Aprendizaje de las razones trigonométricas a partir de pruebas pragmáticas en un ambiente de geometría dinámica

Edward Antonio Benavides Rosero

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Educación

Asesor:

Henry Arley Táquez Quenguan

Universidad Icesi

Escuela de Ciencias de la Educación, Maestría en Educación

Santiago de Cali, Julio de 2020

Nota de Aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, julio 14 de 2020

A mi Dios,

a Diana Patricia y Santiago,

a mis padres y hermana,

a mi familia y amigos.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al profesor Henry Arley Táquez Quenguan, Máster en Sociedad de la Información y el Conocimiento, director de este trabajo de grado, por sus valiosas orientaciones.

Agradezco a la rectora de la I.E. Liceo Departamental, Luz Adriana Giraldo por su apoyo en la gestión de mi solicitud de beca para la Maestría, ante la Gobernación del Valle del Cauca. Igualmente, agradezco a la profesora Luz Elena Jiménez, colega del área de Matemáticas, por permitirme utilizar su tiempo de cátedra académica con sus estudiantes para la implementación de la secuencia didáctica.

También doy un especial agradecimiento a los estudiantes del grado 10-5 del año lectivo 2019 que participaron en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica objeto de esta investigación: Michelle Galeano Cruz, Nicolás Andrade Salamanca, Andrés Felipe Bravo Medina, Génesis Mesa Bravo, Santiago Giraldo Gutiérrez y Ricardo Pabón Serna, por su buena disposición hacia el trabajo propuesto.

Por último, agradezco a todos aquellas personas que de una u otra manera hicieron un aporte en la elaboración de éste trabajo de investigación.

Resumen

Esta investigación tiene el objetivo de analizar cómo la enseñanza de las razones trigonométricas por medio de una *secuencia didáctica* que involucra *pruebas pragmáticas* en un ambiente de geometría dinámica con “GeoGebra”, puede desarrollar la competencia matemática de razonamiento de los estudiantes de grado 10° de la institución educativa Liceo Departamental de Cali, en el año lectivo 2019. Para alcanzar este objetivo la investigación siguió un enfoque metodológico cualitativo de alcance descriptivo, desde la perspectiva de un *estudio de casos,* como lo sugiere la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica.

Como uno de los hallazgos más importantes, se tiene la conclusión que establece que los estudiantes no tienen tantas dificultades en el desarrollo de la competencia de razonamiento matemático (en especial en el proceso de visualización), sino más bien, que las dificultades se presentan es en el desarrollo de la competencia de comunicación matemática. Al trabajar las razones trigonométricas con las actividades mediadas por Geogebra, se pudo observar que los estudiantes en general, si analizan y visualizan las propiedades y relaciones existentes entre los conceptos y las figuras, pero se les dificulta usar el lenguaje apropiado para expresar sus ideas de manera correcta y formal.

Palabras Clave: Educación matemática, razones trigonométricas, ambiente de geometría dinámica, aprendizaje por descubrimiento, visualización, pruebas pragmáticas.

Abstract

This research aims to analyze how the teaching of trigonometric ratios by means of a didactic sequence that involves pragmatic proofs in a dynamic geometry environment with “GeoGebra”, can develop the mathematical reasoning competence of the 10th grade students of the educational institution *Liceo Departamental* from Cali, in the school year 2019. To achieve this objective, the research followed a qualitative methodological approach of descriptive scope, from the perspective of a case study, as suggested by the research methodology of Didactic Engineering.

As one of the most important findings, there is the conclusion that the students usually do not have as many difficulties in developing the mathematical reasoning competence (especially in the visualization process), but rather, that the difficulties present are in the development of mathematical communication competence. By working the trigonometric ratios with the activities mediated by Geogebra, it was observed that the students in general, do analyze and visualize the properties and relationships between the concepts and the figures, but they find it difficult to use the appropriate language to express their ideas correctly and formally.

Key Words: Mathematics education, trigonometric ratios, dynamic geometry environment, discovery learning, visualization, pragmatic proofs.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de anexos

Introducción

El presente documento expone los elementos teóricos, los aspecto técnicos y los resultados del trabajo de grado “Aprendizaje de las razones trigonométricas a partir de pruebas pragmáticas en un ambiente de geometría dinámica”, cuyo título sugiere implícitamente un proceso de diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones problema o conjunto de actividades en clase para enseñar las razones trigonométricas, mediadas con un recurso tecnológico específico.

Así pues, se aclara que las actividades se diseñaron desde el amplio enfoque didáctico de la *Resolución de Problemas*, integrado con el enfoque pedagógico del aprendizaje por descubrimiento, y en particular se aplica la técnica de aprendizaje colaborativo reconocida como *resolución de problemas por parejas pensando en voz alta* (RPPPVA). Con el desarrollo de estas actividades se intenta favorecer los procesos de exploración, visualización, justificación y construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes, y están asociadas con la apropiación de las pruebas o justificaciones de las relaciones entre las líneas trigonométricas asociadas a cada razón trigonométrica con las curvas de las funciones trigonométricas. Por esta razón, el planteamiento didáctico de las actividades diseñadas, se basa en lo expresado por Nicolás Balacheff (2000) sobre las pruebas pragmáticas, como uno de los procesos de prueba utilizado por los estudiantes de matemáticas.

El enfoque metodológico a seguir para el proceso de recolección, sistematización y análisis de datos es el de una investigación cualitativa, siguiendo la estrategia de estudio de casos. Por lo tanto, entre las diversas perspectivas metodológicas específicas para la investigación en Educación Matemática, que se integra con este tipo de estrategia se escogió la de la *Ingeniería Didáctica*. En consecuencia, el marco teórico de esta investigación presenta los elementos necesarios para establecer el adecuado análisis preliminar, la concepción y el análisis a priori de las actividades de la secuencia didáctica. Entre ellos se tienen en cuenta todo lo relacionado con los aspectos del orden matemático, histórico-epistemológico, didáctico, curricular y tecnológico. Luego se realiza la etapa de implementación, y por último, la etapa de análisis de resultados (a posteriori) y evaluación.

Las actividades de la secuencia didáctica se diseñaron haciendo uso de un Software o Sistema de Geometría Dinámica (S.G.D), muy conocido en la actualidad, llamado Geogebra. Por lo tanto, también se tuvieron en cuenta las consideraciones teóricas sobre la enseñanza de la demostración en geometría (usando pruebas pragmáticas) mediada por un S.G.D. desde su ámbito didáctico y curricular.

Al final, con base al análisis de los resultados, se logra confirmar la hipótesis de esta investigación, respecto al desarrollo de la competencia matemática de razonamiento y el proceso de visualización, mediante la secuencia didáctica implementada con los estudiantes. Además, en dicho análisis al evaluar los procesos de solución realizados por los estudiantes, quedó expuesto un posible problema de investigación a futuro, relacionado con el desarrollo de la competencia de comunicación matemática.

La secuencia didáctica resultante de esta investigación se pondrá a disposición del público, tanto los archivos de figuras en Geogebra, como las respectivas guías-taller por medio de la plataforma de Geogebra.org en la sección de recursos. Por último, se espera que el planteamiento teórico, la secuencia didáctica diseñada, el proceso de sistematización y las conclusiones obtenidas en este trabajo, sean de interés para todos los colegas, en especial, para aquellos que tienen la misma inquietud profesional por innovar sus prácticas pedagógicas, comprometidos con la tarea de la enseñanza de las matemáticas; y en particular de la geometría, en la educación básica y media.

1. Planteamiento del problema

En la Institución Educativa Liceo Departamental, de acuerdo al *Informe por colegio 2017 de resultados de las Pruebas Saber de 9°* (aplicadas el 2016), se evidencia en el área de Matemáticas una problemática en cuanto al desempeño de los estudiantes en las competencias (comunicación, razonamiento y resolución) relacionadas con los aprendizajes propios del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. En la competencia de comunicación el 41% de los estudiantes *no identifican características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan*, en la competencia de resolución el 32% de los estudiantes *no resuelven ni formulan problemas usando modelos geométricos* y en la competencia de razonamiento el 41% de los estudiantes *no argumentan formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos*, (MEN-Icfes, 2017.pp. 16-18). Con lo anterior, se puede afirmar que existe una posible falencia ya sea de carácter curricular o didáctico, causante de un bajo desempeño de los estudiantes de grado 9° en las competencias que se relacionan con los conceptos, procesos y objetos propios de la geometría escolar.

Al respecto, en la institución educativa se ha venido trabajando desde el año 2016 la actualización de los planes de estudio de acuerdo a las exigencias realizadas por el MEN siguiendo los dos documentos oficiales para la organización curricular: *Lineamientos Curriculares* y *Estándares Básicos de Competencias*, así como los documentos de referencia: *Derechos Básicos de Aprendizaje* y *Mallas de Aprendizaje*. Por ejemplo, se propuso (sin llevarse a cabo) como en noveno, separar una hora de las seis que tiene a la semana el área de matemáticas, para trabajar solo geometría en grado sexto a octavo. Sin embargo, en cuanto a las prácticas de enseñanza cotidianas de los docentes, aún hay mucho trabajo por hacer para reformular la enseñanza tradicional de la geometría, y en especial de la trigonometría.

