presencial para consolidar el aprendizaje adquirido por los estudiantes a

través de actividades donde éstos interactúan, comparan, profundizan y validan el conocimiento adquirido. En definitiva, esta mirada permite concebir al estudiante como centro del aprendizaje, y en consecuencia, el docente deja de ser el transmisor de conocimientos para asumir el rol de guía (Cuartero, 2016; Keengwe y Onchwari, 2016; Calvillo, 2014; Staker y Horn, 2012).

Por lo anterior, el modelo de aula invertida es considerado por sus creadores como un modelo de aprendizaje caracterizado por el rol activo que asume el estudiante (Tourón, Santiago y Díez, 2014; Bergmann y Sams, 2012), estos autores se fundamentan en la posición de Vigotski sobre el aprendizaje como una actividad social donde el estudiante es un sujeto activo, consciente y orientado hacia un objetivo, e interactúa con otros sujetos de su entorno y un objeto de estudio utilizando los medios que las condiciones socio-históricas le permiten.

Llegado a este punto y de acuerdo a lo expresado anteriormente, la incorporación de las TIC a este trabajo bajo el modelo de aula invertida, sustenta la posición pragmática que asume esta tesis, al generar espacios enmarcados en la realidad socio-cultural que conllevan al desarrollo de las potencialidades individuales de cada estudiante a través de su interacción con otros individuos (estudiantes, profesor, familia, entre otros).

Considerando la literatura existente respecto a las aplicaciones del modelo de aula invertida, es importante traer a colación el artículo de Vidal, Rivera, Nolla, Morales y Vialart (2016) donde se reseñan algunas publicaciones en español entre 2013 y 2015, las cuales contienen los hallazgos empíricos, el resultado de algunas experiencias significativas

y las teorías que apoyan la implementación del modelo de aula invertida; resaltando la manera en que este enfoque de educación mediada por TIC permite al estudiante incrementar su compromiso en la construcción de su propio aprendizaje.

En el mismo sentido, Calvillo (2014) en su tesis doctoral, hace una recopilación de la literatura existente en inglés donde se evidencia el uso de métodos y modelos similares al modelo de aula invertida, encontrando que estos se llevan a cabo desde 1982 y se aplican con éxito en cursos de pregrado y posgrado en diferentes universidades. El análisis subsecuente de esta información le permite concluir lo siguiente:

> "En definitiva y hecha la revisión de la literatura, el modelo FL[1] no es la panacea. Dependerá de cada caso, de cómo se implante el modelo y de cómo aprovechemos sus ventajas adaptándolas a nuestro contexto y a nuestras aulas de manera personalizada. Pero sí que podemos considerarlo como el puente que nos ayude a conseguir una mayor motivación en el alumnado, nos permita atender de manera más efectiva las necesidades individuales de cada estudiante, aumente su participación activa en clase, mejore su actitud hacia la enseñanza en general y su propio aprendizaje en particular, los haga más responsables y les de las competencias necesarias para su vida futura." (Calvillo, 2014, p.22)

Así mismo, Olvera, Gámez y Martínez (2014) realizan la recopilación de los resultados de 10 experiencias bajo el modelo de aula invertida aplicadas entre 2012 y 2014

[1] El autor al usar las siglas FL, se está refiriendo al *Flipped Learning* o aprendizaje invertido.

en diferentes partes del mundo. En resumen, los estudios reportan que la mejora en la adquisición de conocimiento al comparar el aula invertida y el aula tradicional, puede considerarse prácticamente similar; con una sutil ganancia a favor del aprendizaje mixto en el desarrollo de competencias informacionales y habilidades críticas del pensamiento.

Desde esa perspectiva, Colombia no ha sido ajena a la implementación de programas virtuales de educación, es más, los concibe desde la dimensión de inclusión social, favoreciendo a estudiantes de regiones apartadas, con limitaciones tecnológicas y en situación de discapacidad (Arboleda y Rama, 2013). Ejemplo de lo anterior es el programa Aula sin Fronteras que desarrolla el Ministerio de Educación Nacional en convenio con la Unión de Colegios Internacionales (UNCOLI), cuyo objetivo es el de aunar esfuerzos para mejorar la calidad de la educación de 55 establecimientos educativos del departamento de Chocó mediante la creación de secuencias didácticas acompañadas por video clips, recursos impresos para estudiantes y acompañamiento a los docentes a través de los Cursos Abiertos Masivos en Línea bajo modalidad de aula invertida o *flipped classroom.*

El Ministerio de Educación Nacional no pasa por alto esta realidad y visualiza su potencialidad en la vía del desarrollo de competencias.

> "La educación contemporánea ha pasado de centrarse en los contenidos para lograr el desarrollo de competencias. Los programas o cursos virtuales no están exentos de esa dirección. Esto requiere de una buena dosis de imaginación, de innovaciones y estrategias que permitan ese desarrollo en ambientes construidos en el ciberespacio. Laboratorios virtuales, simuladores y demás herramientas pertinentes deben

acompañar la actividad puramente intelectual. Definir con precisión las competencias que se pueden alcanzar en estos ambientes es la base de su éxito." (MEN, 2010, p.43).

La dinámica educativa a través del método de aula invertida inicia cuando el docente coloca a disposición de sus estudiantes, el material audiovisual acorde con los conceptos de una unidad didáctica específica. El formato de este material presenta una amplia variedad, entre las que se destacan: videos alojados en la red, videos de elaboración propia, *podcast*, entre otros; cuya duración recomendada debe ser en promedio 10 minutos.

Al respecto, Internet ofrece variedad de plataformas que contienen material educativo en estos formatos: *YouTube*, *Khan Academy*, RedEduca, Campus Mundo Primaria, *Coursera*, *Open Culture*, entre otros. Así, los estudiantes acceden a los contenidos en casa mientras que las tareas las realizan en clase; de ahí que se "invierte" el método que se lleva a cabo bajo la clase tradicional.

El núcleo de la aplicación exitosa del aula invertida radica en la previa interpretación por parte del profesor, de la competencia que debe desarrollar el estudiante. Teniendo esto en cuenta, el profesor puede clasificar el material más adecuado con los objetivos trazados, ya sean para la instrucción, la consulta o la experimentación. Lo anterior requiere que el enfoque educativo este más centrado en el aprendizaje que en la enseñanza, lo que implica al docente la planeación de tareas que estimulen los procesos que llevan a cabo el desarrollo de competencias (Bergman y Sams, 2012).

De acuerdo a Bergman y Sams (2012) dentro de las ventajas del método de aula invertida se destacan las siguientes:

- **Permite al estudiante tener un mayor control sobre aquello que aprende**: Esto se debe a la interacción del estudiante con el medio didáctico que el profesor coloca a su alcance. En el caso de un video tutorial, el estudiante tiene la posibilidad de pausar y retroceder cuántas veces lo considere necesario para retomar alguna idea que le permita conectar unos conocimientos con otros.
- **Contribuye a educar a los padres del siglo XXI**: Los padres de familia pueden contribuir con el proceso de aprendizaje de sus hijos en la medida que aprenden junto a ellos. Las actividades virtuales desbordan los espacios físicos de la escuela permitiendo que esta adquiera un carácter ubicuo.

- **Cubre la ausencia de estudiantes o profesores**: Este punto se considera de gran valía en el contexto de esta tesis. En líneas anteriores se establece como en la educación pública existen factores que contribuyen a la disminución de tiempo efectivo de clase, y las consecuencias de estás dinámicas en el procesos de enseñanza y aprendizaje. Entonces en el modelo de aula invertida esta contingencia se puede subsanar en la medida que el profesor pueda grabar un vídeo explicando una lección a la vez que asigna una actividad. Por otro lado, cuando un estudiante no pueda asistir a clase puede acceder al material audiovisual para no perder el hilo de su formación, de manera que puede volver a ese contenido y repasarlo o hacer los deberes en casa sin necesidad que un compañero le lleve las tareas.

- **Incrementa el aprendizaje colaborativo**: El aprendizaje en línea le permite al estudiante la posibilidad de invocar múltiples voces para afianzar el conocimiento. Esto se distancia mucho de la clase donde todos los estudiantes poseen el mismo libro para aprender; ahora, el abanico de posibilidades fomenta un aprendizaje mucho más social y colaborativo en tiempo real a través del uso de herramientas como las redes sociales (Blogger, Facebook, WhatsApp, entre otros). Este enriquecimiento cultural permite la interacción de los alumnos en el aula, cosa que antes no ocurría a través de las charlas de los profesores en una clase tradicional.

Las ventajas expuestas, en especial aquella donde el estudiantes explora el conocimiento en casa mientras que utiliza el espacio de la clase para la deliberación y elaboración de tareas se respalda en la Taxonomía de Bloom, ya que el modelo de aula invertida permite la apertura de espacios presenciales y virtuales para desarrollar procesos de alto nivel como: aplicar, analizar, evaluar y crear (Martínez et al., 2014).

Taxonomía de Bloom para la era digital

De acuerdo al portal Eduteka, la taxonomía de Bloom fue diseñada por Benjamin Bloom en 1956. Inicialmente esta metodología se apoyaría en tres áreas principales:

- Cognitiva: consiste en la habilidad de procesar y utilizar información.

- Afectiva: el papel que juegan los sentimientos, emociones y actitudes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Psicomotora: la capacidad para usar habilidades físicas.

Esta metodología consta de una serie de niveles construidos con el propósito de que el alumno adquiera conocimiento que perdure durante toda la vida. Su objetivo principal es permitir al estudiante el desarrollo de habilidades que les permitan utilizar el conocimiento adquirido como una herramienta para resolver problemas y finalmente incluso crear su propio conocimiento.

El tiempo y los cambios tecnológicos que permean todos los niveles del conocimiento han contribuido a que la Taxonomía de Bloom sea revisada, mejorada y adaptada a las necesidades del contexto. En este sentido, Churches (2009) realizó un aporte importante que permitió colocar la Taxonomía de Bloom a tono con las nuevas realidades de la era digital, complementando cada categoría con verbos y herramientas acordes a los recursos tecnológicos de punta, de tal manera que posibiliten el desarrollo de habilidades para superar gradualmente lo siguientes niveles: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear; cuyos aspectos resumiré a continuación.

1. **Recordar**: En este nivel se encierran los conocimientos que el estudiante ya posee aunque no los tenga presentes en el momento. Siendo así, sólo basta proporcionar al estudiante contenido suficiente para que pueda recordar aspectos relacionados con fechas, procesos, esquemas, entre otros. Los verbos utilizados con frecuencia en este nivel son: reconocer, describir, identificar, nombrar, localizar, etc.

Actividades digitales para recordar: realizar búsquedas en Google, utilizar el procesador de texto para reproducir, enviar un correo electrónico, llenar los espacios en blanco de un cuestionario.

2. **Comprender**: Al relacionar conocimientos el estudiante construye significado, lo cual quiere decir que en este nivel el alumno debe aprehender el contenido, generalizarlo y relacionarlo entre sí. Los verbos empleados son: interpretar, resumir, parafrasear, clasificar, comparar, explicar, ejemplificar, etc.

Actividades digitales para comprender: publicar en la Web, recolectar información de blogs y páginas Web, hacer comentarios en un blog.

3. **Aplicar**: En este nivel el estudiante entra en acción para adquirir conocimiento a través de actividades. Los verbos más adecuados para este nivel son: implementar, usar, ejecutar, etc.

Actividades digitales para aplicar: utiliza applets para simular experimentos, entrevistar, colaborar a través de herramientas virtuales tipo Skype, desarrollar de manera compartida un documento a través de Google Docs.

4. **Analizar**: En este nivel el estudiante debe descomponer un problema para analizarlo desde lo global a lo específico. Este ejercicio le permite encontrar nexos entre las partes para lograr expresar la relación entre las mismas. Los verbos usuales en este nivel son: comparar, organizar, deconstruir, atribuir, etc.

Actividades digitales para analizar: Participar en foros de discusión, elaborar encuestas y extraer resultados a partir de la información obtenida en la hoja de cálculo, validar a través de búsquedas en bases de datos, elaborar mapas de relaciones.

5. **Evaluar**: Llegar a este nivel implica que el estudiante puede emitir juicios de valor basados en la comprobación de procesos, materiales, métodos, contenidos, entre otros. Los verbos clave son: comprobar, realizar hipótesis, criticar, experimentar, juzgar, testear, detectar, etc.

> Actividades digitales para analizar: Participar en conferencias en línea, grabar sonido (podcasting), publicar en su propio blog, moderar un foro de discusión, trabajar en redes.

6. **Crear**: En este nivel el alumno debe tener las suficientes competencias y habilidades para manejar el conocimiento aprendido y crear uno nuevo a través de diferentes herramientas y mediante su propio saber hacer. Los verbos más empleados son: diseñar, construir, planificar, producir, inventar, hacer, etc.

> Actividades digitales para crear: Producir videos, programar, Construir y publicar en su propio blog, usar productos para medios, elaborar publicidad.

Modelos de integración TIC en el aula. Modelo TPACK

El modelo para la integración de tecnología en el aula desarrollado por Mishra y Koehler (2006) debe su nombre a sus siglas en inglés (*Technological Pedagogical Content Knowledge approach*). De acuerdo a los autores, este modelo coloca el foco en la intersección de tres tipos de conocimientos:

- **Conocimiento disciplinar**: este conocimiento se vincula con los contenidos a enseñar según cada disciplina e incluye las prácticas y enfoques que resultan en el desarrollo del conocimiento de una disciplina en particular.

- **Conocimiento pedagógico**: este conocimiento se vincula con las estrategias y formas de enseñar los contenidos a trabajar en clase de manera más eficiente. Si un docente tiene un profundo conocimiento disciplinar puede entender como los alumnos construyen su propio conocimiento y desarrollan habilidades que los predispone positivamente al aprendizaje.

- **Conocimiento tecnológico**: este conocimiento se vincula con las herramientas TIC que el docente seleccionará para trabajar en clase con sus alumnos. Estas herramientas están siempre siendo actualizadas lo que puede ser abrumador para el docente. Sin embargo existen formas de pensar y trabajar con la tecnología que se pueden aplicar a cualquier herramienta tecnológica.

De acuerdo a Koehler, Mishra y Cain (2015) para integrar la tecnología de manera eficiente, los docentes deben llevar a cabo los siguientes procedimientos:

- Establecer objetivos relativos al contenido (decisiones disciplinares)
- Seleccionar actividades y secuencias ajustadas a la enseñanza de dicho contenido (decisiones pedagógicas).

- Seleccionar tecnología apropiada que responda tanto a la actividad como al contenido disciplinar elegido (decisiones tecnológicas).

En síntesis, Coll (2009) sostiene que la enseñanza mediada por tecnología no tiene sentido si ésta se dirige a repetir acciones que pueden realizarse sin su uso o para hacer más divertido el aprendizaje. Por el contrario, la incorporación de la tecnología al proceso educativo debe enfocarse en enseñar de manera diferente para enriquecer una forma de aprendizaje que sería inconcebible sin TIC.

Modelo de sustitución, aumento, modificación y redefinición (SAMR)

El modelo de Sustitución, Aumento, Modificación, Redefinición (SAMR) desarrollado por Puentedura (2006), está conformado por cuatro niveles jerárquicos (sustitución, aumento, modificación y redefinición) y dos capas que describen el uso de herramientas tecnológicas (mejora y transformación) que permiten evaluar la forma en que las tecnologías son usadas por los docentes y estudiantes en las clases (Tabla 10).

La finalidad del modelo SAMR de acuerdo a su autor es "ayudar a los docentes a evaluar la forma en que están incorporando las tecnologías en sus aulas y de esta manera, conocer qué tipo de usos de la tecnología tienen un mayor o menor efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes" (citado en García, Figueroa y Esquivel, 2014, p.207).

Tabla 10. Un ejemplo de las etapas del modelo SAMR

		EL MODELO SAMR
Mejora	Sustitución	Es el nivel más bajo de uso de la tecnología. Se sustituye una herramienta por otra sin que exista un cambio metodológico, por ejemplo, en vez de usar la lápiz y papel para tomar apuntes, utiliza la computadora o una Tablet para hacer exactamente lo mismo.
	Aumento	La tecnología remplaza otra herramienta y le añade mejoras funcionales que facilitan la tarea, sin embargo, no hay un cambio en la metodología y el efecto en los resultados de aprendizaje de los estudiantes puede ser mínimo o nulo. Por ejemplo, pasar de las presentaciones a través de carteleras a una presentación en PowerPoint.
Transformación	Modificación	Implica un cambio metodológico en el cual la tarea a realizar es rediseñada por la introducción de la tecnología. Por ejemplo, pasar de una presentación en PowerPoint a una presentación en video donde se evidencie la edición del mismo.
	Redefinición	En este último nivel se crean nuevas actividades y ambientes de aprendizaje que, sin el uso de la tecnología disponible serían imposibles. Por ejemplo, pasar de tomar apuntes personales a la creación de redes de colaboración y debate en tiempo real fuera de la escuela para dar solución a un problema, a través del uso de las redes sociales o herramientas como WhatsApp o Skype o Blogger.

Elaboración propia.

De acuerdo a Puentedura (2006) la transición entre un nivel y otro requiere planeación para la incorporación de tecnología, de manera que esta no sea subutilizada en el proceso y contribuyan con el aprendizaje. Para ello, el autor recomienda una serie de preguntas que constituyen una guía para salvar el nivel en el que se está. Dichas interrogantes se agrupan en la tabla 11.

Tabla 11. Transición de niveles en el modelo SAMR

Sustitución a Aumento
• ¿He agregado una característica al proceso de tarea que no podría hacerse con la tecnología anterior en un nivel fundamental? • ¿Cómo ésta característica contribuye a mi diseño?
Aumento a Modificación
• ¿Cómo es modificada la tarea original? • ¿Ésta modificación depende de la nueva tecnología? • ¿Cómo ésta modificación contribuye a mi diseño?
Modificación a Redefinición
• ¿Cuál es la nueva tarea? • ¿Reemplazará o complementará a las tareas anteriores? • ¿Es posible sólo gracias a la nueva tecnología? • ¿Cómo contribuye a mi diseño?

Elaboración propia. Adaptado de Puentedura (2006).

En resumen, dado que la tecnología crece en sofisticación y la interconexión se hace posible gracias a Internet, emergen transformaciones al enfoque de la escuela tradicional a través de la educación de carácter virtual. Prensky (2001) afirma que los estudiantes de hoy han crecido con la tecnología digital, y ese hecho cambia fundamentalmente la manera en que piensan y procesan la información. Lo anterior permite distinguir un nuevo paradigma educativo que empodera al ser humano en la gestión del conocimiento realizada en medios virtuales de aprendizaje (García, 2015).

Llegado a este punto, es posible concebir una conexión entre la educación hibrida y el desarrollo de competencias. Por consiguiente, esta tesis se adhiere a este enfoque educativo del modelo de aula invertida para integrarlo a una situación didáctica que permita

el desarrollo de competencias en la representación de la función derivada. Esto nos lleva al siguiente nivel en la estructura que sustenta este trabajo, por lo tanto, debo plantear si la relación entre docente y estudiante a través de un medio didáctico de carácter híbrido cumple con los atributos de una situación didáctica que contribuya a la consecución de los objetivos planteados en esta tesis.

La teoría de situaciones didácticas (T.D.S)

La Teoría de Situaciones Didácticas está sustentada en una concepción constructivista -en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (2007) de esta manera:

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (p.30)

El enfoque tradicional de enseñanza se caracteriza por la relación unidireccional entre un docente y su estudiante. El primero brinda conocimientos, dicta la clase, lo sabe todo y concluye; mientras que el segundo se limita a escuchar, recibe información, no contrasta, no contextualiza, no delibera sobre lo que aprende y reproduce al pie de la letra.

En contraste, el enfoque de situaciones didácticas planteado por Brousseau (2007) permite evidenciar la intervención de tres elementos que se interrelacionan: Estudiante,

profesor y medio didáctico; en este orden de ideas, el estudiante construye su conocimiento a través del medio que le facilita el profesor, lo cual da origen a las siguientes situaciones:

- **Situación A- didáctica:** En esta situación el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas. En otras palabras, el estudiante se verá resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente con el propósito de institucionalizar el saber adquirido.

- **Situación Didáctica:** Esta perspectiva permite la interacción entre los sujetos de la situación didáctica a través del medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento; a partir de las estrategias utilizadas por el estudiante para afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente.

Desde la perspectiva de Brousseau existen cuatro tipologías de situación didáctica:

1. **Situación de acción:** Aquí, el estudiante interactúa con el medio didáctico para adquirir conocimientos que le permitan desarrollar un saber que le permita resolver problemas. Esta situación será exitosa si el problema propuesto por el docente está contextualizado y representa interés para el estudiante. La intencionalidad del docente es permitir el trabajo autónomo del estudiante; esto no quiere decir que no pueda intervenir, al contrario, puede interactuar con el estudiante en el medio didáctico propuesto.

2. **Situación de formulación**: En este punto, el estudiante comparte y pone a prueba sus conocimientos. La comunicación en esta situación es vital, pues la idea es que los estudiantes interactúen con el medio didáctico y construyan paulatinamente nuevo conocimiento.

3. **Situación de validación:** En esta instancia, una vez que los estudiantes han interactuado entre sí, validan el producto de este proceso con el profesor para saber si el resultado al que han llegado es correcto.

4. **Situación de Institucionalización**: Otro concepto importante corresponde a la situación de institucionalización, el cual representa el cierre de una situación didáctica. El docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, a través de una síntesis o generalización de las actividades y producciones de los estudiantes, estableciendo así los objetos de saber oficiales.

En síntesis, una situación didáctica requiere que la relación entre el docente y el estudiante sea enriquecida con un medio didáctico suministrado por el profesor. En este orden de ideas, surge una terna cuya dinámica posibilita el aprendizaje en el estudiante, para ello, el medio suministrado por el profesor y las actividades planeadas en torno a este deben ser preparadas con la intencionalidad de permitir al estudiante encontrarse consigo mismo frente a una situación problema que debe resolver utilizando todos los recursos a su alcance (situación de acción).

Pero esto sólo es el principio, pues ¿Cómo sabe el estudiante que el problema que aborda está correctamente resuelto? En este sentido, el estudiante comparte los resultados obtenidos y expone la manera en que llegó a estos (situación de formulación), el recurrir a la experiencia de otras personas que han enfrentado esa situación para consensuar los resultados obtenidos coloca a un grupo en una situación de validación del conocimiento adquirido.

El momento de cierre de la situación didáctica muestra al docente retomando las ideas de los estudiantes (incluso aquellas que llevan a error) para formalizar el conocimiento adquirido, es decir, brindarle un carácter de legitimidad a los procesos y conocimientos puestos en escena que permitieron resolver la situación propuesta.

Los aspectos propuestos por Brousseau son abordados en esta tesis a partir de un medio didáctico novedoso para el estudiante de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero, esto es, un medio virtual de aprendizaje. A partir del modelo de aula invertida, las herramientas creadas por el profesor que enriquecen este ambiente de aprendizaje y las plataformas que constituyen las redes sociales; los estudiantes se ven inmersos en situaciones de acción, formulación y validación, proceso que es acompañado por el docente de manera permanente para luego dar lugar a la institucionalización. Los detalles de este proceso están presentes en páginas posteriores de esta tesis, con el fin de dar continuidad a lo concerniente a la aplicación de la situación didáctica.

Contextualización

A través del decreto No. 0263 de marzo 8 de 1965, la escuela del barrio Cristóbal Colón de la ciudad de Santiago de Cali, recibe su nombre oficial en honor a Joaquín de Cayzedo y Cuero, prócer ilustre y mártir de la independencia cuyo monumento se erige en la plaza mayor de la capital del Valle del Cauca. La Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero, a la cual me referiré en algunas ocasiones por su acrónimo I.E JOCAYCU, como se le conoce cariñosamente, se ubica en la comuna 10 y cuenta con cuatro sedes: Camilo Torres, San Roque, General Carlos Albán y la sede Central. En la actualidad, 52 años después de su fundación, la I.E JOCAYCU ofrece bachillerato en tres jornadas: mañana, tarde y nocturna por ciclos; además, brinda a los estudiantes que cursan educación media la posibilidad de adelantar estudios técnicos en gestión ambiental o en gestión empresarial, esto gracias al convenio educativo pactado con el SENA.

Quizá el aspecto más representativo de la I.E JOCAYCU lo constituye su grupo de danzas, el cual es liderado por el licenciado Joaquín Labrada. Este conjunto artístico es conformado por estudiantes de la institución y egresados, quienes han tenido el privilegio de presentar a Colombia en eventos culturales a nivel regional, nacional e internacional.

También es oportuno resaltar que son igualmente significativos los logros deportivos que a nivel local y nacional alcanzan nuestros estudiantes representando a sus diferentes ligas en disciplinas como atletismo, bicicross, beisbol, halterofilia, judo, taekwondo y patinaje. Los estudiantes que participan en los eventos culturales y deportivos

ven frecuentemente interrumpida su actividad académica, teniendo que cumplir con sus deberes tras culminar sus giras y reincorporarse a la normalidad escolar.

Cabe añadir que, existen factores que afectan a la totalidad del estudiantado y contribuyen a que las actividades escolares no se lleven a cabo con regularidad en la Institución; por un lado, los pormenores de carácter interno: entrega de boletines, análisis de casos, comités de evaluación y promoción, semana cultural, feria empresarial, entre otras. Por otro lado, están las circunstancias externas tales como: los paros de maestros, las reuniones sindicales y las movilizaciones del magisterio.

Este aparte genera inquietudes respecto a la manera en que los estudiantes logran colocarse al día en temáticas que desconocen, más aún, cómo adquieren las competencias que son indispensables para afrontar, tanto las pruebas de carácter interno y externo, como los estudios superiores.

Ahora bien; debido a que el desarrollo de esta tesis se realiza con estudiantes de undécimo grado; la caracterización que hago de la I.E JOCAYCU se enfatiza en la jornada de la mañana de la sede central, la cual atiende regularmente a la población estudiantil de grados noveno a undécimo, por lo tanto, suele contar con un promedio de 400 estudiantes y 18 docentes. Por el momento, y conforme a su planta física, la sede central cuenta con 13 salones distribuidos en dos plantas; además posee un amplio patio central donde los estudiantes realizan el recreo y desarrollan variadas actividades culturales.

Dentro de este contexto, el advenimiento de las TIC da impulso al proyecto de conformación de aulas especializadas, es así como se da apertura a las aulas de audiovisuales, matemáticas, filosofía, sistemas y bilingüismo, las cuales cuentan con video beam, aire acondicionado y computador de escritorio. A su vez, la participación de algunos docentes en los programas impulsados por el Ministerio de Educación permite la llegada de 40 equipos portátiles y tres unidades de carga y almacenamiento (UCA) con igual número de *tablets*. Los equipos portátiles se ubican en un aula debidamente acondicionada, y bautizada por los estudiantes como "sala alas", a la cual acceden los docentes que diligencian el cronograma para reservar dicho espacio. Cabe resaltar que cada curso posee un promedio de 35 estudiantes, por ello, la sala alas a diferencia de la sala de sistemas, brinda la posibilidad de ofrecer un computador por estudiante; sin embargo, la distribución de los computadores en la sala alas impide a los estudiantes una visual permanente del docente y del telón donde se proyecta el videobeam, generándoles dificultades en cuanto a la interpretación y ejecución de instrucciones.

Es importante destacar lo paradójico del aspecto tecnológico que acabo de describir. Por un lado la Institución posee equipos de cómputo suficientes para llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje uno a uno. Sin embargo, el espacio donde estos equipos se encuentran instalados no es idóneo para adelantar una actividad educativa eficiente. En consecuencia, son las *tablets* los instrumentos más adecuados para adelantar actividades dentro de los salones de clase, pero estas adquieren carácter de obsolescencia cuando se conoce que la Institución Educativa carece del servicio de señal inalámbrica (*Wi-Fi).*

Sujetos

De acuerdo con Tenti (2010) prácticamente todo aquello que sucede en la sociedad se siente al interior de la escuela como producto de las interacciones e influencias recíprocas entre la educación escolar y otros espacios sociales significativos. Es por ello que una institución educativa debe tener en cuenta el contexto que interviene para sacar provecho de los recursos disponibles, adecuando la oferta educativa a las condiciones sociales y culturales de sus estudiantes.

En líneas anteriores se ofrece una descripción general de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero a través de su contextualización, dejando entrever algunas de sus virtudes y problemáticas. Ahora me enfoco en los estudiantes que hacen parte de la investigación, acerca de quienes ofrezco algunas características sociodemográficas obtenidas a través de un formulario electrónico elaborado con la herramienta *Google forms*.

Los sujetos de la investigación lo conforman 13 estudiantes entre 33 que integran el grado 11-4, pertenecientes a la modalidad de ciencias con énfasis en gestión ambiental. En cuanto al género de estos estudiantes, este se distribuye de una manera equilibrada pues el 54% son hombres y el 46% son mujeres, cuyas edades promedio corresponden a 16 y 17 años respectivamente.

Referente al tipo de vivienda, el 64% de los estudiantes viven en una casa, mientras que el 36% habitan un apartamento. Ahora bien, en el 57 % de los casos, estas familias

poseen vivienda propia, el 36% paga arrendamiento y el 7% restante habita en una vivienda familiar donde no pagan arrendo pero comparten los gastos.

El estrato en el cual se ubican estas viviendas se resume en la tabla 12.

Tabla 12. Estrato donde se ubica la vivienda de los estudiantes.

Estrato	1	2	3	4	5	6
Porcentaje	7%	7%	72%	14%	0%	0%

La tabla 13 evidencia que el 38 % de los estudiantes que hacen parte de la investigación pertenecen a la comuna 10 del municipio de Santiago de Cali y se concentran en los barrios Santa Elena y Cristóbal Colón, éste último donde se encuentra la sede central de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

Tabla 13. Distribución del porcentaje de estudiantes de acuerdo a la comuna que habita.

Comuna	5	9	10	11	16	17	18
Porcentaje	15%	15%	38%	8%	8%	8%	8%

En lo referente a la permanencia del estudiante en la Institución, sólo el 21% de los estudiantes ha estudiado ininterrumpidamente desde grado primero. Por otro lado, el 57% de estos tiene al menos un familiar que se ha graduado en la I.E JOCAYCU.

La tabla 14 presenta el nivel de estudios de los padres de familia de quienes participan en la investigación, éste se encuentra distribuido de la siguiente manera:

Tabla 14. Nivel de estudios de los padres de familia

	Únicamente Estudios primarios	Obtuvieron sólo grado bachiller	Culminaron pregrado universitario	Culminaron una especialización
PADRE	7%	43%	43%	7%
MADRE	7%	57%	29%	7%

Es pertinente añadir que dentro de los aspectos más importantes para escogencia de este grupo en particular se encuentran: a) el perfil de los estudiantes que cursan la modalidad de ciencias. B) la intensidad horaria asignada para las matemáticas, en este caso, cuatro horas semanales de cálculo, una hora más que la asignada a los cursos de la especialidad comercial.