Entonces, para aportar a la tarea de mejorar la enseñanza de la geometría en la I.E. Liceo Departamental, la presente propuesta de investigación plantea la problemática de la enseñanza tradicional (cuyo énfasis es más algebraico que geométrico) de las razones trigonométricas, objeto matemático que se trabaja en el primer periodo académico de grado 10°, de acuerdo al *Plan de Área de Matemáticas* de la institución, que sigue lo propuesto por los estándares básicos de competencias del MEN (2006).

Respecto a la problemática de la *enseñanza tradicional* de las razones trigonométricas se presenta, como referente a nivel académico formal, lo expresado en la tesis doctoral de Fiallo (2010):

> La trigonometría es un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo al enfoque y contexto planteado. Por ejemplo, al cambiar del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, se cambia de una definición geométrica a una definición analítica, se cambia de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo a analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia. (p. 45)

Además, se reseña el trabajo de Arenas et al. (2012), quienes realizaron una investigación con estudiantes entre los 15 y 17 años, cuyo resultado originó la siguiente clasificación de las dificultades que tienen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las razones trigonométricas:

1. Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados a problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.

2. Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.
3. Dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas en una misma representación, a partir de los datos dados en el problema. (p. 361)

La primera dificultad mencionada se refiere a la estructura conceptual (conceptos, procedimientos y destrezas que requiere un estudiante para solucionar una tarea) de las razones trigonométricas de un ángulo, y las dos últimas dificultades hacen énfasis en las relaciones generadas en las traducciones entre los diferentes sistemas de representación.

Teniendo un panorama de las problemáticas que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, que podrían ser los mismos que estén teniendo los estudiantes del Liceo Departamental, se precisa que esta investigación expresa un interés especial por el diseño de una secuencia didáctica, desde el enfoque metodológico de la microingeniería didáctica, haciendo énfasis en las consideraciones teóricas que se deben tener en cuenta para su realización, es decir, un análisis a priori desde las dimensiones matemática, histórica, didáctica, curricular, pedagógica y tecnológica.

Con lo anterior, se diseña una alternativa metodológica para la enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas con los estudiantes de grado 10° de la I.E. Liceo Departamental, en la que se involucran *pruebas pragmáticas* (entendidas según lo expuesto por Balacheff, 2000) en un ambiente de geometría dinámica con *GeoGebra* (software educativo de licencia libre instalado sin dificultades legales en los computadores de las salas *Tit@* de la institución educativa).

Cabe aclarar que la finalidad de la investigación no es solo diseñar e implementar una secuencia didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas, sino que el interés de esta investigación se centrará en el aprendizaje, es decir, en analizar los comportamientos y respuestas que produce en los estudiantes el trabajo con las actividades propuestas, evidenciando lo relacionado con el desarrollo de la competencia de razonamiento matemático, y en especial con el proceso de *visualización*.

1.1. Formulación del problema

El problema que dirige el desarrollo de esta investigación se plantea mediante la siguiente pregunta: ¿Cómo una *secuencia didáctica* que involucra *pruebas pragmáticas* en un ambiente de geometría dinámica con GeoGebra, para la enseñanza de las razones trigonométricas, desarrolla la competencia matemática de razonamiento geométrico en los estudiantes de grado 10° de la I.E. Liceo Departamental de Cali, en el año lectivo 2019?

1.2. Hipótesis

Una secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas en la que se plantea a los estudiantes una serie de actividades mediadas por un ambiente de geometría dinámica (que facilita la manipulación de los objetos geométricos), donde los estudiantes exploren, visualicen y conjeturen sobre las propiedades y relaciones dadas entre los conceptos y las figuras propuestas, permitirá analizar cómo se desarrolla la competencia matemática del razonamiento, y en especial el proceso de visualización. Se espera que el desarrollo de dicho proceso, y la competencia matemática respectiva, se produzca cuando los estudiantes asocien los conceptos previos que poseen, con las propiedades y las relaciones geométricas que se presentan en las figuras dinámicas mostradas en la pantalla de la computadora, para expresar respuestas adecuadas a las preguntas planteadas.

1.3. Objetivos

Para direccionar el desarrollo de la investigación se plantea el siguiente objetivo general y sus respectivos objetivos específicos.

1.3.1. Objetivo general

Establecer en qué forma una *secuencia didáctica* que involucra *pruebas pragmáticas* en un ambiente de geometría dinámica con GeoGebra, para la enseñanza de las razones trigonométricas, desarrolla la competencia matemática de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado 10° de la I.E. Liceo Departamental de Cali, en el año lectivo 2019.

1.3.2. Objetivos específicos

- Diagnosticar el estado de la competencia matemática de razonamiento geométrico y del aprendizaje de las razones trigonométricas en los estudiantes de los grados noveno y décimo de la I.E. Liceo Departamental de Cali en el año lectivo 2018.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas, que permita el desarrollo de la competencia del razonamiento geométrico, a partir de pruebas pragmáticas en un ambiente de geometría dinámica con GeoGebra.
- Evaluar la implementación de la secuencia didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas, a partir de pruebas pragmáticas en un ambiente de geometría dinámica con GeoGebra, determinando alcances y limitaciones de la misma para el desarrollo de la competencia matemática de razonamiento geométrico, en los estudiantes de grado décimo de la I.E. Liceo Departamental de Cali del 2019.

1.4. Justificación

Como se mencionó en la descripción del problema, en la Institución Educativa Liceo Departamental de Cali desde el año 2016 se evidencia en los resultados de las Pruebas Saber de Grado 9° (MEN-Icfes, 2017), una falencia en el aprendizaje de los conceptos, procesos y objetos geométricos. Del mismo modo, desde el año 2017, los resultados académicos en el área de Matemáticas (Trigonometría) para el primer periodo académico, indican que cerca del 35% de los estudiantes de grado 10° tuvieron un bajo desempeño (valoración entre 1,0 y 2,9 en escala de 1.0 a 5.0). Por lo tanto, pensar en una forma distinta a la tradicional para enseñar un tema fundamental de las matemáticas escolares, como lo es "las razones trigonométricas", sin lugar a duda, es algo necesario y urgente en el contexto pedagógico de la institución educativa en mención, esto en favor de un incremento de la calidad educativa del sistema escolar público.

Ahora bien, al revisar el estado del arte respecto a la enseñanza de las razones trigonométricas, se encuentra un gran número de trabajos de investigación en los que se proponen secuencias didácticas diversas y en la mayoría aplicando algún tipo de TIC, ya sea una plataforma con recursos didácticos o el uso de un software de geometría dinámica como Geogebra[1]. Entonces, cabe aclarar que esta investigación es distinta a las demás, porque el enfoque metodológico aproximado a una microingeniería didáctica para el diseño de la secuencia es diferente; así como, el énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial (en

---

[1] Cabe señalar que aunque varios investigadores usan los términos sistema o software de geometría dinámica (SGD) y ambiente de geometría dinámica (AGD) indistintamente, en este trabajo si se hace una distinción: SGD es el programa computacional que permite la manipulación de objetos geométricos para la exploración de sus propiedades, mientras que un AGD es el dispositivo en pantalla creado con dicho software para enseñar de manera intencional un objeto matemático. (En el apartado 2.9 de este trabajo se precisa más sobre el término AGD).

relación a un sistema geométrico), y específicamente, al desarrollo de la *visualización* como un proceso de la competencia matemática de razonamiento geométrico. Este énfasis se presenta como respuesta pedagógica a los indicadores dados por las pruebas Saber de Matemáticas de los estudiantes de grado noveno del año lectivo 2017, pues precisamente estos fueron los estudiantes de grado décimo mencionados que obtuvieron bajo desempeño en Trigonometría el primer periodo del año lectivo 2018. La idea de esta decisión es evitar la reproducibilidad del problema presentado en los años anteriores, con los estudiantes de grado décimo que serán los participantes de la investigación en el año lectivo 2019.

Por último, al tener un análisis con sentido reflexivo sobre el diseño de la secuencia didáctica como un recurso pedagógico[2] desde la perspectiva instrumental según Guin y Trouche (2007), el resultado de este trabajo deja planteado una interesante gama de opciones de estudio para futuras investigaciones en el campo de la Educación Matemática.

[2] En esta investigación el concepto de recurso pedagógico se refiere a situaciones matemáticas (didácticas) que se pueden hacer evolucionar en el contexto de una comunidad de práctica de profesores y un trabajo colaborativo. Dicho recurso posibilita su adaptación y transformación, convirtiéndose en un instrumento que cualifica la práctica del profesor (Guin y Trouche, 2007).

2. Marco teórico

Inicialmente, se presenta un breve estado del arte de la problemática en cuestión, es decir, un análisis reflexivo sobre trabajos de investigación relacionados con la temática de la enseñanza de las razones trigonométricas mediada por recursos tecnológicos.

Por otro lado, para dar sustento teórico al diseño de la secuencia didáctica, es necesario primero precisar la idea de didáctica, situación didáctica y secuencia didáctica que se tendrá en esta investigación. Luego, se presentan las precisiones teóricas que sustentan el diseño de la secuencia didáctica desde la perspectiva metodológica de la microingeniería didáctica, la cual tiene en cuenta los aspectos relacionados con el objeto matemático a tratar. Para esto, se empieza con las consideraciones curriculares (de acuerdo a los documentos oficiales del MEN), por las cuales se plantea un *modelo curricular* que distingue, a partir de los tres ejes de organización curricular propuestos por el MEN (1998), las principales categorías de análisis que se despliegan en el presente marco teórico de referencia.

2.1. Estado del arte

El magister Oscar Eduardo Andrade Mendoza (2015), de la Universidad Nacional de Colombia, realizó un trabajo de investigación, titulado *Diseño de una propuesta de aula para enseñar las razones trigonométricas en el grado décimo de la Institución Educativa Presbiterio Bernardo Montoya Giraldo del municipio de Copacabana Antioquia*. En esta investigación se propone resolver la pregunta problema: ¿Cuál debe ser la propuesta para mejorar la enseñanza de las razones trigonométricas en la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo en el grado décimo para que el aprendizaje sea significativo? Así pues, el investigador propone el uso de diversas herramientas tecnológicas para presentar a sus estudiantes el tema de las razones trigonométricas, entre ellas la plataforma Moodle para la planeación del curso, proyección de videos, y software de geometría dinámica como Geogebra y Cabri Géomètre, para la elaboración de gráficas, pero no de figuras dinámicas.

En su metodología, la investigación se centra en un análisis cualitativo sobre las dinámicas de clases y las actitudes de los estudiantes para mejorar su aprendizaje y que este sea significativo, mediante el trabajo de situaciones en contextos reales y cotidianos. Sin embargo, no se hace énfasis en desarrollar una competencia matemática en especial desde el tratamiento de las razones trigonométricas. De este trabajo se puede destacar como ejemplo a seguir con algunas modificaciones, el protocolo que utiliza para la presentación de la secuencia didáctica diseñada, así como la organización del marco teórico propuesto.

Otro trabajo de investigación de gran interés para este proyecto, es el realizado por el magister Danny Luz Algarín de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección de Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia (España). El trabajo titulado *Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas*, ofrece una interesante fundamentación para los investigadores con relación al tema de la enseñanza de las razones trigonométricas, desde el enfoque del desarrollo de la competencia matemática de razonamiento, implementando un software de geometría dinámica.

Por otra parte, acerca del trabajo del doctor Fiallo, cabe mencionar que en la Universidad Industrial de Santander es director del proyecto de investigación titulado *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*, que tiene el mismo título de su tesis doctoral (2010), en la cual se presentó como objetivo aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Para tal fin Fiallo diseñó, implementó y evaluó una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, enfocándola hacia el desarrollo de las habilidades de demostración.

En su análisis destacó la existencia de continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo, por parte de los estudiantes, de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas, y del mismo modo, se identificaron y caracterizaron los orígenes de las dificultades que se presentan en los procesos de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones.

En los resultados de la investigación del doctor Fiallo se propone una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria y se adapta el *modelo de Toulmin*[3], para el análisis de la unidad o distancia cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, según ésta estructura. Finalmente, Fiallo planteó cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados en los procesos de argumentación y de demostración. Por tanto, el trabajo del doctor Fiallo es de suma importancia como referente teórico y metodológico para la presente investigación. No obstante, se aclara que la diferencia del proyecto mencionado con el presente trabajo, es que en esta investigación el análisis no se centra en la formalidad del proceso de demostración o prueba matemática, sino que se enfoca en el proceso de

[3] Modelo para planear, analizar y valorar la calidad de los argumentos en una investigación científica, que consta de tres categorías principales: la aserción (tesis o conclusión a defender), la evidencia (datos, hechos o pruebas) y la garantía (principio, teoría o ley que permite el paso de la evidencia a la aserción). Las otras tres categorías de este modelo: son el respaldo, el cualificador modal y la reserva, que caracterizan la validez de la garantía (Rodríguez, 2004, p. 5).

visualización generado en los estudiantes, para el desarrollo de la competencia de razonamiento geométrico en los mismos.

2.2. Didáctica de las matemáticas, situaciones didácticas y secuencia didáctica

Como el objetivo general de esta investigación incluye el diseño, la implementación y la evaluación de una secuencia didáctica, se hace necesario aclarar esta categoría desde los conceptos abarcadores tales como: *didáctica de las matemáticas y situación didáctica*.

Para especificar la comprensión del término "Didáctica" en un sentido amplio, se acude a la concepción de Vasco, C. et al., quien la define como la disciplina que piensa y habla sobre el cómo de la enseñanza, lo que la convierte en una rama de la Pedagogía. Entre los principales temas de los que se encarga la Didáctica se tienen el currículo y los métodos de enseñanza (2008, p. 31). Así pues, este trabajo de investigación se enmarca en el campo de acción de la Didáctica de las Matemáticas, pues se intenta analizar un método de enseñanza de un conocimiento matemático particular (las razones trigonométricas).

De igual manera, para el establecimiento teórico de esta investigación, se aclara que se enmarcará en la Didáctica de las Matemáticas de Francia, porque ésta se caracteriza, según Michelle Artigue, por haber adoptado, desde sus comienzos, una aproximación global a los fenómenos de enseñanza, centrada en la noción de sistema didáctico: "sistemas abiertos al contexto, en los que tienen lugar las relaciones entre los profesores, los estudiantes y el conocimiento" (1995, p. 11).

Más aún, Artigue et al. (1994), citado por Artigue (1995), afirman que hay tres aproximaciones teóricas principales, complementarias entre sí y parcialmente articuladas que existen en la actual didáctica francesa de las matemáticas, que de manera muy esquemática son:

• Una aproximación “cognitiva” que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de G. Vergnaud en el área de la teoría de los campos conceptuales.

• Una aproximación a través de los “saberes” que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de Y. Chevallard en el área de la teoría de la transposición didáctica, en un principio, antes de extenderse a una aproximación antropológica más global del campo didáctico.

• Una aproximación a través de las “situaciones” que es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es Guy Brousseau. (p. 11)

Así pues, esta investigación se inclina por la aproximación teórica de las situaciones didácticas, y por tal razón, se tiene en cuenta este concepto para realizar la secuencia didáctica objetivo de la misma. De acuerdo a Tobón et al. (2010, p. 20), las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas.

En la Educación Basada en Competencias (EBC)[4], las secuencias didácticas son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje en el marco del aprendizaje o refuerzo de competencias; para ello se retoman los principales componentes de dichas

[4] La educación basada en competencias es una nueva orientación educativa que pretende dar respuestas a la sociedad de la información. El concepto de competencia, tal y como se entiende en la educación, en resumen son *saberes de ejecución*. Puesto que todo proceso de “conocer” se traduce en un “saber”: saber pensar, saber desempeñar, saber interpretar, saber actuar en diferentes escenarios, desde sí y para los demás (dentro de un contexto determinado). (Argudin, 2008, p.3).

secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia), actividades pertinentes y evaluación formativa (orientada a valorar sistemáticamente el proceso).

2.3. Aspectos curriculares

Este apartado presenta lo referente al establecimiento del objeto matemático “razones trigonométricas” en el currículo del área de Matemáticas, de acuerdo a los documentos oficiales del MEN. Primero se realizan las precisiones sobre el modelo curricular a seguir, de acuerdo a uno de los modelos propuestos en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998). Después, se realizan las consideraciones específicas de los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), en cuanto a las relaciones del objeto matemático tratado (razones trigonométricas) con los estándares en coherencia vertical (relación con estándares dentro del mismo tipo de pensamiento matemático, es decir el espacial y los sistemas geométricos; tanto en el mismo grupo de grados 10°-11°, como con los otros grupos de grados 6°-7° y 8°-9°) y en coherencia horizontal (relación con estándares de los otros cuatro tipos de pensamientos matemáticos, ya sea en el mismo grupo de grados 10°-11° o en los anteriores 6°-7° y 8°-9°).