En lo concerniente al perfil de los estudiantes de la modalidad de ciencias, el plan de área de ciencias naturales de la I.E JOCAYCU contempla que éstos deben cumplir con las siguientes características:

•Ser seres humanos autónomos que valoren la importancia de expresar afecto hacia los demás miembros de la comunidad mediante un proceso de autorregulación.

•Ser seres humanos que respeten y valoren el medio ambiente, siendo capaces de aplicar lo aprendido en ciencias naturales para conservar y mejorar su entorno.

•Ser personas que cuenten con las herramientas fundamentales de la metodología científica, lo que les permite abordar situaciones problema en contexto, de manera que sean capaces de dar explicaciones desde el ámbito científico con una posición ética y moral.

•Ser seres humanos con perfil de liderazgo, permitiéndoles abordar de manera óptima diferentes retos en circunstancias donde el trabajo en grupo y la concertación sean indispensables.

•Ser personas capaces de identificar factores de riesgos asociados con el deterioro ambiental con la habilidad de plasmar, elaborar, ejecutar y evaluar planes de acción para la solución de la problemática ambiental.

•Ser educandos con capacidad de proponer estrategias que promuevan la conservación y restauración del medio ambiente, aplicando herramientas teórico prácticas actualizadas.

•Ser individuos poseedores de carácter investigativo y un amplio conocimiento de las soluciones que requiere el planeta para el sostenimiento de sus recursos naturales.

Efectivamente, las características enumeradas permiten distinguir en los estudiantes de la modalidad en ciencias, aspectos tales como: la capacidad para abordar problemáticas del contexto y aplicar lo aprendido, la aptitud para el trabajo en grupo y la concertación; y finalmente, el manejo de herramientas teórico prácticas actualizadas, las cuales son pertinentes en del desarrollo de las actividades que se desarrollan en el entorno de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

Contexto tecnológico de los sujetos

Es importante tener en cuenta para el desarrollo de esta tesis, la información respecto a los gustos, preferencias y expectativas de los sujetos del estudio con respecto a los recursos tecnológicos dentro y fuera de la escuela. En este sentido, se elaboró una encuesta virtual a través de un formulario de Google, cuyos resultados sintetizo a continuación.

El 92% de los estudiantes que participan en el experimento posee un teléfono inteligente (*Smartphone*) y sólo el 15% posee plan de datos. Por otro lado, la totalidad de los estudiantes manifiestan poseer un dispositivo de cómputo en casa, cuya referencia se distribuye en la tabla 15:

Tabla 15. Equipos TIC que poseen los estudiantes.

Computador portatil	77%
Computador de escritorio	46%
tablet	31%

Esta cercanía con la tecnología les ofrece a los estudiantes la posibilidad de acceder a las redes sociales. Las preferencias de los alumnos respecto a esta posibilidad se resume como muestra la tabla 16.

Tabla 16. Redes sociales que manejan los estudiantes.

FACEBOOK	100%
INSTAGRAM	100%
BLOGGER	100%
WHATSAPP	100%
YOUTUBE	54%
TWITTER	38%
PINTEREST	15%
GOOGLE +	38%
SOUNDCLOUD	15%

Un enfoque del uso de la tecnología en el aspecto educativo permite conocer que el 38% de los estudiantes usa el teléfono celular durante las clases, mientras que el 62% afirma que no lo usa porque no es pertinente dentro del desarrollo de esta. En concordancia con lo anterior, la población que hace uso de este recurso tecnológico en clase afirma que lo hace cuando debe hacer uso de la calculadora o para buscar información referente al tema que están viendo.

Por otro lado, cuando los estudiantes que hacen parte del experimento no comprenden alguna explicación que el profesor brinda durante la clase, el 92% afirma que acude a video tutoriales como material de apoyo. Más aún, todos los estudiantes sostienen que en algún momento hicieron uso de videotutoriales para aprender a configurar su celular o instalar aplicaciones en el mismo.

En cuanto a la creación de material audiovisual en formato de tutorial, sólo uno de los estudiantes afirma haberlo hecho con el fin de explicar a sus compañeros como inscribirse en la plataforma del SENA.

En la tabla 17 aparece la predilección de los estudiantes en cuanto a la materia sobre la cual les gustaría poder repasar en casa a través de medios audiovisuales:

Tabla 17. Materias que los estudiantes repararían con videotutoriales.

Filosofía	8%
Matemáticas	62%
Inglés	23%
Literatura	8%

Por último, se le pidió a los estudiantes calificar entre 1 (más bajo) a 5 (más alto) su desempeño en el aprendizaje autónomo. La tabla 18 resume las respuestas del grupo de estudio.

Tabla 18. Nivel de aprendizaje autónomo de los estudiantes.

Si se trata de aprender cosas por tu cuenta a través de internet ¿Cómo calificas tu desempeño en el aprendizaje autónomo?	
1	0%
2	8%
3	31%
4	54%
5	8%

Llegado a este punto, es importante tener en cuenta como se escogerán los sujetos de investigación y la manera en que se trabajará con ellos. En este sentido, es pertinente aclarar que los padres de familia de grado 11-4 recibirán un consentimiento informado por parte de la Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero, donde se les explicará detalladamente la importancia y los pormenores de las actividades que adelantarán con sus hijos durante 45 días como parte de una investigación en educación, específicamente en el área de matemáticas. Una vez obtenido el visto bueno de los padres de familia, se procederá a llevar a cabo las actividades con el grupo de estudiantes, las cuales tendrán componentes

de carácter presencial y virtual. Cabe añadir que, los resultados que arroje esta investigación provendrán de aquellos estudiantes que cumplan con todas las actividades propuestas durante el tiempo estipulado.

Metodología

La metodología en la cual se sustenta este trabajo es de tipo no experimental, en cuanto no existe interés por la manipulación de variables ni necesidad del uso de grupos de control. Por otra parte, los resultados se evidenciarán en la medida que se recopile información no numérica durante el desarrollo del trabajo; al respecto, Taylor, Bogdan y Piatigorsky (1998) afirman que la parte cualitativa "recoge las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (p.20).

Diseño de investigación

El diseño de investigación que aborda este trabajo es de carácter descriptivo con enfoque cualitativo en el cual se toman datos en distintos momentos. Este tipo de diseño es útil porque permite el primer acercamiento a una problemática, en todo caso, no se trata de un acercamiento único ni definitivo para abordar la situación; pero abren el camino para acercarse a la teoría e iniciar estudios de mayor profundidad. Cabe añadir que este tipo de diseño es importante en situaciones donde no se puede llevar un control de las variables del contexto ni las características de los sujetos con los cuales se trabaja, como la historia, la maduración, la personalidad u otros factores que no son posibles de controlarlos a través de las técnicas de grupos de control (Salas, 2013; Toro y Parra, 2006).

De acuerdo a los objetivos planteados en este trabajo, la unidad de análisis corresponde a los estudiantes de grado 11-4 de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero. Para delimitar la población se tomará una muestra no probabilística o dirigida de voluntarios, en

la medida que los participantes deben contar con el consentimiento de sus padres de familia (Hurtado y Toro, 2005). A propósito de este método de muestreo, se deben definir los criterios específicos de inclusión y exclusión de los elementos que conforman la muestra (Icart, Fuentelsaz y Pulpón, 2006).

Tamaño de la muestra:

Corresponde a 13 estudiantes de grado 11-4 de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

Criterios de inclusión: Hombres y mujeres que cumplan con los siguientes requisitos:

Ser estudiantes debidamente matriculados en undécimo grado.

En caso de que los estudiantes sean menores de edad, estos deberán contar con el consentimiento de sus padres de familia para hacer parte del proceso.

Criterios de exclusión:

Se considera un criterio de exclusión, la negativa de consentimiento por parte del padre de familia o acudiente del estudiante o del estudiante mismo, para que éste participe de la actividad.

Diseño de la situación didáctica

A continuación describiré de manera general el diseño de la situación didáctica y las circunstancias que rodearon su implementación. Más adelante detallaré los aspectos concernientes a su estructura y cómo esta guarda relación con el marco teórico que soporta esta tesis.

En líneas anteriores hago referencia tanto a las dinámicas de la educación pública en Colombia (movilizaciones, paros, reuniones sindicales, etc.) como a aquellas situaciones propias de las Instituciones Educativas (reuniones de profesores, entrega de boletines, convocatorias de la secretaría de educación, etc.) que generan jornadas escolares irregulares cuyas consecuencias se reflejan en el aprendizaje de los estudiantes.

La reducción de tiempo efectivo de clase implica que los temas que aparecen planteados para ser tratados al final del año escolar se aborden de manera superficial. Lo anterior me llevó a seleccionar una de las temáticas usualmente damnificadas por las situaciones descritas, en este caso, la función derivada.

Con esto en mente, di inicio a una búsqueda bibliográfica para actualizar mis conocimientos respecto a las didácticas acordes al contexto tecnológico, de tal manera que sus particularidades le permitiesen ser adaptadas a las circunstancias mencionadas. Esta exploración rápidamente brindó frutos, pues distinguí el auge las modalidades de educación virtual como propuestas emergentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre ellas el *blended learning* o aprendizaje mixto.

A su vez, emprendí una investigación enfocada en los aspectos de la función derivada que habitualmente son poco comprensibles para los estudiantes, encontrando que la enseñanza de la función derivada, tanto en la secundaria como en la universidad, se concentra en su aspecto algebraico, dejando de lado los registros de representación semiótica que permiten conectarla con conocimientos previos y posteriores.

Teniendo en cuenta lo anterior, decidí que era pertinente para el contexto de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero, el diseño de una situación didáctica bajo la modalidad de aprendizaje mixto o *blended learning* enfocada en el aprendizaje de la función derivada a partir de sus registros de representación semiótica. Para ello emprendí la elaboración de cuatro videos a manera de tutorial en los que incorporaría el uso del programa informático GeoGebra.

Las actividades propuestas a los estudiantes constan de cinco sesiones bajo un submodelo del aprendizaje mixto denominado *aula invertida*, de esta forma los alumnos pueden visualizar los videos en casa. Adjunto a cada video hay una tarea que el estudiante puede resolver con el apoyo de la información que contiene le material audiovisual. Por otro lado, la actividad presencial que complementa el aprendizaje mixto permite el debate, la validación del conocimiento y su posterior institucionalización.

Justo después de socializar con el grado 11-4 el proyecto que se llevaría a cabo en el contexto de esta tesis, surgió un nuevo paro del magisterio colombiano que se extendió desde el 11 de mayo hasta el 16 de junio de 2017. Con los medios disponibles y las actividades preparadas para llevar acabo la situación didáctica, se aprovechó esta circunstancia para dar inicio al plan trazado inicialmente.

Las actividades dan inicio con una prueba diagnóstica usando la plataforma Socrative, luego se procede a la primera actividad de aula invertida a partir de un problema contextualizado alrededor de las cámaras de fotodetección o fotomultas. Hasta aquí todo

marcharía bien, pero el cese de actividades se extendía y la actividad presencial no se llevaba a cabo; por ende me vi obligado a modificar el escenario.

Los videos que habría de compartir con los estudiantes a través de la plataforma YouTube se incorporaron a la plataforma EDPuzzle, lo que permitió incluir en estos una serie de preguntas y respuestas que llevarían al estudiante a reflexionar sobre lo que aprende. Además, se aprovechó la red social Blogger para que los estudiantes publiquen el resultado de sus tareas, de manera que otros estudiantes puedan realizar comentarios que les permitan un aprendizaje de tipo colaborativo a través de la reflexión.

Luego de 35 días de paro nacional del magisterio los estudiantes y docentes regresamos a las aulas, periodo que duraría dos semanas hasta el inicio de las vacaciones de mitad de año cuya duración se estipularía por tres semanas.

Durante este corto tiempo de vuelta a clase, los espacios compartidos con el grado 11-4 se utilizaron para realizar actividades de tipo grupal en torno a las razones de cambio promedio. Los estudiantes participantes en las actividades bajo el modelo de aula invertida fueron distribuidos entre los grupos de trabajo para permitirles compartir con sus compañeros los conocimientos adquiridos, sin que esto significase que desarrollaran por si solos las actividades propuestas.

La actividad de cierre del ejercicio de aprendizaje mixto consistió en aplicar la misma prueba que se utilizó en el diagnóstico, evento que se llevó a cabo de manera virtual utilizando la plataforma Socrative.

Desde la perspectiva teórica, el diseño de la situación didáctica inicia con las tasas de cambio promedio e instantánea hasta culminar con la función derivada; esto como parte de la segunda idea fuerte del cálculo expuesta por Vasco (2010). Este proceso se centra en el registro de representaciones semióticas propuesto por Duval (1999) y se lleva a cabo a través de la modalidad de aula invertida (Bergman y Sams, 2012) la cual integra un medio didáctico constituido por videos de elaboración propia cuya duración promedio de 8 minutos, los cuales se alojan en la plataforma YouTube.

Con el fin de generar comunicación entre los estudiantes, se le solicita a cada uno la creación de un blog personal donde consignarán la solución de las tareas asignadas. El propósito de esta petición es el de generar un espacio de deliberación y participación que promueva situaciones de acción, formulación y validación (Brousseau, 1986).

Los videos mencionados se integran con la plataforma EDPuzzle para enriquecerlo con preguntas y respuestas, de tal manera que el nivel de complejidad creciente de cada secuencia propicie procesos matemáticos que pongan en juego las capacidades de los estudiantes (Solar, 2009; García et al., 2015).

Ya que el modelo de aula invertida es de carácter mixto o *blended learning*, existe un espacio presencial de interacción donde se intercambian impresiones alrededor de la competencia *representar* en torno a la función derivada, posteriormente se cierra la situación didáctica a través de una situación de institucionalización (Brousseau, 1986).

Para brindar al lector una orientación respecto a los aspectos previos a la implementación de la situación didáctica de aula invertida para propiciar el desarrollo de la competencia representar, en torno a la derivada ; he elaborado las tablas 19 a 22 que detallan cada una de las fases de la situación didáctica.

Tabla 19. Fases de la situación didáctica.

Situación didáctica bajo el modelo de Aula Invertida para propiciar el desarrollo de la competencia representar en torno a la función derivada
FASE: Caracterización
OBJETIVO: Precisar los aspectos relevantes que propician el desarrollo de la competencia matemática de representación para la adecuada comprensión de la función derivada.
ACTIVIDAD: Para cumplir con este objetivo específico se llevaron a cabo las siguientes actividades: 1) Emprender una búsqueda bibliográfica enfocada en los aspectos más relevantes de la competencia matemática *representar* en torno a la función derivada. 2) Identificar en los Estándares de Competencias Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional con los demás pensamientos del orden matemático. 3) Aplicar una encuesta a los sujetos de investigación para recolectar información, tanto socio-demográfica como del orden tecnológico. 4) Diseñar una prueba diagnóstica que integre los elementos que propician el desarrollo de la competencia *representar* en torno a la función derivada. 5) Aplicar la prueba diagnóstica, recoger información a partir de los resultados obtenidos y analizarla a través de gráficos de barras

Elaboración propia.

Esta fase es muy importante, pues al integrar las TIC a la educación no basta con la sustitución de las herramientas para efectuar la misma actividad. En el caso de esta tesis, la implementación del modelo de aula invertida desborda la clase tradicional al poseer el atributo de la integración de variadas plataformas y paquetes informáticos enfocados en el proceso de aprendizaje del estudiante.

En otras palabras, es importante para el docente de matemáticas explore los fundamentos de aquello que desea que el estudiante aprenda, de otra manera, la incorporación de tecnología a la clase de matemáticas solo adquiere un carácter instrumental. Es decir, se atribuye la importancia de la metodología a la herramienta y no a lo que realmente es importante en el proceso educativo.