2.3.1. Modelo curricular

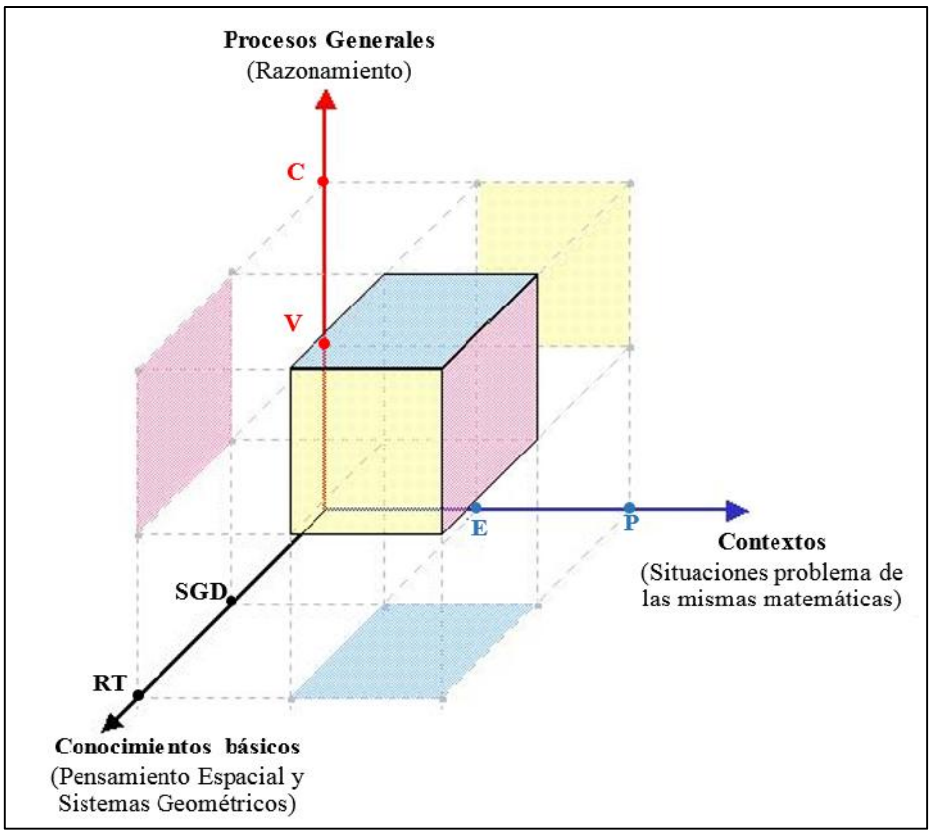
En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del MEN, se propone una visión global e integral del quehacer matemático que responde a la necesidad de relacionar los contenidos del aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes, y al mismo tiempo de presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista. Para este fin, se deben considerar tres aspectos fundamentales para organizar el currículo de matemáticas en una forma sistemática:

1. *Los procesos generales,* que tienen que ver con el aprendizaje.
2. *Los conocimientos básicos,* que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.
3. *El contexto,* referido a los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. (MEN, 1998, p. 20)

En los mismos Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se propone un modelo para evidenciar, de manera gráfica, la relación entre los tres componentes de la organización curricular, como los ejes de un espacio tridimensional, el cual permite analizar las precisiones curriculares que se tienen sobre la secuencia didáctica objeto de esta investigación. Con base a dicho modelo, se representa la figura 1 para dar cuenta del modelo curricular a seguir:

Figura 1

Modelo de organización curricular



Fuente: Elaboración propia, con base en MEN (1998, p. 20)

- En el eje de los “Conocimientos Básicos”, que pertenecen al pensamiento espacial y los sistemas geométricos, se ubican las *razones trigonométricas (RT)* con un tratamiento específico desde un *sistema de geometría dinámica (SGD).*
- En el eje de los “Procesos Generales”, se destaca el de Razonamiento (desde el acto de una prueba pragmática) con los sub-procesos de *visualización (V)* y *conjeturación (C).*
- En el eje de los “Contextos”, se precisa que son situaciones problemas extraídas desde las mismas matemáticas, siendo estas actividades de *exploración (E)* y de *prueba (P).*

Como se puede observar en la figura 1, al proyectar los distintos planos formados por dos ejes (cuadrados), se obtiene un cubo que representa el espacio en el que se encuentran inmersas las actividades de la secuencia didáctica diseñada, dando lugar a las interpretaciones de las distintas relaciones que se puedan dar entre los tres ejes componentes del modelo curricular.

El modelo curricular planteado ofrece una buena representación de lo que se analiza en esta investigación, sin embargo, es muy general y puede obviar ciertos aspectos particulares que son de igual importancia. Por tal motivo, es necesario realizar un tratamiento particular para cada uno de los ejes componentes del modelo, de los cuales se determinan las distintas categorías de análisis que serán tenidas en cuenta para seguir desarrollando el marco teórico del presente trabajo.

2.3.2. Estándares básicos de competencias en matemáticas

De acuerdo a lo propuesto por el MEN (2006), en el quinto estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos para el grupo de grados 10° y 11°, se propone trabajar el objeto matemático de las razones trigonométricas desde una perspectiva funcional: “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" (p. 88). Ahora bien, para los efectos prácticos de las actividades que se plantean en esta investigación, aunque se pretenda un tratamiento más geométrico que algebraico de las razones trigonométricas, es necesario asociar en *coherencia horizontal* el tercer estándar del pensamiento variacional y sistemas algebraicos del grupo de grados 8°-9°: "Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas" (p. 87); esto porque el estudiante debe expresar sus respuestas y observaciones al final de las actividades con un lenguaje algebraico aproximado al formal, sin importar que las pruebas propuestas sean pragmáticas.

Por otro lado, respecto a la *coherencia vertical*, se hace también necesario la asociación del tercer estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos para el grupo de grados 8° y 9°: "Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas" (MEN, 2006, p. 86); esto debido a que la mayoría de los procesos que se realizan con las razones trigonométricas enfocados a desarrollar la visualización y el razonamiento, exigen que el estudiante reconozca y aplique en forma eficaz los criterios de semejanza de triángulos.

Por último, en coherencia vertical dentro del mismo tipo de pensamiento y grupo de grados 10°-11°, se plantea la relación con el cuarto estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos: "Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias" (p. 88); pues, esto es lo que debe hacer el estudiante al momento de resolver cada una de las actividades propuestas en la secuencia didáctica. Con el anterior análisis de los estándares básicos de competencias, se facilita la siguiente identificación de los conocimientos conceptuales y procedimentales involucrados en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica diseñada.

2.3.3. Conocimiento conceptual y procedimental

En palabras de Luis Rico (1995), desde un punto de vista cognitivo, el conocimiento matemático puede ser organizado en dos grandes campos:

1. *El conocimiento conceptual*, que se refiere a una serie de informaciones conectadas entre sí mediante múltiples relaciones, que constituyen lo que se denomina estructura conceptual. Dentro de este campo se reconocen tres niveles:

    a. *Los hechos*, que son unidades de información que sirven como registro de acontecimientos.

    b. *Los conceptos*, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con un signo o un símbolo.

    c. *Las estructuras conceptuales*: que sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos. (p. 14)

2. *El conocimiento procedimental*, que se refiere a la forma de actuación o de ejecución de tareas matemáticas que van más allá de la ejecución mecánica de algoritmos. En este también se distinguen tres niveles:

    a. *Las destrezas* consisten en transformar una expresión simbólica desde una forma dada hasta otra forma, y para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos. Por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos.

    b. *Los razonamientos* se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos.

c. *Las estrategias*, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Ellas operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados. (p. 15)

Con estos referentes claros, se procede a identificar los conceptos y procesos involucrados en las actividades de la secuencia didáctica propuesta a los estudiantes, diferenciando aquellos que ya deberían reconocer y haber aprendido en grados anteriores (conceptos y procesos previos hasta grado noveno), para el aprendizaje de las razones trigonométricas, con el desarrollo de la competencia matemática de razonamiento, desde los sub-procesos de la visualización y la conjeturación.

Conceptos previos:

- Triángulo rectángulo (ángulo recto, ángulo agudo, catetos, hipotenusa)
- Razón geométrica (antecedente, consecuente, segmentos, longitudes)
- Proporcionalidad (proporciones, segmentos proporcionales)
- Congruencia de ángulos
- Semejanza de triángulos (criterios de semejanza LLL, LAL, AA)
- Teorema de Pitágoras (fórmula).

Conceptos por aprender:

- Razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente)
- Líneas trigonométricas (razones trigonométricas en el círculo unitario)
- Identidades trigonométricas fundamentales (identidades pitagóricas)
- Funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente (dominio, rango, crecimiento y decrecimiento, valores positivos y negativos, periodo).

Procesos previos:

- Calcular razones geométricas (división de longitudes)
- Establecer una proporción entre lados correspondientes de dos triángulos
- Determinar congruencia entre ángulos de dos triángulos
- Comprobar semejanza de triángulos con los criterios
- Relacionar la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo por la fórmula pitagórica.

Procesos por aprender:

- Definir las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente)
- Relacionar valores de razones trigonométricas con longitudes de las líneas trigonométricas correspondientes en el círculo unitario
- Formular las identidades trigonométricas fundamentales aplicando el teorema de Pitágoras
- Determinar las propiedades (dominio, rango, crecimiento y decrecimiento, valores positivos y negativos, periodo) de la gráfica cartesiana de una función trigonométrica básica: seno, coseno, tangente.

2.4. Pensamiento espacial y sistemas geométricos

De acuerdo al modelo curricular presentado en el apartado 2.3.1., en el eje de los *Conocimientos básicos* se precisó que el objeto matemático de las razones trigonométricas será abordado desde una perspectiva del desarrollo del pensamiento espacial en un sistema geométrico específico. Por lo tanto, se aclara a continuación de qué manera se entienden estos dos conceptos.

En primer lugar, el MEN (1998) afirma que el pensamiento matemático se subdivide en cinco tipos de pensamiento, y cada uno es asociado a un sistema matemático específico: "el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos" (p.19). De lo anterior, cabe señalar que aunque el concepto de razón esté más relacionado al proceso de medición y el significado etimológico de trigonometría indique una relación directa con la medida, para los intereses de esta investigación, el objeto matemático de las razones trigonométricas se enmarcará desde los procesos de desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Así pues, de acuerdo a lo expresado por el MEN (1998), se define el pensamiento espacial como: "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (p. 37). En este sentido, se puede afirmar que la secuencia didáctica diseñada con el fin de comprender las propiedades y relaciones entre las razones trigonométricas, a partir de la manipulación de representaciones de objetos del espacio, como lo son los segmentos (lados de triángulos rectángulos) y el círculo unitario, permite el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático.

En segundo lugar, respecto al desarrollo del pensamiento geométrico, las investigaciones modernas indican que el proceso su construcción sigue una evolución lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales. Para hablar de este proceso, se tiene un referente teórico que no puede faltar en investigaciones relacionadas con el razonamiento geométrico, *el modelo de los esposos Van Hiele*. Este modelo describe con exactitud la evolución y ha adquirido cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a investigaciones en geometría escolar. Pierre van Hiele (1984) originalmente propone cuatro niveles de desarrollo del razonamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría (y deja la opción de proponer un quinto nivel, el cual luego replantean con su esposa); de estos se destacan los primeros cuatro (llamados inicialmente nivel 0 a nivel 3) para los efectos prácticos del diseño y análisis de la secuencia didáctica, debido a que estos niveles son los que se pretenden alcanzar con el desarrollo de las actividades en este trabajo:

> El nivel 1, (llamado también nivel base). Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes.
>
> En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de "la misma forma".
>
> El nivel 2, es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc.
>
> En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.
>
> El nivel 3. Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

> En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.
>
> El nivel 4. Es ya de razonamiento deductivo; en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones. (pp. 249-250)

Aunque los niveles planteado por P. van Hiele son una buena aproximación a las etapas en las que progresa el razonamiento geométrico en los estudiantes, en la práctica un docente debe ser más crítico con respecto a ellos, pues la descripción ofrecida en estos niveles está más orientada a la práctica de la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones formales (llamadas en T o a doble columna), y por lo tanto, no coincide con la propuesta de la geometría activa que sugiere los lineamientos curriculares oficiales (MEN, 1998, p.39). Al respecto, cabe señalar que las actividades aquí propuestas se orientan a desarrollar el paso del nivel base de visualización hasta el nivel cuatro, hacia la formulación y discusión de conjeturas, sin realizar una demostración formal.

En tercer lugar, el MEN (2006, p. 62) define los sistemas[5] geométricos como complejos sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales, que al igual que todos los sistemas, se componen de tres aspectos: los elementos de que constan (puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas, cuerpos sólidos o huecos limitados o

---

[5] De acuerdo a las recomendaciones de Carlos E. Vasco (1985): El marco teórico del programa de matemáticas propone al maestro, para la preparación de su clase, enfocar los diversos aspectos de las matemáticas como *sistemas* y no como conjuntos. Se trata de acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, con un *enfoque sistémico* que los comprenda como *totalidades estructuradas*, con sus *elementos*, sus *operaciones* y sus *relaciones*. (p.49)

ilimitados, etc.), las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos. En ese aspecto, se precisa que el sistema geométrico que se trabaja en la escuela es en general el propuesto por la geometría euclidiana, no obstante, este sistema geométrico adquiere unas características distintas cuando se trabaja desde un software o sistema de geometría dinámica (SGD). Las precisiones sobre los sistemas de geometría dinámica y sus implicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar se harán en un apartado más adelante.

2.5. Razones trigonométricas

En el texto escolar, reconocido a nivel mundial, *Álgebra y Trigonometría* de Sullivan (2006), se presenta una forma tradicional de enseñar las razones trigonométricas, dada en la mayoría de los textos escolares actuales. Cabe mencionar que este es un libro traducido del inglés al español, y el autor llama a las seis razones de un triángulo rectángulo *funciones trigonométricas.* No obstante, para fines de esta investigación queda claro que la idea es reconocer primero el concepto de razón trigonométrica, para luego ser generalizado al de función trigonométrica.

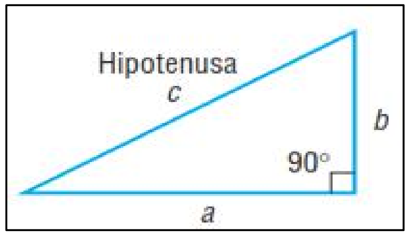
En el texto mencionado, se inicia la presentación del tema bajo el título *Trigonometría del triángulo rectángulo*, haciendo precisiones sobre el concepto de triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras:

> Un triángulo en el que un ángulo es recto (90°) se llama **triángulo rectángulo**. Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros lados **catetos** del triángulo. En la figura 2 se etiquetó la hipotenusa como *c* para indicar que su longitud es c unidades y, de manera similar, se etiquetaron los catetos como *a* y *b*.

Dado que el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras dice que $c^2 = a^2 + b^2$. (Sullivan, 2006, p. 506)

Figura 2

Triángulo rectángulo y su nomenclatura clásica



Fuente: Sullivan, M. (2006, p. 506)

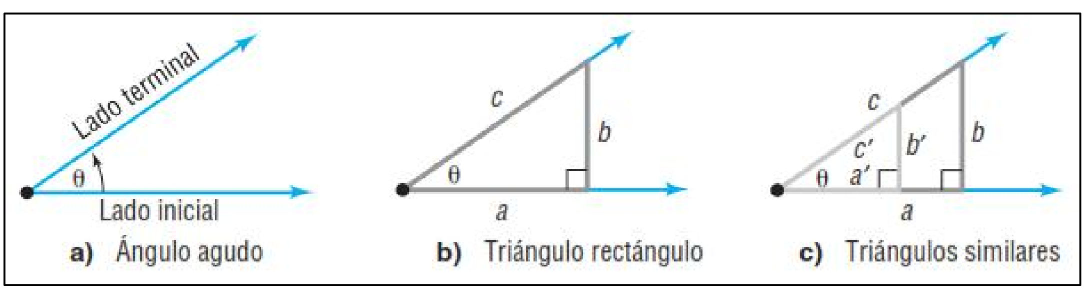
Luego, Sullivan (2006, p. 507) propone el planteamiento de las seis razones en un triángulo rectángulo para uno de sus ángulos agudos:

Ahora, suponga que ¯ es un ángulo agudo, es decir, 0° < ¯ < 90° (si θ se mide en grados) y (si ¯ se mide en radianes). Vea la figura 3.a).

Con este ángulo agudo ¯, se forma un triángulo rectángulo, como el ilustrado en la figura 3.b), con hipotenusa de longitud *c*, y catetos de longitudes *a* y *b*. Al usar los tres lados de este triángulo, se podrían formar justo seis razones: $\frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$.

Figura 3

Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo



Fuente: Sullivan, M. (2006, p. 507)

De hecho, estas razones dependen sólo del tamaño del ángulo ¯ y no del triángulo formado. Para ver por qué, observe la figura 3.c). Cualesquiera dos triángulos rectángulos formados usando el ángulo ¯ serán similares (o mejor semejantes); por lo tanto, las razones correspondientes serán iguales. Como resultado, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ $\quad$ $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$

$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ $\quad$ $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ $\quad$ $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ $\quad$ $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$.

Como las razones dependen sólo del ángulo ¯ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra a ¯: seno de ¯, coseno de ¯, tangente de ¯, cosecante de ¯, secante de ¯ y cotangente de ¯.

Las seis razones de un triángulo rectángulo se llaman **funciones trigonométricas de ángulos agudos** y se definen como se muestra en la tabla 1:

Tabla 1

Funciones (razones) trigonométricas de un ángulo agudo

Nombre de la función	**Abreviatura**	**Valor**
seno de ¯	sen¯	$\frac{b}{c}$
coseno de ¯	cos¯	$\frac{a}{c}$
tangente de ¯	tan¯	$\frac{b}{a}$
cosecante de ¯	csc¯	$\frac{c}{b}$
secante de ¯	sec¯	$\frac{c}{a}$
cotangente de ¯	cot¯	$\frac{a}{b}$

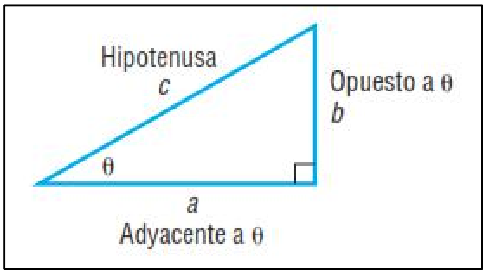
Fuente: Sullivan, M. (2006, p. 507)

Por último, Sullivan (2006, pp. 507-508) propone una redefinición de las seis razones trigonométricas nombrando a los catetos de acuerdo a su relación con el ángulo agudo sobre el cual se están dando las funciones (razones):

Como ayuda para recordar estas definiciones, puede ser útil referirse a las longitudes de los lados del triángulo por los nombres *hipotenusa* c), *opuesto* b) y *adyacente* a). Véase la figura 4.