Tabla 20. Fases de la situación didáctica.

Situación didáctica bajo el modelo de Aula Invertida para propiciar el desarrollo de la competencia representar en torno a la función derivada
FASE: Diseño.
OBJETIVO: Diseñar una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida para favorecer el desarrollo de la competencia matemática de representación en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.
ACTIVIDAD: Para cumplir con este objetivo específico se llevaron a cabo las siguientes actividades: 1) Identificar en el contexto eventos de cambio y variación que sean de conocimiento general. 2) Elaborar las pautas de trabajo para los sujetos de investigación. 3) Diseñar una situación didáctica en torno al evento con mayor significado dentro de la cotidianidad. 4) Integrar las TIC a la situación didáctica propuesta de manera que pueda ser aplicada en un entorno de aprendizaje virtual. 5) Integrar variadas herramientas TIC en el contexto de las redes sociales y plataformas educativas para enriquecer la situación didáctica y lograr compartirla a través de Internet.

Elaboración propia.

Una vez claro el fundamento matemático de aquello que se desea que el estudiante aprenda, podemos dar paso al diseño de la situación didáctica. En el caso de la educación virtual, es imprescindible tener en cuenta que existen sinnúmero de herramientas que se pueden incorporar a la situación didáctica para enriquecerla. En este sentido, la virtualidad no debe ser asociada exclusivamente a enfocar una cámara hacia un tablero.

Tabla 21. Fase de implementación de la situación didáctica.

Situación didáctica bajo el modelo de Aula Invertida para propiciar el desarrollo de la competencia representar en torno a la función derivada
FASE: Implementación.
OBJETIVO: Implementar una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida para favorecer el desarrollo de la competencia matemática de representación en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.
ACTIVIDAD: Para cumplir con este objetivo específico se llevaron a cabo las siguientes actividades: 1) Crear un Blog, un perfil en Facebook y un correo electrónico para establecer canales de comunicación efectivos con los sujetos de investigación. 2) Implementar la situación didáctica solicitando a los estudiantes que consignen el desarrollo de las tareas en sus respectivos blogs. 3) Moderar los comentarios que los estudiantes realizan en el blog de sus compañeros. 4) Enriquecer las discusiones de los estudiantes en torno a la temática tratada, a través de nuevos cuestionamientos.

Elaboración propia.

Antes de implementar la situación didáctica en la modalidad virtual, debemos pensar en los canales de comunicación a través de los cuales tendremos contacto con los estudiantes. Es importante aclarar que la comunicación en la virtualidad no comprende exclusivamente un *chat*, pues en entornos de aprendizaje, la comunicación se puede dar a través de comentarios en entradas de un blog o en foros adecuados para la discusión de un tema específico.

Tabla 22. Fase de evaluación de la situación didáctica.

Situación didáctica bajo el modelo de Aula Invertida para propiciar el desarrollo de la competencia representar en torno a la función derivada
FASE: Evaluación.
OBJETIVO: Estimar la medida en la que la implementación de una situación didáctica basada en el modelo de aula invertida favorece el aprendizaje en torno la función derivada en los estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.
ACTIVIDAD: Para cumplir con este objetivo específico se llevaron a cabo las siguientes actividades: 1) Recolectar información a partir de las tareas que los estudiantes resuelven y consignan en sus blogs. 2) Recolectar información de tipo cualitativo a partir de la participación de los estudiantes en los diferentes espacios adecuados para ello: blogs personales, Facebook, correo electrónico, charlas de tipo informal, entre otros. 3) Recopilar información referente a las respuestas que los estudiantes brindan a las preguntas insertadas en los videos diseñados por el docente. 4) Consignar la información recopilada en el formato correspondiente al Modelo Teórico A priori – MTP - (García et al., 2015). 5) Aplicación de una prueba final (La misma prueba diagnóstica). 6) Análisis de la información recopilada en los puntos anteriores.

Elaboración propia.

En la fase de evaluación son importantes los gráficos y los porcentajes, pues esto hace visible un indicador de cambio, pero esto es sólo el aspecto cuantitativo. Un aspecto más valioso aún dentro de la metodología que incorpora ambientes de aprendizaje virtual, son aquellas que recogen las palabras y actitudes de los estudiantes; y esto permite recopilar información de carácter cualitativo que da luces sobre aquellos aspectos de la actividad que pueden ser sujetos de mejoría.

Procedimiento

Tabla 23. Procedimiento de la situación didáctica.

ACTIVIDAD	DETALLE
Prueba diagnóstica	Los estudiantes son convocados a través de Blogger, Facebook y el correo electrónico, para que presenten la prueba diagnóstica del proyecto de aula invertida, la cual se halla en la plataforma Socrative. Esta prueba tiene como fin recoger información sobre los conocimientos que poseen los estudiantes sobre las características de la línea recta y sus registros de representación semiótica. Posteriormente y de manera gradual se ahonda en la razón de cambio promedio y su relación con la función lineal.
Primera actividad de Aula Invertida	Se convoca a los estudiantes para que observen el video N° 1, el cual parte del contexto de las cámaras de fotomultas para explicar la tasa de cambio promedio a partir de diferentes registros de representación semiótica: Verbal, tabular, algebraico y gráfico. Posteriormente, los estudiantes aplicarán lo aprendido para resolver los puntos de la tarea N°1, cuyas respuestas deben alojar en sus respectivos blogs.
ACTIVIDAD	DETALLE
Segunda actividad de Aula Invertida	Se elabora un video por parte del profesor para realizar la corrección de la tarea N°1. Este video se enlaza con Edpuzzle, lo que le permite al estudiante recibir retroalimentación mientras es partícipe del proceso.
Tercera actividad de Aula Invertida	Se notifica a los estudiantes para que ingresen a la página web Edpuzzle y vean el video N°2. Este material permite realizar un repaso de la tasa de cambio promedio a partir de su representación analítica y gráfica, concentrándose en esta última para introducir el concepto de la recta tangente al trazo de una curva. Este video tiene la particularidad de poseer pausas donde se generan preguntas al estudiante lo que permite recoger información sobre los aprendizajes adquiridos por éstos. El estudiante pasa de ser espectador a un partícipe del desarrollo de la explicación.
ACTIVIDAD	DETALLE
Cuarta actividad de Aula Invertida	El video N°3 permite introducir sutilmente la representación gráfica de la razón de cambio instantánea y el significado de las pendientes positivas, negativas y neutras para un problema cuyas variables independiente y dependiente son respectivamente el tiempo y la temperatura.
Quinta actividad de Aula Invertida	Se convoca a los estudiantes para que ingresen a EDpuzzle y participen en la actividad propuesta a través del video N°4. El tema a tratar es la razón de cambio instantánea y la función derivada. Los estudiantes pueden comprender como a través de la razón de cambio promedio surgen algunas inquietudes que sólo pueden ser resueltas con la razón de cambio instantánea; para ello, se muestra como la recta tangente a la que se hizo referencia en los videos anteriores es la representación gráfica del resultado arrojado por la evaluación de la función derivada en un punto.
Prueba final	Los estudiantes ingresan a la plataforma Socrative para resolver la prueba de conocimientos sobre las tasas de variación y sus representaciones semióticas. Esta prueba es la misma que se realizó con carácter diagnóstico.

Elaboración propia

La tabla 23 resume el procedimiento de la situación didáctica que propone esta tesis. Nótese que involucra todos los aspectos considerados en el diseño de la situación didáctica : estudiante, medio didáctico, profesor, canales de comunicación y herramientas con las que se fortalece el aprendizaje del estudiante.

Implementación de la situación didáctica

La situación didáctica que propone esta tesis consta de dos momentos. El primero de ellos tiene como sustento una tarea que consta de 6 asignaciones de carácter virtual con nivel de complejidad creciente, las cuales se encuentran en el canal JCC JOCAYCU de YouTube. Los estudiantes deben compartir a través de su blog personal los resultados obtenidos y utilizar este medio o la red social Facebook como espacio para validar sus resultados. Por otro lado, el segundo momento de la situación didáctica enfrenta al estudiante con tres videos cuyo contenido le permitirá responder las preguntas que aparecen a lo largo de éste.

A continuación se presenta cada asignación junto a los tipos de operaciones a través de los cuales se manejan los registros de representación semiótica, y la situación didáctica que enfrenta el estudiante.

Primer momento de la situación didáctica: problema contextualizado

1) En la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) se plantea que una situación a-didáctica debe semejar una situación en contexto de la vida real del estudiante, de tal manera que llame su atención. Por ello, y aprovechando las noticias actuales sobre los accidentes causados en Cali debido al exceso de velocidad, propongo una situación donde involucro las cámaras de fotodetección (figura 6).

Figura 4. Problema contextualizado.
Adaptación de https://www.medellin.gov.co.

2) En la asignación N°1 (figura 7) el estudiante se enfrenta a una situación donde la cámara de fotodetección es capaz de detectar la velocidad de un vehículo en kilómetros por hora, cada que este recorre 20 metros. Tiene entonces dos registros de representación tabular, uno donde se representa la situación descrita y otro que debe completar. De acuerdo a la TDS de Brousseau el estudiante se encuentra ante una situación de acción.

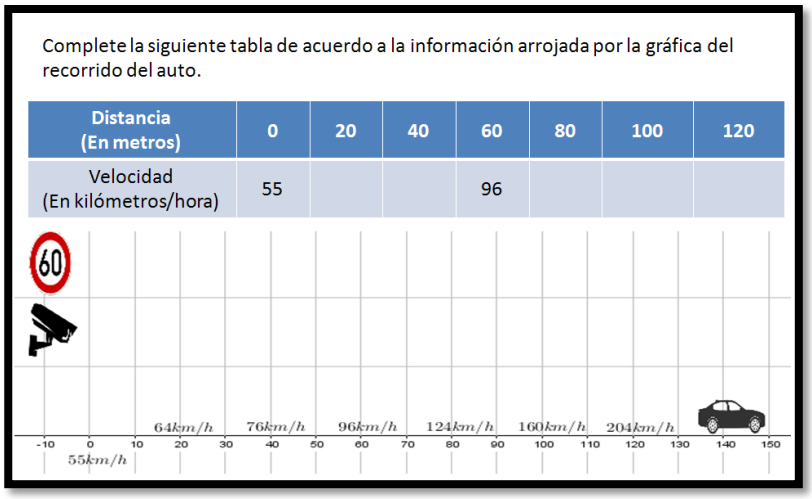


Figura 5. Asignación N°1.

3) En la asignación N°2 (figura 8) el estudiante debe realizar una operación de tratamiento que le permita completar el registro de representación tabular.

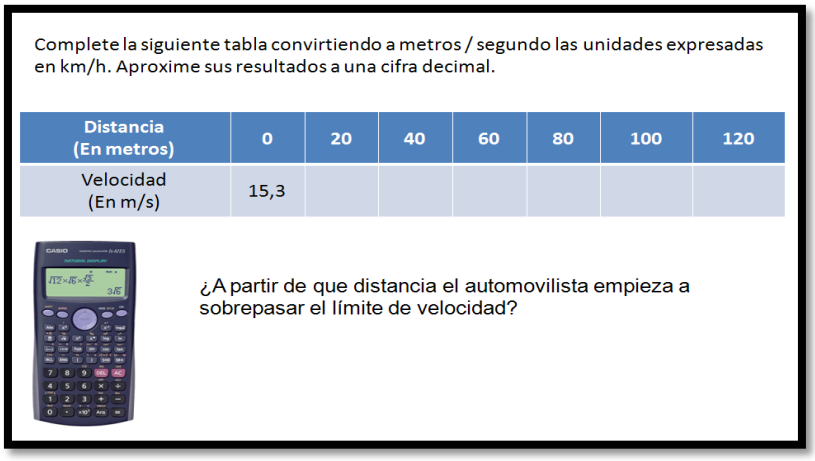


Figura 6. Asignación N°2

4) En la asignación N°3 (figura 9) el estudiante debe pasar de un registro de representación tabular a uno de representación gráfica. Es decir, debe realizar una operación de conversión.

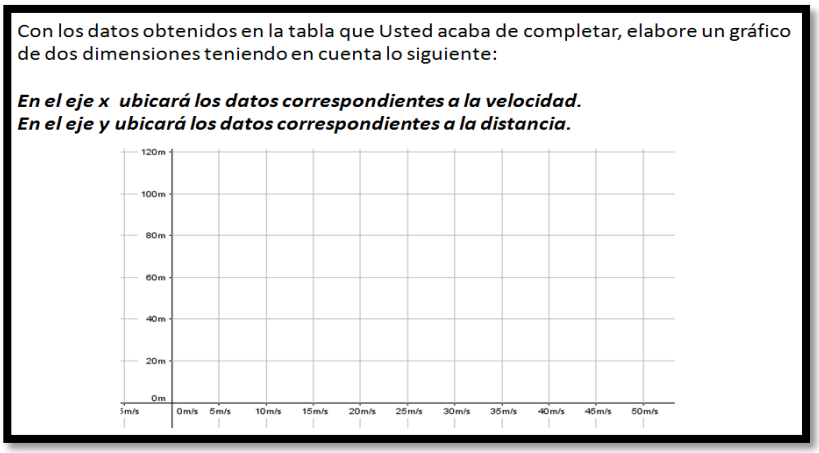


Figura 7. Asignación N°3

5) La asignación N°4 (figura 10) es muy importante, pues el docente coloca al estudiante en contacto con el modelo de aula invertida. La mediación didáctico-tecnológica se lleva a cabo a través de un medio audio visual. El estudiante se encuentra aquí frente a una situación de acción.

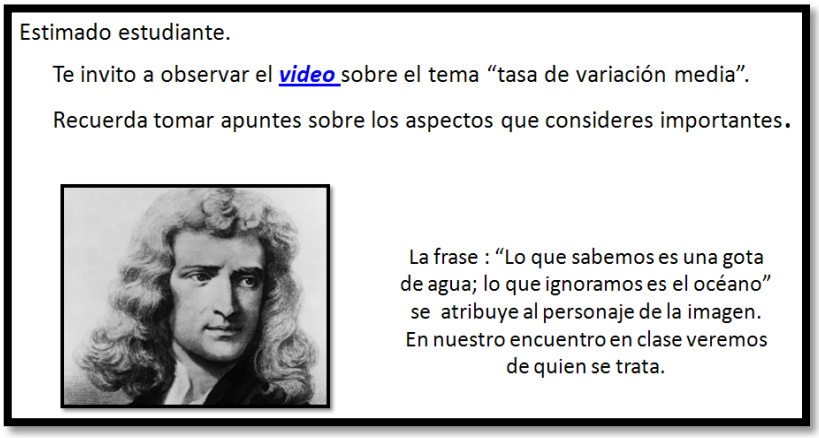


Figura 8. Asignación N°4

6) En la asignación N°5 (figura 11), el estudiante debe pasar de un registro de representación gráfica a otro de representación tabular, para ello, debe utilizar los conocimientos adquiridos a través de la mediación didáctica-tecnológica. De acuerdo a la TDS de Brousseau, la situación didáctica es de formulación.

En el video se explica de manera analítica, como obtener la razón de cambio promedio entre dos puntos de una función. ¡Pon en práctica lo que aprendiste y utiliza tus apuntes para completar la última línea de este cuadro!

Importante: Tenga en cuenta la gráfica que elaboró en la asignación 3.