Figura 4

Relación de catetos con ángulo agudo en un triángulo rectángulo



Fuente: Sullivan, M. (2006, p. 507)

En términos de estos nombres, se tienen las siguientes razones:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{hipotenusa}{opuesto} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{adyacente} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{adyacente}{opuesto} = \frac{a}{b}$$

Como *a, b* y *c* son positivos, cada una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ es positiva. (Sullivan, 2006, p. 508)

Para el diseño de la secuencia didáctica objeto de esta investigación, se tendrá en cuenta el orden de presentación de los conceptos, es decir, primero se aclara que las razones trigonométricas no dependen de la longitud de los lados del triángulo rectángulo, sino de la amplitud del ángulo agudo sobre el que se definen. Sin embargo, como se verá en las actividades que se proponen a los estudiantes, las letras *a* y *b* para los catetos están intercambiadas de manera intencional, para que tenga un significado extra implícito tomando la letra *b* para el *lado adyacente* (se puede ver como *base*) y la letra *a* para el *lado opuesto* (se puede ver como *altura*). Para el caso de la hipotenusa se sigue usando la letra *c*.

Ahora bien, desde la experiencia como docente del área de Matemáticas, siempre se ha presentado una inquietud por parte de los estudiantes respecto a los nombres que reciben las seis razones trigonométricas. Para intentar dar una respuesta a los estudiantes, se explica que los nombres de tangente y secante en geometría se dan por las propiedades de las líneas rectas con iguales nombres con relación a una circunferencia, y que las recíprocas cotangente y cosecante llevan el prefijo *co*- para indicar que son correspondientes de alguna manera (como se explicará más adelante) a cada una de ellas. Pero en el caso de la razón seno, y su razón relacionada correspondiente (coseno), no se ha tenido una respuesta concreta (por falta de conocimiento) para ofrecer a los estudiantes. Por esta razón, se realiza el siguiente rastreo histórico para entender el origen y significado de la función (razón) seno, y de paso de las otras cinco razones trigonométricas. Este recorrido histórico también se tiene en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica, en especial para determinar el orden en el que se presentan las actividades, siguiendo la forma en la que las razones trigonométricas se desarrollaron desde la antigüedad.

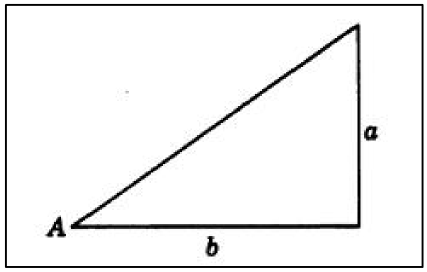
Respecto a la historia de la función seno, Boyer (1987, p. 273) plantea que el origen de esta función se le atribuye a los hindúes escritores de los *Siddhantas* (textos sobre sistemas astronómicos, siglo IV d.C.) como el principal aporte de estos a la historia de la matemática. El antepasado de la función trigonométrica moderna que se conoce como seno, nace gracias a que los hindúes tomaron los conocimientos de la trigonometría de Ptolomeo de Alejandría (100 d.C.), que se basaba en la relación funcional entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales en una circunferencia que ellas subtienden, y la transformaron en un estudio de la correspondencia entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco o ángulo central subtendido por la cuerda total.

Aunque se acepta generalmente que este cambio de la cuerda completa a la semicuerda para el establecimiento de la función seno tuvo lugar en la India, Paul Tannery (gran historiador de la ciencia de inicios del siglo XIX) formuló la hipótesis de que esta transformación de la trigonometría pudo haber tenido lugar en Alejandría durante el período post-ptolemaico. Al respecto, Boyer (1987, p. 273) concluye que siendo o no correcta dicha hipótesis, no cabe duda que no fueron los griegos sino los hindúes quienes extendieron el uso posterior de la semicuerda para trabajar la función seno, que nosotros hemos heredado, y también que la palabra “seno” se deriva, pasando por una larga y accidentada historia en su traducción al árabe, del nombre hindú “jiva” (semicuerda).

Para continuar el recorrido histórico, Boyer (1987, p. 308) indica que la trigonometría árabe se debatió inicialmente para los cálculos astronómicos entre la geometría griega de las cuerdas tal como se encuentra en el *Almagesto* de Ptolomeo, y las tablas de los senos hindúes, tales como las que aparecen en el *Sindhind* (tablas astronómicas árabes traducidas de las Siddhantas hindúes). Finalmente, la mayor parte de la trigonometría árabe se construyó basada en la función seno, por lo tanto, fue gracias a los árabes y no los hindúes que se trasladó la trigonometría del seno a Europa. Por ejemplo, uno de los primeros transmisores de este conocimiento fue la astronomía de Al-Battani (858-929 d.C.), más conocido en Europa como Albategnius, quien en su obra *Sobre el movimiento de las estrellas* da fórmulas en las que apareces las funciones seno y seno verso (ver figura 5), como $b = a.sen(90° - A)/senA$. No obstante, un siglo más tarde, en la época de Abu’l-Wefa (940-998 d.C.) ya se conocía la función tangente y así la relación anterior se podía expresar en forma más sencilla como $a = b.\tan A$.

Figura 5

Triángulo rectángulo para fórmula de Albategnius



Fuente: Boyer, C. (1987, p. 308)

Boyer (1987, p. 308) afirma que es gracias a Abu'l-Wefa y la trigonometría árabe que nos aproximamos a las ideas básicas de la trigonometría moderna, puesto que la función tangente se daba en general para el círculo unitario (de radio igual a la unidad), lo cual no ocurría con la función seno de los hindúes. Además, con este matemático árabe la trigonometría adquiere una forma más sistemática, en la que se tienen demostraciones de teoremas como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio. De hecho, aunque el teorema de los senos ya era conocido por Ptolomeo, y también aparece implícitamente en la obra del hindú Bramagupta (590-670 d.C.), se le atribuye su planteamiento a Abu'l-Wefa por su formulación clara y precisa para los triángulos esféricos.

Ahora bien, respecto a las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, Boyer (1987, pp. 308-309) afirma que varios historiadores han intentado atribuir su origen a épocas e incluso a matemáticos concretos, pero no ha sido posible dar seguridad de la evidencia que apoye dichas conjeturas. Lo que si se puede decir es que en la India y en Arabia se utilizaba una teoría general de longitud de sombras con respecto a una unidad de longitud determinada fija (gnomon), que podía ser la altura promedio de un hombre. Así pues, se puede afirmar que la sombra horizontal proyectada por el gnomon vertical de longitud fija era lo que se conoce en la actualidad como la cotangente del ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. Del mismo modo, la “sombra invertida”, es decir, la sombra proyectada sobre una pared vertical a la que se fija en forma perpendicular el gnomon de longitud fija, sería lo que se conoce como la tangente del ángulo de elevación del sol. La “hipotenusa de la sombra” es decir, la distancia desde el extremo del gnomon vertical hasta el extremo de su sombra sería el equivalente a la función cosecante, y de igual forma, la “hipotenusa de la sombra invertida” hace el papel de la secante. Parece que esta forma de trabajar con las sombras ya era tradicional en Asia para el siglo XIX, sin embargo, no se tabulaban los valores de estas dos hipotenusas (secante y cosecante).

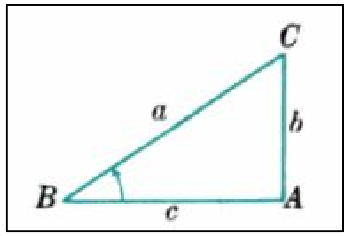
Del anterior recorrido histórico se destaca la importancia que tiene el desarrollo de la función seno desde la postura griega de Ptolomeo con base a las cuerdas, pasando por la definición de los hindúes con base a la semicuerda (y dando origen a su nombre), para llegar hasta los árabes, quienes proyectaron la función seno y de paso las otras cinco funciones trigonométricas al resto del mundo, desde la postura de definición sobre el circulo unitario. Esto es importante para esta investigación, porque en aproximación a ese mismo orden de desarrollo histórico, se realiza el orden de las actividades propuestas a los estudiantes en la secuencia didáctica objeto de este trabajo.

No se puede dar por terminado este apartado sin antes realizar una última aclaración conceptual sobre el significado del prefijo “*co*”, el cual relaciona las funciones trigonométricas seno, tangente y secante con las funciones coseno, cotangente y cosecante. Para esto, se presenta lo expuesto por Anfossi, A. & Flores, M. (1978) en su libro *Curso de Trigonometría Rectilínea* para definir las cofunciones trigonométricas:

Tomando un triángulo rectángulo BAC[6] (figura 6). Según las definiciones de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo dadas antes, se pueden formular las igualdades siguientes:

Figura 6

Triángulo rectángulo BAC, con lados opuestos respectivos b, a y c



Fuente: Anfossi, A. & Flores, M. (1978, p. 33)

$$senB == \frac{b}{a} \quad ; \quad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \quad ; \quad \cot C = \frac{b}{c}$$

$$\sec B = \frac{a}{c} \quad ; \quad \csc - = \frac{a}{c}$$

Es decir: $senB = \cos C$; $\tan B = \cot C$ y $\sec B = \csc C$.

El coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo son respectivamente iguales al seno, tangente y cosecante del ángulo complementario.

Por eso, el coseno, la cotangente y la cosecante se llaman *cofunciones*. Por tanto, pueden escribirse: $senB = \cos(90° - B)$; $\cos C = sen(90° - C)$; $\tan B = \cot(90° - B)$; $\cot C = \tan(90° - C)$; $\sec B = \csc(90° - B)$ y $\csc C = \sec(90° - C)$. (p. 33)

---

[6] Nótese que cada autor toma las letras mayúsculas para los vértices (ángulos) del triángulo rectángulo y las letras minúsculas respectivas de sus lados opuestos a cada ángulo, en un orden distinto. Para la nomenclatura de las actividades se propuso triángulos con letras diferentes y se trabaja con notación geométrica de segmentos.

2.6. Competencias matemáticas y razonamiento matemático

Como se mencionó en el apartado 2.2, las secuencias didácticas constituyen una metodología importante para el desarrollo de competencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, para su diseño coherente, se hace necesario la claridad en el término de competencia matemática, y en especial de la competencia matemática de razonamiento.

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral (Gutiérrez, 2008, p.10). Así pues, entre las habilidades que se mencionan para ser matemáticamente competente, se destaca la de razonamiento matemático.

En general, se entiende por razonar: *la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión* (MEN, 1998, p. 54). El razonamiento matemático, tiene que ver estrechamente con las matemáticas en tres sentidos: como comunicación, como modelación y como procedimientos. Sin embargo, en las actividades que se plantearán en este trabajo, se especifica que no se solicitan procesos de modelación a los estudiantes, pero si, se tiene un mayor interés hacia los procedimientos de visualización y conjeturación; y de una manera exigua por la comunicación, este último cuando se solicita a los estudiantes una conclusión en forma simbólica.

El razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas. Por lo tanto, las actividades que se diseñen deben intentar alcanzar los siguientes desempeños propios de la acción de razonar en matemáticas:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p. 54)

Del mismo modo, entre las consideraciones propuestas por el MEN que son necesarias para favorecer el desarrollo del razonamiento matemático, se toman en cuenta las siguientes como las más acordes para diseñar la secuencia didáctica de este trabajo de investigación:

- Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.
- Crear en el aula un ambiente que sitúe el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás. (MEN, 1998, p. 54)

Ahora bien, respecto al proceso de razonamiento en geometría, Samper et al. (2003) en el libro *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría*, clasifican los tipos de razonamiento que se favorecen en la tarea de demostrar desde un contexto geométrico: *razonamiento visual, razonamiento informal (o intuitivo) y razonamiento formal (o inferencial)*. Y de hecho, las autoras afirman que estos tipos de razonamiento tienen una correspondencia con las tres clases de procesos cognitivos involucrados en la geometría, descritos por Duval (1998): *procesos de visualización, de construcción y discursivos*.

Con base en lo expuesto por Samper et al. (2003, p. 164), interpretando a Duval (1998, p. 38), se describen los tres tipos de razonamiento en geometría de la siguiente manera:

En primer lugar, *el razonamiento visual o visualización* se refiere a los procesos cognitivos relacionados con las representaciones espaciales, usadas para la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de una situación compleja, echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva. Se puede decir que este tipo de razonamiento tiene una estrecha relación con los tres primeros niveles del modelo van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico, mencionados antes en el apartado 2.4.

En segundo lugar, *el razonamiento informal* es aquel que se relaciona con los procesos de *construcción mediante herramientas*. La construcción de configuraciones puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan. Este involucra las ideas espontáneas que se emiten en lenguaje natural, a través de la descripción, la explicación y la formulación de argumentos, los cuales son producto del establecimiento de asociaciones u oposiciones con un fuerte apoyo en la visualización. De igual manera, es posible relacionar este tipo de razonamiento con el alcance del cuarto nivel del desarrollo de pensamiento geométrico planteados por van Hiele.

Cabe aclarar que al analizar los procedimientos de los estudiantes cuando dan solución a las actividades propuestas, se centra una especial atención sobre este tipo de razonamiento informal, pues este es el tipo de razonamiento que más desarrollan los estudiantes al tratar de explicar lo que observa en las figuras para dar solución a un problema, y de paso va estrechamente relacionado con el proceso de visualización.

En tercer y último lugar, *el razonamiento formal*, que es el relacionado con los *procesos discursivos*, utilizados para la extensión del conocimiento, para la demostración, o para la explicación. Este tipo de razonamiento puede integrar procesos inductivos, abductivos y deductivos, y consiste en la elaboración de discursos formales dirigidos a la construcción de demostraciones para probar la validez de una afirmación.

Como los otros dos tipos de razonamiento, éste se puede relacionar con el quinto nivel del pensamiento geométrico de van Hiele, el cual no se mencionó antes por no ser del interés para esta investigación. Por lo anterior, cabe aclarar que las actividades de la secuencia didáctica diseñada no están enfocadas para desarrollar de manera explícita este tipo de razonamiento geométrico.

Así pues, se deja por sentado que las actividades propuestas en la secuencia didáctica se enfocaron en el desarrollo de la competencia matemática del razonamiento, específicamente en el contexto del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (desde el tema de las razones trigonométricas), con un énfasis especial para analizar el proceso de visualización (y de forma asociada el proceso de conjeturación).

A continuación se amplía más la conceptualización sobre estos dos sub-procesos del razonamiento matemático que se desarrollan con el aprendizaje de la geometría, y en especial con el de la geometría dinámica, como un referente fundamental para el presente trabajo de investigación.

2.7. Procesos de visualización y conjeturación en geometría

Como se planteó en el diseño curricular, la visualización y la conjeturación son sub-procesos que hacen parte del proceso general del razonamiento matemático, sobre los cuales se hace énfasis en el diseño de la secuencia didáctica objetivo de esta investigación. A continuación se hace precisiones conceptuales sobre estos dos sub-procesos.

Primero, en lo que al proceso de visualización concierne, Clements, D. & Battista, M. (1992) afirman que: "El razonamiento visual integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones" (p. 444). Este tipo de razonamiento es lo que trata desarrollar las actividades propuestas en esta investigación al trabajar con figuras dinámicas que permiten plantear conjeturas y conclusiones sobre las propiedades de las razones trigonométricas.

La visualización es un caso de *aprehensión perceptual*, concepto definido por Duval (1995, p. 145) a la forma de llegar al conocimiento por medio de la información obtenida de la percepción visual de una figura. Distinta de la aprehensión discursiva en la cual se tiene en cuenta el enunciado escrito que acompaña a una figura. Este proceso representa un interés especial en la matemática escolar porque provee información base para alcanzar el proceso complejo de demostrar. Es un proceso que permite al aprendiz diferenciar entre dibujo y figura geométrica, al identificar la información que se puede obtener de la figura y cuál no, distinción cuya ausencia conlleva frecuentemente al error de concluir, a partir de la figura, hechos que no puedes ser asumidos como verdaderos sino que deben ser verificados.

Ahora bien, acerca del proceso de conjeturación, Camargo (2010) en su tesis de doctorado ofrece una definición de la acción de conjeturar a partir de la comprensión de lo expresado por diversos autores:

"Con el término conjeturar hacemos referencia a formular una hipótesis de trabajo o una suposición, llamada conjetura, basada en evidencias empíricas. Por ser resultado de una exploración, se puede tener un alto grado de certeza sobre aquello que se afirma, pero su validez o deducibilidad sólo puede asegurarse cuando se justifique mediante una demostración matemática". (p. 51)

Relacionando las dos definiciones anteriores, se puede justificar la importancia de asociar el proceso de visualización con el de conjeturación para analizar cómo las actividades diseñadas permiten desarrollar, en una u otra manera, la competencia de razonamiento matemático. Además, en concordancia con el objetivo de este trabajo de investigación, se justifica el diseño de actividades en las que no se solicite una demostración formal de las propiedades y relaciones de las razones trigonométricas, sino que estas se refieran a lo que se conocen como prueban pragmáticas, las cuales se explican en el siguiente apartado.