Distancia (x) (En metros)	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**
Velocidad (v) (En m/s)						
Razón de cambio Promedio (Δx /Δ v)						

Figura 9. Asignación N°5

7) Por último, en la asignación N°6 (figura 12) el estudiante identifica que "cambia" y que "varía". Además, debe expresar a través de un registro escrito en lengua materna lo que aprecia en el registro de representación tabular. Es decir, aquí ejecuta una operación de conversión. De acuerdo a la TDS de Brousseau, el estudiante se encuentra frente a una situación de formulación.

En el **contexto de la situación del automovilista** frente a la cámara de fotodetección. Si analizamos las razones de cambio promedio calculadas observamos que hay un patrón. ¿De qué se trata?

1) ¿En qué **unidades** se da la razón de cambio promedio (Δx/Δ v)?

2) ¿Qué significa en el contexto del problema que la tasa de variación media (Δx/Δv) se haga cada vez menor? Explique de manera breve y concreta su respuesta.

La frase : "Amar es encontrar en la felicidad de otro tu propia felicidad" se atribuye al personaje de la imagen.
En clase compartiremos esta historia.

Figura 10. Asignación N°6.

Segundo momento: mediación didáctica-tecnológica a través del método de aula invertida

Es pertinente aclarar que en el contexto de esta tesis, las TIC se integran con los propósitos educativos y la didáctica, es decir, el foco se encuentra en aquello que se desea enseñar y no en la tecnología.

En concordancia con lo anterior, el segundo momento de la situación didáctica consta de tres videos subidos al canal JCC JOCAYCU de la plataforma Youtube, los cuales son enriquecidos a través de la plataforma EDPuzzle. Ésta última permite añadir preguntas de selección múltiple, las cuales el profesor puede insertar en el momento que considere adecuado.

El primer video comprende la explicación de cada uno de los puntos de la tarea N°1. Las preguntas que aparecen en él, tienen como fin verificar si el estudiante comprende lo que en ese momento se explica.

El segundo video contiene la explicación y las preguntas alusivas a la razón de cambio promedio y sus registros de representación gráfica, tabular y analítica; mientras que el tercer video se concentra en la derivada y la tasa de variación instantánea con sus correspondientes registros de variación. Cabe añadir que cada video tenía disponibilidad de 4 días para ser visualizado, después de este plazo se cerraba su acceso.

Resultados

La prueba diagnóstica (pre-prueba)

La prueba diagnóstica consta de un conjunto de doce (12) preguntas que abordan conceptos propios de las matemáticas enfocados en las situaciones de cambio y variación. La complejidad creciente de las preguntas abarca registros de representación gráfica, tabular, aritmética, algebraico, conjuntista y en lengua materna. A continuación presento una tabla que resume los aspectos relevantes de la prueba diagnóstica.

La tabla 23 relaciona el registro de representación semiótica de la pregunta y el registro esperado en la respuesta con la operación de tratamiento que se debe llevar a cabo para lograrlo.

Tabla 24. Estructura de la prueba diagnóstica

PREGUNTA	REG. INICIAL	REG. FINAL	OPERACIÓN
P1	Algebraico	Aritmético	Conversión
P2	Algebraico	Gráfico	Conversión
P3	Tabular	Aritmético	Conversión
P4	Icónico	Verbal	Conversión
P5	Algebraico	Algebraico	Tratamiento
P6	Verbal	Verbal	Tratamiento
P7	Verbal	Aritmético	Conversión
P8	Tabular	Aritmético	Conversión
P9	Verbal	Gráfico	Conversión
P10	Gráfico	Verbal	Conversión
P11	Algebraico	Aritmético	Conversión
P12	Algebraico	Aritmético	Conversión

El énfasis en las operaciones de conversión radica en que, son precisamente estas la que no se abordan durante la clase presencial debido a la problemática ampliamente expuesta en esta tesis.

La información respecto a los resultados obtenidos por los estudiantes a través de la prueba diagnóstica se resume en dos gráficas. En el gráfico 1 está relacionado cada estudiante con su porcentaje de aciertos frente a la prueba. En el gráfico 2 aparece la relación porcentual de los estudiantes que acertaron cada una de las preguntas.

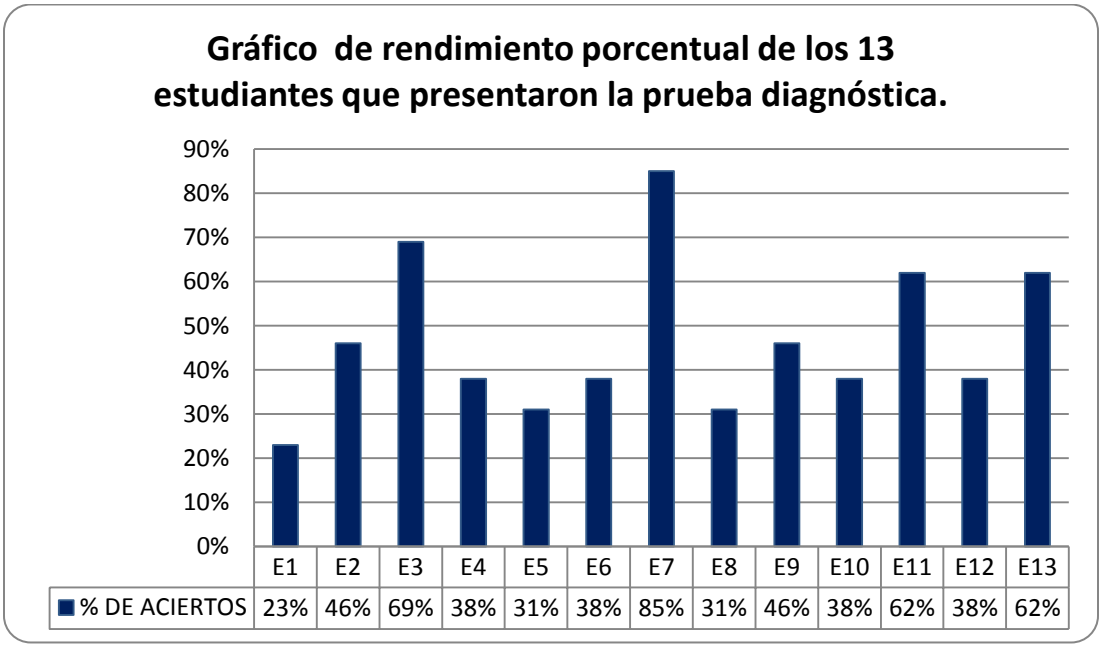


Gráfico 1. Resultados de la prueba diagnóstica

Del gráfico 1 se infiere que el 38 % de los estudiantes que presentaron la prueba obtuvieron resultados superiores a la media.

Por otro lado, en el gráfico 2 podemos apreciar el porcentaje de estudiantes que acertó a la respuesta de cada una de las preguntas de la prueba diagnóstica.

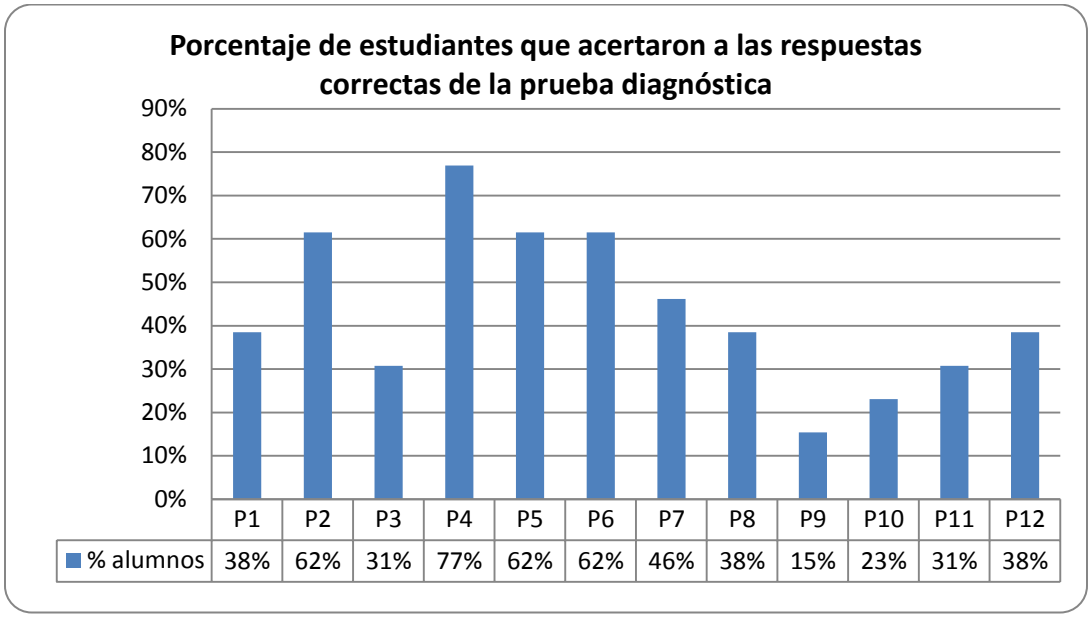


Gráfico 2. Porcentaje de estudiantes que acertaron a las respuestas correctas

El gráfico 2 muestra como cuatro de las preguntas (P2, P4, P5 y P6) fueron correctamente contestadas por más de la mitad de los estudiantes que participaron en la prueba. Es decir, el 33% de las preguntas tuvo respuesta acertada por más del 50% de quienes respondieron la prueba.

Resultados de la tarea N°1

Los resultados de la tarea N°1 se resumen en la tabla 24. Las convenciones para cada una de las seis actividades es la siguiente: (C) Cumple, (CP) Cumple Parcialmente, (NC) No Cumple.

Tabla 25. Resultados de la tarea N°1

	ESTUDIANTE												
ACTIVIDAD	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
2	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
3	NC	C	C	C	CP	C	C	C	CP	CP	C	CP	CP
4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5	NC	C	C	C	CP	C	C	C	C	CP	C	C	CP
6	NC	CP	CP	C	NC	C	C	CP	C	CP	C	C	C

Se destaca el resultado de la actividad 3, pues en ella se deben ubicar puntos sobre un plano cartesiano debido a una sucesión de eventos. En este sentido, esos puntos no pueden ser unidos mediante un trazo pues eso le daría atributos de función a la situación.

También es importante lo que atañe a la actividad 6, dado que en ella el estudiante debe darle sentido al resultado numérico obtenido de acuerdo al contexto del problema planteado.

Una evaluación más detallada de esta tarea aparece en la tabla dispuesta en el anexo 4.

Resultados de la mediación didáctica-tecnológica (tratamiento)

Una vez identificadas las dificultades e inquietudes presentadas por los estudiantes durante la tarea N°1 procedí a realizar un video donde se retoman los procesos matemáticos de codificación y decodificación y las situaciones de tratamiento y conversión relacionadas con situaciones de cambio y variación.

El video N°1 contiene 8 preguntas cuyas respuestas correctas (en sombreado) aparecen relacionadas en la tabla 25. Dichos aciertos equivalen al 54%.

Tabla 26. Resultados de la actividad con el video N°1

	ESTUDIANTE												
PREGUNTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
1	A	B	A	B	B	C	B	B	A	A	A	A	B
2	C	B	C	B	B	A	B	B	C	C	C	C	B
3	D	D	A	D	A	D	D	A	A	B	A	D	C
4	D	B	D	D	B	C	C	D	B	C	D	C	B
5	A	B	A	A	B	A	A	A	A	B	A	A	A
6	A	C	C	D	D	C	C	C	B	C	C	D	C
7	D	D	B	D	C	D	D	C	D	C	D	B	D
8	C	C	B	C	C	C	C	D	B	C	C	C	D

La hora de ingreso registrada en el portal permite evidenciar que algunos estudiantes constituyeron un acuerdo para coincidir en su visualización. En una charla posterior, los estudiantes manifestaron haber utilizado esta técnica para discutir cual sería la respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos, aunque no siempre elegían la misma opción debido a inquietudes de tipo particular.

De acuerdo al relato establecido con los alumnos, estas intervenciones se realizaron utilizando WhatsApp o Facebook. Por otro lado, algunos estudiantes ingresaron faltando un par de horas para cerrar el acceso al video, lo que contribuyó, según sus propias palabras a que no se tomara muy enserio la actividad.

La mayor dificultad para los estudiantes en esta prueba se encuentra en aquellas situaciones que implican operaciones de conversión, principalmente de los registros de tabulación hacia los registros algebraicos y gráficos. Los aspectos relacionados con los procesos matemáticos de esta actividad aparecen en el anexo 5.

El segundo video se concentra en la representación gráfica de la razón de cambio instantánea y sus registros de representación semiótica. Los resultados de la actividad aparecen en la tabla 26. En esta ocasión el nivel de aciertos corresponde al 62%.

Tabla 27. Resultados de la actividad con el video N°2

	ESTUDIANTE												
PREGUNTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
1	A	B	B	D	B	B	B	B	D	D	C	B	B
2	C	B	C	C	C	C	C	A	D	C	C	C	D
3	D	D	B	B	B	D	D	D	B	B	D	B	D
4	A	B	B	B	B	A	A	B	D	B	B	A	B
5	A	A	A	A	A	A	A	C	A	C	A	C	A
6	B	A	B	A	B	A	B	C	C	A	A	B	C
7	A	C	A	C	C	C	C	C	D	C	C	D	A
8	A	A	A	A	A	A	A	D	A	C	A	C	A
9	C	A	C	C	C	C	C	A	B	B	C	A	C

El siguiente es un extracto del relato con algunos estudiantes, el cual tuvo lugar una vez cesó el paro nacional del magisterio.

- Profesor: Bueno, de acuerdo a lo que me contaron, el video N°1 los tomó por sorpresa. ¿Cómo se sintieron con el video N°2?
- E7: Bien, entendí perfectamente la explicación, pero las preguntas tenían su "trampita" siempre tenía que caer en alguna.
- E6: Nos pusimos de acuerdo E3, E5, E6 y E13 para empezar a ver el video a la misma hora. E13 llegó cuando nosotros íbamos a terminar, de todas formas lo resolvió sólo.
- E3: Eso nos la pasamos alegando ¡Es la A! ¡Es la B! (risas) a veces no nos decidíamos y cuando nos daba la respuesta empezaba el ¿vio? ¿vio? ¡Yo le dije! (risas).

- E5: Huy, pero si uno no estaba atento a la explicación ¡lleve! Cuando el video iba a llegar a la marca que indicaba la pregunta me ponía "en la jugada". ¿Sabe que sería bueno? Que uno pudiera atrasar el video …

  ¡eeeeehhhhh! (risas)

La pregunta que mayor inquietud generó consistía en que el estudiante reflexionara frente a la posibilidad de una recta que fuese paralela a varias rectas secantes al trazo de una curva pero que no tuviese esa particularidad, es decir, que sólo pasara por un punto en el trazo de la curva. La mayoría respondió que esto no era posible.

En la tabla se evidencia que los estudiantes E8, E9, E10 y E12 seleccionaron opciones incorrectas la mayoría de las ocasiones. Ello se debe a que entraron en los últimos minutos antes de cerrar la prueba. Los estudiantes manifestaron que ello se debió a que lo habían olvidado y que sólo se limitaron a cumplir con la actividad. Debo destacar que E9 y E10 son reincidentes en este aspecto.

Los aspectos referentes con los procesos matemáticos presentes en esta actividad aparecen en el anexo 6.

El tercer video hace énfasis en la función derivada y cómo esta se relaciona con la tasa de variación instantánea a través de sus registros de representación semiótica. Los resultados de la actividad aparecen en la tabla 27, en la cual se puede observar que la cantidad de aciertos se incrementa respecto al video anterior, logrando un nivel de aciertos correspondiente al 72%.

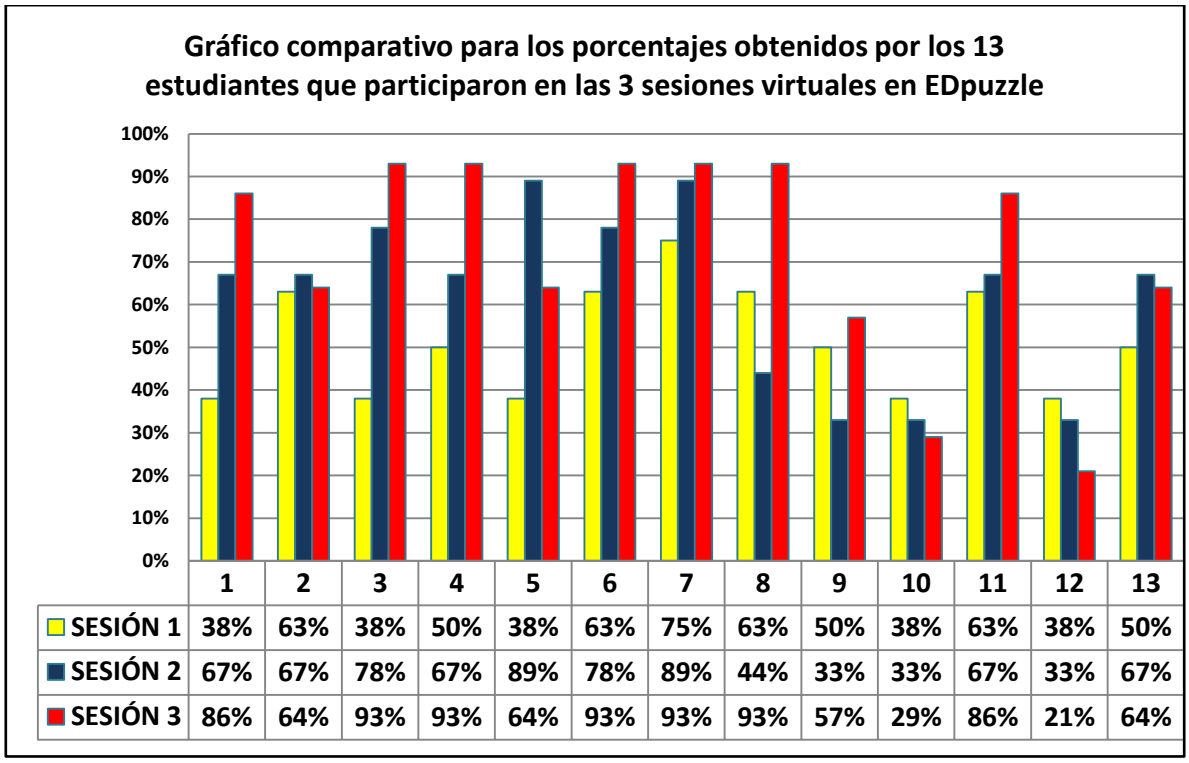
Tabla 28. Resultados de la actividad con el video N°3

	ESTUDIANTE												
PREGUNTA	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
1	B	C	B	B	B	B	B	B	D	D	B	C	B
2	A	D	A	A	A	A	A	A	B	B	A	D	A
3	A	D	B	B	B	B	B	D	A	B	B	B	B
4	A	D	A	A	D	A	A	A	B	C	B	A	B
5	D	B	C	C	C	C	C	D	C	B	C	D	C
6	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	B	C	B
7	B	A	B	B	D	B	B	B	D	D	B	D	B
8	C	A	C	C	A	C	C	C	C	C	C	C	A
9	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	D	D
10	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C	A	C
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A	D	A	D	A
12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C
13	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	B	B
14	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La pregunta que más generó inquietudes en los estudiantes fue la N°3, pues en ella solicitan información sobre proceso a través del cual se puede encontrar la inclinación de una recta secante, lo que les llevó a confundir la tasa de cambio promedio con la función derivada.

En esta ocasión los estudiantes E9, E10 y E12 manifestaron haber cumplido con el compromiso adquirido pero que no pusieron empeño suficiente para responder la prueba con responsabilidad. Los aspectos referentes con los procesos matemáticos presentes en esta actividad aparecen en el anexo 7.

Síntesis de la mediación didáctica – tecnológica basada en el modelo de aula invertida



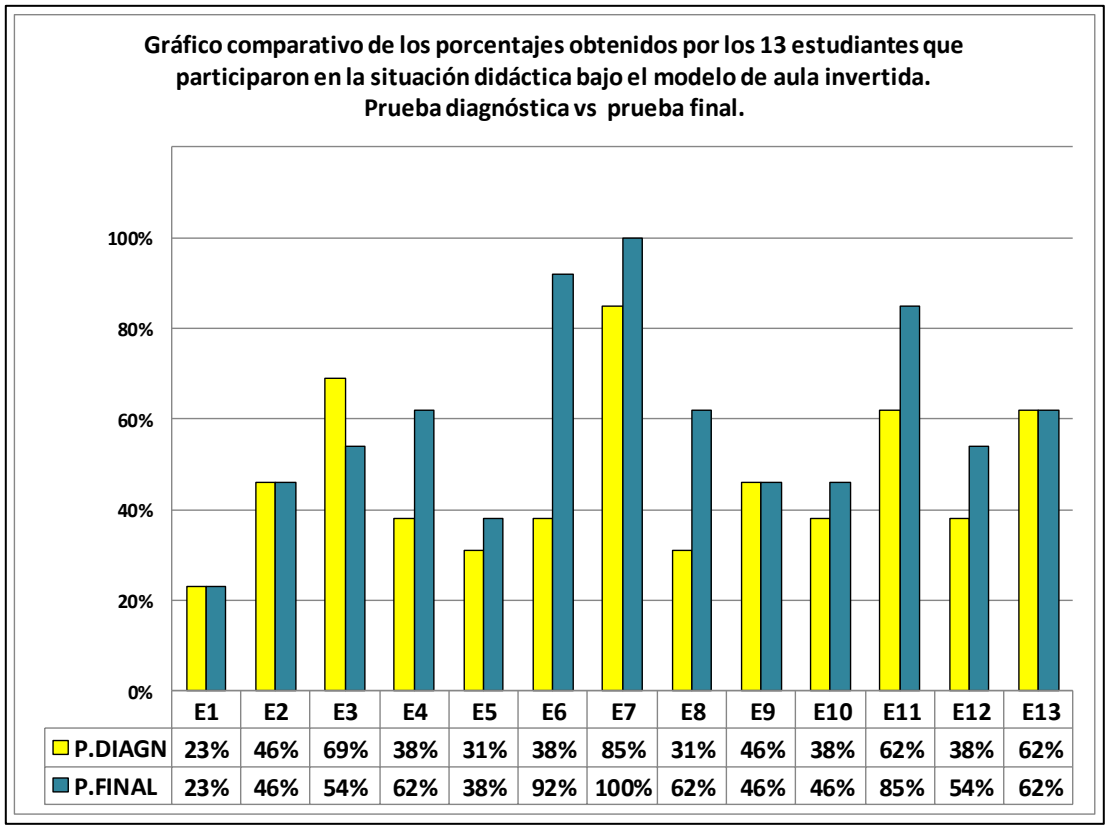
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
SESIÓN 1	38%	63%	38%	50%	38%	63%	75%	63%	50%	38%	63%	38%	50%
SESIÓN 2	67%	67%	78%	67%	89%	78%	89%	44%	33%	33%	67%	33%	67%
SESIÓN 3	86%	64%	93%	93%	64%	93%	93%	93%	57%	29%	86%	21%	64%

Gráfico 3. Comparativo de los tres momentos bajo el modelo de aula invertida.

En la sesión 1, el 38% de los estudiantes presentó un porcentaje de respuestas correctas mayores a la media. En la sesión 2, el 69% de los estudiantes obtuvo un índice de respuestas mayores a la media; mientras que en la sesión 3, el 78% de los estudiantes alcanzó una efectividad superior a la de la media. Estos resultados se resumen en el gráfico 3.

La prueba final (post-prueba)

Luego de realizar el tratamiento se aplicó una prueba final a los estudiantes. Esta consistió en el mismo examen aplicado como prueba diagnóstica. En esta ocasión el 53% de los estudiantes obtuvieron resultados por encima de la media, lo que representa una mejoría del 15% respecto a la prueba inicial. A continuación se presenta el gráfico 4, el cual compara los resultados obtenidos en ambas pruebas.



	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
P.DIAGN	23%	46%	69%	38%	31%	38%	85%	31%	46%	38%	62%	38%	62%
P.FINAL	23%	46%	54%	62%	38%	92%	100%	62%	46%	46%	85%	54%	62%

Por otro lado, en el gráfico 5 se puede apreciar el porcentaje de estudiantes que acertó a la respuesta de cada una de las preguntas de las pruebas diagnóstica y final.

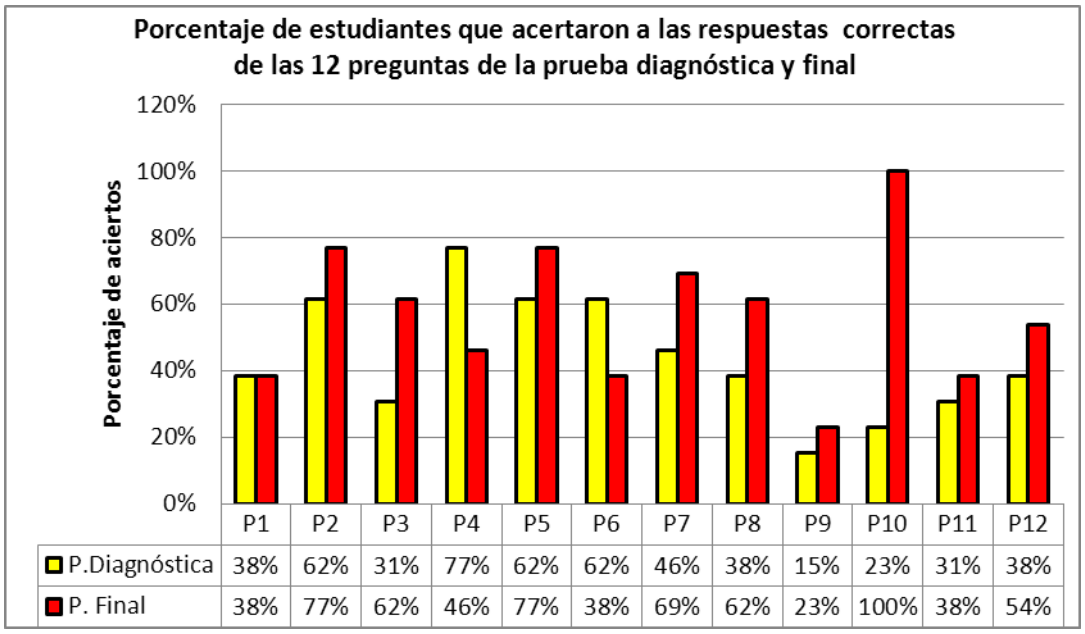


Gráfico 5. Porcentaje de estudiantes por pregunta acertada.

Esta gráfica permite conocer que el 69% de los estudiantes, frente a la pregunta planteada, pudieron hacer una mejor elección de la respuesta respecto a la prueba diagnóstica cuyo resultado fue de 33%.

La red social Facebook como espacio de validación de la información

A continuación transcribo algunos de los mensajes que intercambiaron los estudiantes a través de la red social Facebook. En ocasiones no se lograba el consenso de los participantes de la deliberación, sin embargo algunos instantes se constituyeron en momentos de validación de la información.

¿Se unen los puntos o no?

- E8: ¿Cómo les dio la gráfica?
- E1: Una curva.
- E4: Yo puse los puntos ¿Entonces hay que unirlos?
- E8: Eso, yo tengo unos puntos pero no sé cómo pegarlos.
- E1: Si, hay que unir los puntos.
- E7: No, los puntos no se unen.
- E6: Obvio sí, hay que unirlos.
- E7: No se pueden unir porque el problema dice que la cámara toma fotos cada determinado tiempo y no se sabe qué pasa cuando no toma fotos.
- E6: No importa porque el carro va acelerando cuando la cámara está apagada.
- E4: Yo lo voy a dejar en punticos.
- E8: A mi dio eso como una parábola al revés.
- E7: Busquen en Internet y verán. Eso es una sucesión. Los puntos no se unen.

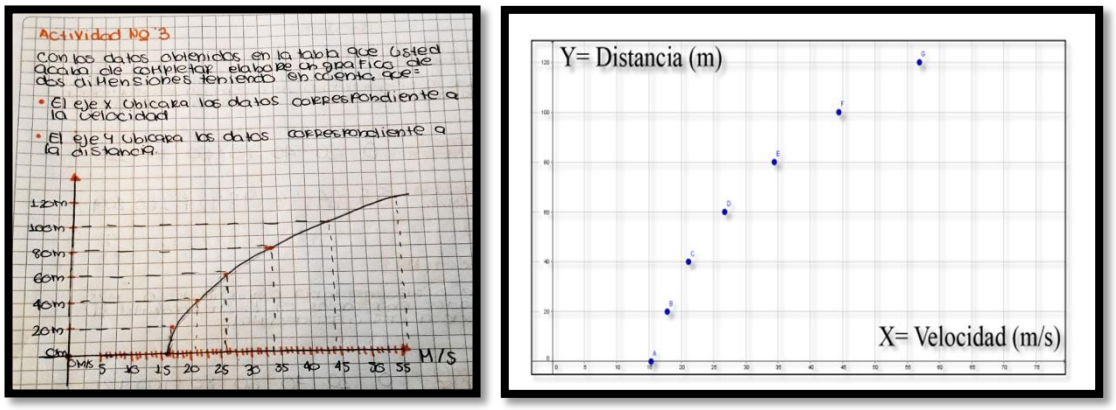


Figura 11. Información compartida por el estudiante a través del blog

¡Eso es lo que estoy diciendo!

- E8: ¿El carro va disminuyendo la velocidad?
- E4: No, el carro antes está yendo más rápido.
- E13: Acuérdense que lo que varía es el tiempo. El tiempo disminuye.
- E8: ¿Qué? Eso es imposible.
- E13: No, que el tiempo entre dos puntos se hace más pequeño.
- E4: El tiempo en que se demora en pasar de un punto a otro es menor.
- E13: Eso es lo que estoy diciendo.
- E8: Ah, claro. Si va más rápido se gasta menos tiempo para pasar por los puntos.
- E13: Eso

El aula se constituye en un ambiente de reflexión

¿La derivada no es la pendiente?

- E1: Profesor, ayúdenos.
- E1: Mi compañera (EE) no entiende el punto 2.
- Profesor a E1: ¿Ya le explicaste?
- EE: Si profe, ella me explicó, pero no entiendo algo.
- EE: La derivada de esta función ($y = 3x^2 - 2x + 1$) es $y' = 6x - 2$. Entonces la pendiente de la recta en el punto Q (2 , 9) es 6, porque ese es el coeficiente de x.
- Profesor: ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por el punto P (0 , 1)
- EE: seis.
- Profesor: Hagamos algo. Ubiquen el punto Q (2 , 9) sobre el trazo de la parábola.
- EE y E1: Listo.
- Profesor: Ahora tracen una recta tangente a la curva que pase por el punto Q (2 , 9)
- EE y E1:Ya.
- Profesor: Ahora ubiquen el punto P (0 , 1) y tracen una recta tangente a la curva que pase por ese punto.
- EE y E1: Listo.
- Profesor: A simple vista ¿Las dos rectas tienen igual pendiente?
- EE: No, una es negativa y la otra positiva. Entonces no es como pensaba.
- E1: Profe, déjeme yo le explico el resto a ella. ¿Sí?
- Profesor : Dale, si tienen alguna duda me avisan.

En búsqueda de una Ley

- E7: Profe para el ejercicio que explica en el video ($y = x^2 - 1$) encontré que la razón de cambio promedio entre dos puntos da lo mismo que la razón instantánea en el punto de la mitad.
- Profesor: Explícame eso con más detalle.
- E7: Yo tengo dos puntos (1,0) y (3,8) el punto de la mitad es (2.3). El cambio promedio de los dos primeros me da 4. Y la razón instantánea en el de la mitad también.
- Profesor: ¿Lo ensayaste con otros puntos?
- E7: Siempre pasa lo mismo en todos. Entonces pues eso es muy fácil de calcular.
- Profesor: Hagamos algo. Ensaya eso que me dijiste con esta función $y = x^3 - 1$ y me cuentas como te va.
- E7: Listo.

…Un rato después

- E7: Profe, ya no da. No funciona mi teoría.
- Profesor: Tengo una pregunta ¿Por qué funciona con la primera función y con la segunda no? Te dejo esa inquietud.
- E7: Voy a averiguar eso.

Conclusiones

Un refrán popular dice que “no hay mal, que por bien no venga” y eso fue precisamente lo que sucedió entre el 11 de mayo y el 16 de junio de 2017, debido al cese de actividades del Magisterio Colombiano. Este evento me permitió implementar en condiciones ideales una situación didáctica basada en el método de aula invertida, con el propósito de determinar la medida en que esta modalidad favorece el desarrollo de la competencia *representar*, en torno a la función derivada en estudiantes de undécimo grado de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

El análisis de la información recogida a través de los resultados de las pruebas diagnóstica y final, de las actividades que conformaron la intervención a través del modelo de aula invertida, y finalmente aquella proveniente de la observación, entrevistas y aportes de los estudiantes que participaron en la actividad; permiten concluir lo siguiente:

En primer lugar, los estudiantes mostraron una mejoría del 75% en la selección de sus respuestas en la prueba final respecto a la prueba inicial; lo que indica en términos generales que estos obtuvieron avances en lo concerniente a la competencia representar, en torno a la función derivada.

Por otro lado, partir de las situaciones de variación y cambio de acuerdo a la propuesta de Vasco (2010) permitió abordar la función derivada de manera fluida, en la

medida que le brindó a este objeto matemático conexiones con saberes previos de los estudiantes, tanto en contextos reales como dentro y fuera de las matemáticas.

Articular el aspecto anterior con el trabajo de García et al. (2015) respecto a las operaciones de tratamiento y conversión entre registros de representaciones semióticas, fue de valiosa ayuda para solventar los inconvenientes relacionados con el aprendizaje de la función derivada enunciados en la investigación de Sánchez-Matamores et al. (2008).

También, cabe señalar que el aprendizaje significativo en torno a la función derivada bajo el modelo de aula invertida, se debió en gran parte a la selección de los medios adecuados para la necesidad educativa específica de la Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero; aspecto que guarda concordancia con el Reporte Horizonte (2017) . En este sentido, las condiciones propiciadas por el paro del Magisterio exigieron explotar al máximo las virtudes del aprendizaje híbrido, generando espacios de reflexión y validación del conocimiento, lo cual propició el desarrollo de competencias en torno a la representación de la función derivada. Lo anterior, aunado a las particularidades de la mediación didáctica tecnológica, la cual permitió incorporar movimientos, acercamientos, pausas y preguntas, hizo de las actividades centradas en el aprendizaje del estudiante algo inconcebible sin la incorporación de las TIC.

En conclusión, los aspectos anteriores permiten determinar que en el contexto de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero, el modelo de aula invertida propició en gran medida el desarrollo de la competencia representar, en torno a la función derivada. El desarrollo de esta tesis configura uno de tantos caminos posibles en lo concerniente a la aplicación de las

TIC en el ámbito educativo; constituyéndose en un punto de partida valioso para el docente que desee emprender su propia exploración en las metodologías híbridas centradas en el aprendizaje del estudiante. De acuerdo a lo anterior, es mi interés que este tipo de intervenciones mediadas por TIC sean replicadas en la escuela desde la perspectiva que aquí he abordado, la cual en pocas palabras, desmitifica aquello de que la educación virtual da lugar cuando se ubica una cámara frente a un tablero.

Recomendaciones

La experiencia obtenida a partir del desarrollo de esta investigación me permite colocar a disposición del lector las siguientes recomendaciones en caso de que desee incorporar a sus prácticas educativas un modelo mixto de aprendizaje.

Previo al diseño de una situación didáctica de carácter híbrido en el área de matemáticas; los docentes debemos adquirir todos los fundamentos relacionados con la temática que deseamos abordar. Esto se logra a través del análisis de coherencia horizontal y vertical de los estándares dentro del pensamiento desde donde emerge el objeto matemático de interés. A partir de la ruta marcada por este análisis, se visualiza el tipo de competencias matemáticas que se pueden desarrollar con apoyo de la mediación didáctica-tecnológica.

Tenga en cuenta el lenguaje propio de las matemáticas como parte del proceso de enculturación (García et al., 2013) en esta área. Usar sinónimos para referirse a diferentes registros de representación conlleva a obstáculos epistemológicos.

Antes de diseñar situaciones didácticas con integración de las TIC debe determinar el contexto tecnológico de sus estudiantes, esto le permitirá seleccionar las herramientas más adecuadas para su necesidad educativa.

Procure situaciones de carácter sincrónico al implementar una situación didáctica basada en el método de aula invertida. Esto le permite obtener información valiosa para el aprovechamiento del tiempo durante el encuentro presencial.

A manera de expectativa, el método de aula invertida en el contexto de este trabajo posibilita una futura indagación respecto a su potencial para mejorar los resultados de las pruebas SABER, ya que el promedio de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de matemáticas del año 2017 presentan una diferencia de 4 puntos entre quienes participaron de las actividades de aula invertida respecto a los demás estudiantes del mismo grado.

Bibliografía

Arboleda, T, N., y Rama, C. (2013). La educación superior a distancia y virtual en Colombia. Asociación colombiana de instituciones de educación superior con programas a distancia y virtual, ACESAD. Hipertexto Ltda. Recuperado de: http://www.uelbosque.edu.co/sites/default/files/autoevaluacion_docs/educacion_superior_distancia_virtual.pdf

Artigue, M., Douady, R., y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Bachelard, G. (1976). La formación del espíritu científico. 5 ed. México: Siglo Veintiuno, editores S.A.

Barceló, B. (2002). El descubrimiento del cálculo. Recuperado de: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html

Bartolomé, A., García-Ruíz, R., y Aguaded, I. (2017). Blended learning: panorama y perspectivas. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*. 21, (1). http://dx.doi.org/10.5944/ried.21.1.18842.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). Dale la vuelta a tu clase. International Society for Technology in Education (ISTE) 2012. Ediciones SM. España.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Calvillo, A. (2014). *El modelo Flipped Learning aplicado a la materia de música en el cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria: una investigación-acción para la mejora de la práctica docente y del rendimiento académico del alumnado*. (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid. Segovia. España.

Cendoya, A., y Martino, D. (2015). Herramientas para la integración curricular las TIC en el aula de inglés de ES. En *3° Jornadas de TIC e Innovación en el Aula*. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Chemello, G. (2001) La organización del conocimiento a enseñar en Matemática: Un problema didáctico. *Revista Quehacer Educativo*. FUM TEP Montevideo. 47, 23-34.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 12,(1), 73-112.

Churches, A. (2009). Taxonomía de Bloom para la era digital. Recuperado de: http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital

Coll, C. (2009). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades, en: Carneiro, R.; Toscano, J.C.; Díaz, T. (Coord.). (2011). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo. Colección metas educativas 2021*. OEI y Fundación Santillana.

Cortés, J., y Calvo, G. (2004). El método de Descartes para trazar normales a curvas. *Revista Suma*. (47), 41- 46.

Cuartero, P. (2016). El modelo inverso. Revisión y análisis. Universidad Zaragoza. Huesca. España.

D'Amore. B. (2003). La complejidad de la educación y de la construcción del saber. *Revista Suma*. (43), 23-30.

D'Amore. B. (2012). Perspectivas en la didáctica de las matemáticas. El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática" (pp.17-46). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Díaz-Barriga, A. (2013). TIC en el trabajo de aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*. 10,(4),3-21.

Dolores, C. (2010). Graficación covariacional. *Seminario de matemática educativa*. Fundamentos de la matemática universitaria, 1(3), 99-113.

Douady, Régine, (1984) Relación enseñanza –aprendizaje. Dialéctica instrumento – objeto. Juego de marcos, en *Cuadernos de Didáctica de las Matemáticas Nº 3*, IREM de Paris 7.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía.

Freeman, A., Adams Becker, S., Cummins, M., Davis, A., y Hall Giesinger, C. (2017). *NMC/CoSN Horizon Report: 2017 K–12 Edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium.

García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Giraldo, A. (2015). Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas. Universidad de la Amazonía.

García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Giraldo, A,. Tovar, B., Morales, S., y Cortés, D. (2013). Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje. Universidad de la Amazonía.

García, L., Figueroa, S., y Esquivel, I. (2014). Modelo de Sustitución, Aumento, Modificación y Redefinición (SAMR): Fundamentos y aplicaciones. *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI*. México. 205-219.

García, M. (2015). Tecnología y aprendizaje ubicuo. *Sistemas, cibernética e informática*. 12, (1), 66-73.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2012). Perspectivas en la didáctica de las matemáticas. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 47-78.

Godino, J., y Font, V. (2007). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

González, M.A., Perdomo, K.V., y Pascuas, Y. (2017). Aplicación de las TIC en modelos educativos blended learning: una revisión sistemática de literatura. *Sophia* , 13 (1), 144-154. http://doi.org/ccqf

González, O. (2004). El cálculo infinitesimal Leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos filosóficos*. 11,(6), 97-120.

Gutiérrez, S. (2010). Pierre Fermat: la pasión por los números. *Revista Suma*. (64), 107-112.

Hurtado, L., Toro, J. (2005). *Paradigmas y métodos de investigación en tiempos de cambio*. Episteme Consultores Asociados C. A.Venezuela.

Keengwe, J., y Onchwari, G. (2016). Handbook of Research on Active Learning and the Flipped Classroom Model in the Digital Age.

Koehler, M.J., Mishra, P., y Cain, W. (2015). ¿Qué son los saberes tecnológicos y pedagógicos del contenido (TPACK)? *Virtualidad, educación y ciencia*, 6(10), 9-23.

Lupiánez, J. y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez; L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada. 291-300.

Martínez, W., Esquivel, I., y Martínez, J. (2014). Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje: origen, sustento e implicaciones. *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI*. México. 143-160.

MEN. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencia matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio De Educación Nacional.

MEN. (2010). Lineamientos para la Educación Superior en Modalidad Virtual. Bogotá, Colombia: Ministerio De Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (2015). Educación virtual o educación en línea. Colombia: MINEDUCACION. http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-196492.html.

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge.

Müller, D. (2014). Las nuevas tecnologías como complemento al trabajo en el aula. En D. Veiga (eds.), *Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática*. Buenos Aires: SOAREM. 653 – 661.

Muñoz-Lecanda, M., y Román-Noy, N. (1999). Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal. Barcelona, España: Universidad Politécnica de Cataluña.

Olvera, W., Gámez, I., y Martínez, Jaime. (2014). *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI*. En DSAE-Universidad Veracruzana (Eds.), Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje: origen, sustento e implicaciones. 143-160.

Osorio, L. (2011). Ambiente híbridos de aprendizaje. Actualidades pedagógicas. Universidad de Los Andes. (58). 29-44.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Aula Universitaria*. *Revista de Publicaciones de Investigación en Pedagogía*. Santa Fe: Ediciones UNL. 29-36.

Pecharroman, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las ciencias*. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 3.(31), 121 – 134.

Ponce, J. (2015). Perspectiva histórica acerca del origen y evolución del concepto de derivada. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/270684035

Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the horizon*. NCB University Press. 9, (5), 1-6.

Puentedura, R. (2006). Transformation, Technology, and Education. Recuperado de Hippasus: http://hippasus.com/resources/tte/

Salas, E. (2013). Diseños preexperimentales en psicología y educación: una revisión conceptual. Instituto de Investigación de la Escuela de Psicología de la Facultad de

Ciencias de la Comunicación, Turismo y Psicología. Universidad de San Martín de Porres, Perú. Recuperado de: http://www.scielo.org.pe/pdf/liber/v19n1/a13v19n1

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11,(2), 267-296.

Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica; I de les Ciències Experimentals. Barcelona**.**

Staker, H., y Horn, M. (2012). Classifying K–12 Blended Learning. Innosight Institute.

Tenti, E. (2010). Sociología de la Educación. Ministerio de Educación de la Nación. Buenos Aires. Argentina.

Toro, I., y, Parra, R. (2006). *Método y conocimiento: metodología de la investigación*. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín. Colombia.

Tourón, J.; Santiago, R.; Díez, A. (2014): The Flipped Classroom. Cómo convertir la escuela en un espacio de aprendizaje. Barcelona. Digital Text.

Vasco, C. (2010). Tres ideas fuertes del cálculo. *Seminario de matemática educativa*. Fundamentos de la matemática universitaria, 1,(3), 62-98.

Vásquez, F (1990). La semiótica. Una ciencia "explicativa" para "comprender" los signos de la cultura. *Signo y Pensamiento*. 9, (16) , 101-110. Recuperado de: http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/signoypensamiento/article/view/3489/2795

Vidal, M., Rivera, N., Nolla, N,. Morales, I., y Vialart, M. (2016). Aula invertida, nueva estrategia didáctica. Escuela Nacional de Salud Pública (ENSAP). La Habana, Cuba.

Vidal, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Villa, J (2006). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren. Recuperado de http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/lacompresion-tasadevariacion.pdf

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación* (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Zunboylu, H. y karagözlü, D. (2017). The Emerging Trend of the Flipped Classroom: A Content Analysis of Published Articles between 2010 and 2015. Educación a distancia. (54). doi: http://dx.doi.org/10.6018/red/54/4

Anexo 1. Solicitud de consentimiento informado.

Santiago de Cali, abril 27 de 2017.

Señor(es)
Padres de familia de grado 11-4 promoción 2017.
I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero
L.C

Cordial saludo de paz y bien.

Los estudiantes del grado 11-4 de la Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero han sido seleccionados para participar en una experiencia pedagógica en el área de matemáticas a través del modelo de Aula Invertida.

El modelo de Aula Invertida se enfoca en el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para incentivar en el estudiante el aprendizaje autónomo en ambientes diferentes al colegio, aprovechando los encuentros en clase para construir conocimiento y el desarrollo e competencias con base en la comunicación y la participación activa.

Con el propósito de brindar información al respecto, describiré brevemente la metodología de trabajo: Los estudiantes desarrollarán una prueba diagnóstica de conocimientos previos que le permitirá al docente determinar las competencias que estos poseen en una temática específica. Posteriormente el profesor coloca a disposición de los estudiantes, material audiovisual de autoría propia donde se explica y profundiza de manera detallada la temática que fue evaluada. Los alumnos pueden acceder a esta información a través de conexión a internet o descargándola a un dispositivo (tablet, computador o celular) para que la revisen cuantas veces sea necesario. Después de repasar,

tomar apuntes pertinentes y realizar las actividades propuestas, los estudiantes se encontrarán en la clase habitual para discutir en pequeños grupos de trabajo los resultados obtenidos. Más adelante, cada grupo compartirá sus descubrimientos, procesos, puntos de vista y estrategias con los demás estudiantes del curso; claro está, bajo la supervisión del docente, quien interviene para guiar la actividad y validar junto con los alumnos el conocimiento adquirido.

Los temas que se abarcan a través de este proyecto hacen parte de los contenidos del segundo periodo académico 2017 y las actividades que se lleven a cabo utilizando la técnica mencionada tendrán una duración aproximada de 45 días, considerando que las sesiones presenciales de acuerdo al horario de la Institución Educativa son los días miércoles y jueves.

Para cerrar la actividad se realizará un examen que abarque la temática tratada. Los resultados de ésta se compararán con los obtenidos en la prueba inicial, de esta manera se espera comprobar si el modelo de Aula Invertida logró desarrollar competencias matemáticas específicas en los estudiantes de grado 11-4 de la I.E Joaquín de Cayzedo y Cuero.

Este ejercicio, en el que esperamos que su hijo(a) o acudido(a) participe, hace parte de la propuesta pedagógica que el profesor Julio Ramírez, docente de cálculo de la Institución, presenta a la Universidad Icesi en el marco de la Maestría en Educación que actualmente adelanta.

Es importante aclarar que, toda la información reunida a través del registro de observaciones directas, entrevistas, talleres, evaluaciones y cualquier otro tipo de evidencia recopilada en clase, será utilizada para fines estrictamente pedagógicos y en todo caso se mantendrá el anonimato de los estudiantes que participen en el proyecto.

Finalizada mi exposición, solicito a Usted de manera respetuosa, el consentimiento para permitir que su hijo(a) o acudido(a), sea partícipe de esta propuesta pedagógica.

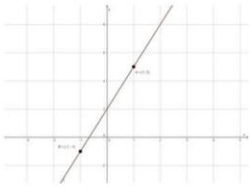
Atentamente

Anexo 2. Prueba diagnóstica

socrative
by MasteryConnect

Prueba de conocimientos previos sobre la tasa de ... Score: _____

1. Los puntos A (-1,-1) y B (1,5) pertenecen al trazo de la recta que aparece en la gráfica. De acuerdo a esto ¿Cuál es la pendiente de esa recta?



(A) -2/6
(B) 2/6
(C) 3
(D) -3

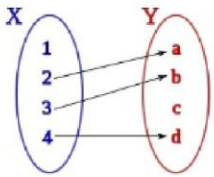
2. Las coordenadas P(3,2) Y Q (3,5) pertenecen a una función lineal, cuya gráfica corresponde a un trazo:

(A) Vertical
(B) Diagonal
(C) Horizontal
(D) Paralelo al eje x

3. El registro tabular que aparece en el recuadro pertenece a una función lineal cuya pendiente es:

(A) 2
(B) 0
(C) Indeterminada
(D) Perpendicular al eje x

4. La figura del recuadro demuestra gráficamente una de las siguientes opciones.



(A) Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.
(B) Toda relación es una función y toda función es una relación.
(C) No toda función es una relación, pero toda relación es una función.
(D) Para que una relación sea función, todos los elementos del rango deben ser imagen de algún elemento del dominio.

5. Una de las coordenadas que pertenece a la función lineal f(x) = -3x+1 es:

(A) P(-2,7)
(B) Q(0,-1)
(C) E(1.4)
(D) K(0,0)

Page 1 of 3

6. En un mismo experimento se comprueba que un objeto recorre 10 metros en 3 segundos, y cuando lleva 7 segundos de movimiento ha recorrido 50 metros. Si consideramos el tiempo como la variable independiente y a la distancia como la variable dependiente ¿Qué está midiendo la tasa de variación media entre esos dos instantes?

A) El tiempo

B) La distancia

C) La velocidad

D) El recorrido

7. En un mismo experimento se comprueba que un objeto recorre 10 metros en 3 segundos, y cuando lleva 7 segundos de movimiento ha recorrido 50 metros. Si consideramos el tiempo como la variable independiente y a la distancia como la variable dependiente ¿Cuál es la tasa de variación media entre esos dos instantes?

A) 10 m/s

B) 43/7 m/s

C) 6 m/s

D) - 7 m/s

8. La figura del recuadro muestra un registro tabular del experimento donde un objeto recorre 10 metros en 3 segundos, y cuando lleva 7 segundos de movimiento ha recorrido 50 metros. Si consideramos el tiempo como la variable independiente y a la distancia como la variable dependiente ¿Qué distancia habrá recorrido el objeto a los 2 y 5 segundos respectivamente?

Distancia	2		10	17		37	50
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7

A) 5 mts y 26 mts

B) 3 mts y 24 mts

C) 7 mts y 28 mts

D) Imposible saberlo

9. La gráfica que ilustra el movimiento del objeto que hemos tratado en las preguntas 7 , 8 y 9 corresponde a una:

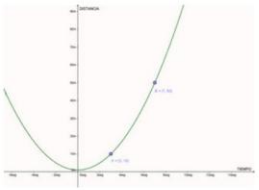
A) Línea recta

B) Párabola

C) Función lineal

D) Pendiente

10. La figura del recuadro muestra la gráfica del experimento que hemos tratado en las preguntas 7 a 10. El trazo recto que pasa por las coordenadas A y B corresponde a:



A) Una recta secante
B) Una recta tangente
C) Una parábola
D) Una pendiente

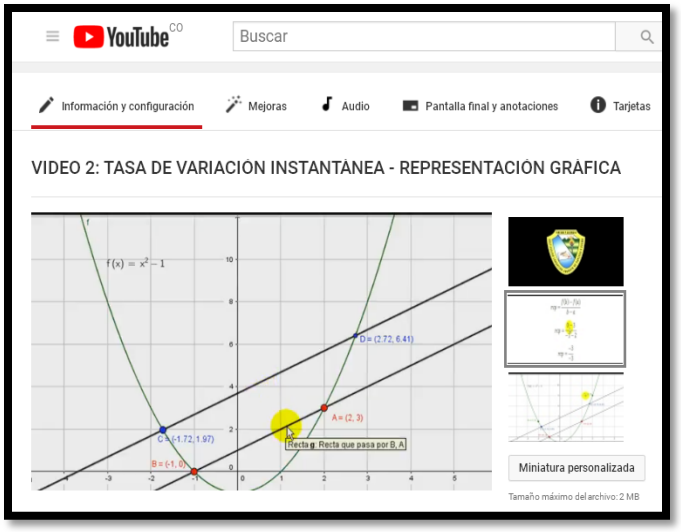
11. La tasa de variación media entre los puntos W(-2,-5) y X(4,-2) corresponde a la pendiente de una recta que pasa por dichas coordenadas. ¿Cuál es el valor de de la pendiente de esa recta?

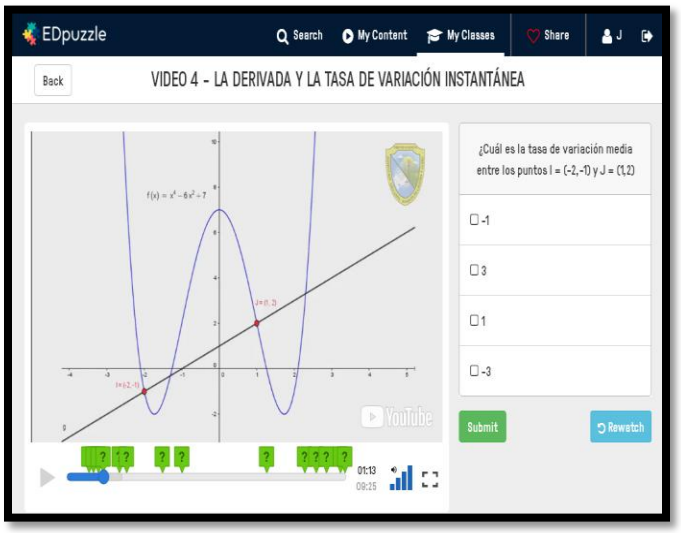
A) -2
B) 1/2
C) -1/2
D) 2

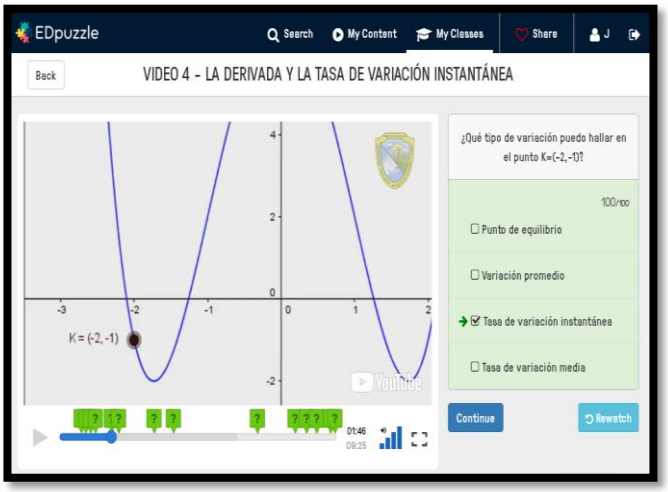
12. En un hogar se ha determinado que la función $f(x) = 2x^2 - 1$ permite conocer el consumo de energía en miles de pesos de acuerdo a la cantidad de personas (x) que lo habitan. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de consumo de energía por persona, cuando el hogar pasa a tener de 3 a 6 habitantes?

A) $ 18000
B) $ 9000
C) $ 60000
D) $34000

Anexo 3. Interfaz EDPuzzle.







Anexo 4. MTP - Procesos evidenciados en la tarea 1.

ASPECTOS	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES		SITUACION PROBLÉMICA												
				Tarea 1												
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Cognitivo	Codificación	Utiliza signos matemáticos	Los reproduce		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x
			Los suprime	x				x								
		Utiliza signos no propios del lenguaje matematico				x	x		x	x	x			x	x	x
	Decodificación	Distingue información que	Corresponde con la codificación	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			No corresponde con la codificación			x			x	x	x			x	x	x
		Compara información representada mediante	Iconos				x		x	x					x	
			Graficos		x	x	x		x	x	x	x	x	x		x
			Tablas			x	x	x	x	x				x	x	x
			Exp algebraicas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			Lenguaje escrito	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Traducción	Infiere operaciones de tratamiento			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Infiere operaciones de conversión				x	x		x	x	x			x	x	x
Afectivo	Disposición	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las tareas propuestas		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Acata recomendaciones o sugerencias		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Comparte información, procedimientos y resultados							x	x				x		x
		Acepta errores y desaciertos				x	x		x	x	x			x	x	x
		Respeta los argumentos de los demás estudiantes			x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x
Tendencia de acción	Persistencia	Busca insistentemente respuesta a las preguntas planteadas				x	x		x	x	x				x	
		Argumenta y justifica los procedimientos utilizados y los resultados hallados				x			x	x				x	x	x
		Reflexiona sobre sus actuaciones			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Anexo 5. MTP - Procesos evidenciados en la solución de la tarea 1 – Video 1.

ASPECTOS	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES		SITUACION PROBLÉMICA												
				Solución de la tarea N°1												
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Cognitivo	Codificación	Utiliza signos matemáticos	Los reproduce		x	x	x		x	x	x					x
			Los suprime	x	x			x				x	x	x	x	x
		Utiliza signos no propios del lenguaje matematico														
	Decodificación	Distingue información que	Corresponde con la codificación	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			No corresponde con la codificación		x		x		x	x	x					x
		Compara información representada mediante	Iconos		x		x		x	x						x
			Graficos		x		x		x	x	x					x
			Tablas				x		x	x	x					
			Exp algebraicas		x		x		x	x	x					x
			Lenguaje escrito	x	x	x		x	x	x		x	x	x	x	x
	Traducción	Infiere operaciones de tratamiento		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Infiere operaciones de conversión			x		x		x	x	x					x
Afectivo	Disposición	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las tareas propuestas		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Acata recomendaciones o sugerencias			x		x	x	x		x					x
		Comparte información, procedimientos y resultados			x		x			x	x					x
		Acepta errores y desaciertos		x		x		x	x			x	x	x	x	
		Respeta los argumentos de los demás estudiantes								x						
Tendencia de acción	Persistencia	Busca insistentemente respuesta a las preguntas planteadas			x				x	x						x
		Argumenta y justifica los procedimientos utilizados y los resultados hallados					x			x	x					
		Reflexiona sobre sus actuaciones		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x

Anexo 6. MTP - Procesos evidenciados en la actividad con el video 2.

ASPECTOS	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES		SITUACION PROBLÉMICA												
				Razón de cambio instantánea - representación gráfica												
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Cognitivo	Codificación	Utiliza signos matemáticos	Los reproduce	x	x	x	x	x	x	x	x			x		x
			Los suprime									x	x		x	
		Utiliza signos no propios del lenguaje matematico														
	Decodificación	Distingue información que	Corresponde con la codificación	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			No corresponde con la codificación	x	x	x	x	x		x				x		x
		Compara información representada mediante	Iconos	x	x	x	x	x		x				x		x
			Graficos	x	x	x	x	x	x	x				x		x
			Tablas	x	x	x	x	x	x	x				x		
			Exp algebraicas	x	x	x	x	x	x	x	x			x		x
			Lenguaje escrito	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
	Traducción	Infiere operaciones de tratamiento		x	x	x	x	x	x	x				x		x
		Infiere operaciones de conversión		x	x	x	x	x	x	x				x		x
Afectivo	Disposición	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las tareas propuestas		x	x	x	x	x	x	x				x		x
		Acata recomendaciones o sugerencias		x	x	x	x	x	x	x				x		x
		Comparte información, procedimientos y resultados				x		x	x	x				x		
		Acepta errores y desaciertos				x	x							x		x
		Respeta los argumentos de los demás estudiantes		x	x			x	x	x						x
Tendencia de acción	Persistencia	Busca insistentemente respuesta a las preguntas planteadas						x		x						x
		Argumenta y justifica los procedimientos utilizados y los resultados hallados		x	x	x		x	x	x				x		x
		Reflexiona sobre sus actuaciones		x	x	x	x	x	x	x	x			x		x

Anexo 7. MTP - Procesos evidenciados en la actividad con el video 3

ASPECTOS	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES		SITUACION PROBLÉMICA: La derivada y la tasa de variación instantánea												
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Cognitivo	Codificación	Utiliza signos matemáticos	Los reproduce	x		x	x	x	x	x	x			x		x
			Los suprime		x							x	x		x	
		Utiliza signos no propios del lenguaje matematico													x	
	Decodificación	Distingue información que	Corresponde con la codificación	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			No corresponde con la codificación			x	x		x	x	x					
		Compara información representada mediante	Iconos		x	x	x	x	x	x	x					
			Graficos	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
			Tablas	x		x	x	x	x	x	x			x		x
			Exp algebraicas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			Lenguaje escrito	x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x
	Traducción	Infiere operaciones de tratamiento		x		x	x	x	x	x	x			x		x
		Infiere operaciones de conversión		x	x	x	x	x	x	x	x			x		x
Afectivo	Disposición	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las tareas propuestas		x	x	x	x	x	x	x	x			x		x
		Acata recomendaciones o sugerencias		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Comparte información, procedimientos y resultados		x		x	x	x	x	x	x			x		x
		Acepta errores y desaciertos		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		Respeta los argumentos de los demás estudiantes		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x
Tendencia de acción	Persistencia	Utiliza otras fuentes para dar respuesta a las preguntas planteadas		x		x	x		x	x	x					
		Argumenta y justifica los procedimientos utilizados y los resultados hallados				x	x		x	x	x			x		
		Reflexiona sobre sus actuaciones		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x