2.8. Pruebas pragmáticas

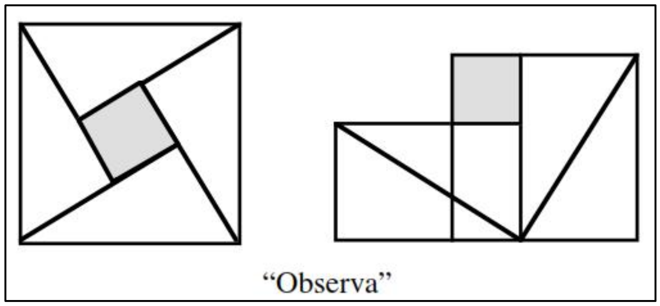
Para dar paso a una tipología de las pruebas matemáticas, se cita a Nicolás Balacheff (2000, p. 20), quien distingue dos tipos de pruebas: *las pruebas pragmáticas* y *las pruebas intelectuales.* De las segundas no se harán aclaraciones en este trabajo, pues no son de interés para la finalidad del mismo.

Entonces, sobre las pruebas pragmáticas se afirma que son aquellas que recurren a la acción o a la ostensión (exhibición). Es decir, las operaciones y los conceptos que éstas entrañan son ejecutados; no son diferenciados ni articulados, y solamente se prestan para ser observados (proceso de visualización).

Como ejemplo de este tipo de prueba se presenta la figura 7, en la que se puede deducir la validez del teorema de Pitágoras. Esta prueba se fundamenta en la capacidad que tenga la persona que observa la figura para reconstruir las razones que el proponente tiene en mente y que no sabe hacer explicitas de otra manera.

Figura 7

Prueba de Bhascara del Teorema de Pitágoras



Fuente: Balacheff, N. (2000, p.21)

Sémadéni (1984) recomienda el uso de las pruebas pragmáticas en la educación elemental y al respecto expone que una prueba de una afirmación *S* debe consistir de los siguientes pasos:

1. Escoger un caso especial de *S*. El caso debe ser genérico (es decir, sin características especiales), no muy complicado, pero tampoco muy simple (un ejemplo trivial puede ser posteriormente difícil de generalizar). Escoger una representación activa y/o icónica de este caso, o un ejemplo paradigmático.
   Ejecutar ciertas acciones físicas concretas (manipular objetos, hacer dibujos, mover el cuerpo, etc.) para verificar la afirmación en un caso dado.
2. Escoger otros ejemplos conservando el esquema general, pero variando las restricciones involucradas. Verificar la afirmación para cada caso tratando de usar el mismo método expuesto en el numeral 1.

3. Cuando las acciones físicas ya no sean necesarias, continuar ejecutándolas mentalmente hasta estar convencido de que sabe cómo aplicar el mismo procedimiento a otros ejemplos.
4. Tratar de determinar la clase o las clases para las cuales este método funciona. (p.32)

Lo anterior, ofrece una visión de la intencionalidad que se debe tener al proponer una prueba de este tipo e igualmente las características para su identificación y distinción de otro tipo de prueba. Respecto a las pruebas pragmáticas, Balacheff afirma que: “Los teoremas en acto[7] juegan un papel fundamental en este tipo de prueba. Consisten en determinadas propiedades que el individuo utiliza en la solución de problemas, sin que por lo tanto pueda enunciarlos” (2000, p. 22), y adhiere que en una prueba de este tipo, si así es requerido, presenta un *lenguaje de la familiaridad*, cuyo soporte es la lengua natural.

Así pues, se deja por sentado que las actividades propuestas a los estudiantes para visualizar las propiedades de las razones trigonométricas y validar pruebas de semejanza de triángulos, cuando sea necesario en su desarrollo, hacen uso de pruebas pragmáticas, en las cuales no se exige un proceso formal de demostración. Sin embargo, si se solicita a los estudiantes entregar sus respuestas haciendo uso de un lenguaje matemático apropiado.

2.9. TIC en la Educación Matemática y ambientes de geometría dinámica

Según el manual para docentes de la Unesco, elaborado por Semanov (2005) titulado *Las TIC en la enseñanza*, el principal error que cometen muchos educadores al usar las TIC, es preguntarse “¿cómo puedo usar esta tecnología para modernizar o mejorar lo que actualmente

[7] Balacheff sigue la concepción sobre este término de G. Vergnaud (1981), es decir, son afirmaciones a las que se puede atribuir un valor de verdad, usadas por los individuos en la acción de aprender.

estoy haciendo?” en lugar de preguntarse, “¿cómo puedo usar las TIC para hacer cosas que todavía no estoy haciendo? Es decir, que la Unesco exige a los docentes pensar que las TIC, por su propia naturaleza solicita un proceso de innovación; por lo tanto, en su uso se debe explotar al máximo el potencial de ellas para abrir nuevas perspectivas tanto para docentes como para estudiantes (p.125).

Ahora bien, en cuanto a la relación de TIC y Matemáticas se puede decir que: “Las nuevas tecnologías no solo han hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas, sino que han cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a las matemáticas y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos” (MEN, 1999, p. 13). Así, el uso de las tecnologías computacionales en la escuela para la enseñanza de las matemáticas, adquieren una importancia y necesidad ineludible.

En un principio, las calculadoras y los computadores se introdujeron al salón de clase de matemáticas concebidos como “facilitadores del trabajo mecánico” (MEN, 1999, p. 29). Por ejemplo, la primera calculadora gráfica producida en 1985 por Casio, y los primeros sistemas o softwares para geometría dinámica (SGD) fueron *The Geometer's Sketchpad* (norteamericano presentado en 1989) y *Cabri Géomètre* (francés presentado en 1988). No obstante, con el paso del tiempo, se ha podido concluir en diversas investigaciones que estas herramientas tecnológicas producen cambios fundamentales en la experiencia de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes a un nivel cognoscitivo, es por eso que pasan a tener también el nombre de ambientes de geometría dinámica (AGD), como en el caso del software llamado Geogebra, de uso muy común en la actualidad por ser de libre licencia.

Para una persona que trabaje por primera vez con un software de este tipo, puede parecerle inicialmente que se trata de un editor gráfico, el cual ofrece la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador. Pero, luego se dará cuenta que un software de geometría dinámica es mucho más que un simple editor en el que los elementos del diagrama se pueden agarrar con el ratón y arrastrar en la pantalla. En palabras de Colette Laborde (1998), la principal característica de un SGD es que: "el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella" (p. 114).

Por ejemplo, en uno de estos softwares, como el ya mencionado Geogebra, la construcción de una figura se hace mediante la utilización de herramientas para crear elementos geométricos básicos como puntos, rectas o circunferencias y otras construcciones que se realizan sobre estas, como rectas perpendiculares, bisectrices, simetrías, entre otras.

Geogebra proporciona un modelo "real" del campo teórico de la geometría euclidiana en el cual es posible manipular, en un sentido físico, los objetos teóricos que aparecen como dibujos en la pantalla. El comportamiento de este software se basa en el conocimiento geométrico de dos maneras:

- Los dibujos pueden ser trazados, basados en primitivas geométricas las cuales tienen en cuenta objetos y relaciones geométricas relevantes.
- Este ofrece la retro-alimentación que puede distinguir entre esquemas dibujados de una manera empírica y esquemas que resultan del uso de primitivas geométricas. (Laborde, 1998, p. 114)

De acuerdo a lo expresado por el MEN (2004), en el marco del proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia, las características fundamentales de un sistema de geometría dinámica, como Geogebra son:

- La capacidad de arrastre (*dragging*) de las figuras construidas, que favorecen la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación.
- El uso extensivo de *locus* (lugar geométrico) y *trace* (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra), que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.
- La animación de figuras, que permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico. (pp. 19-22)

De las anteriores características se destaca la importancia de la primera de ellas, pues precisamente, el dinamismo ofrecido por el *arrastre* es la principal diferencia entre un entorno de lápiz y papel y un entorno de geometría dinámica. Al ser construcciones dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una *temporalidad*, esto es, ya no son estáticas, sino móviles, y por tanto, sus propiedades deben estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla. Además, la función del *trace* (rastro en Geogebra) es útil para producir representaciones de lugares geométricos o gráficas de funciones, cuando un punto va desplazándose y dejando huella en la pantalla, con base a un comportamiento dirigido por relaciones o propiedades geométricas o algebraicas.

Cabe señalar que las dos funciones destacadas son las que se van a emplear en las actividades mediadas por Geogebra para analizar las propiedades de las razones trigonométricas. Por un lado, la función de arrastre permitirá analizar que los valores de las razones trigonométricas se mantienen fijos para cualquier triángulo rectángulo semejante, es decir, que no dependen de las longitudes de los lados del triángulo sino de la amplitud del ángulo agudo para el cual se definen. Por otra parte, la función de rastro se utiliza para analizar la representación de las líneas trigonométricas (segmentos asociados a las razones trigonométricas con referencia al círculo unitario) y su relación con las gráficas de las respectivas funciones trigonométricas.

Así pues, queda puntualizado lo referente al software de geometría dinámico utilizado para generar un ambiente de geometría dinámica en cada una las actividades de la secuencia didáctica que se propone a los estudiantes para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

2.10. Enfoque pedagógico

Como en toda propuesta didáctica que se quiera diseñar, hay que tener claro el enfoque pedagógico desde el cual se enmarcará su intención educativa. Así pues, se aclara que de acuerdo a lo expresado en el Proyecto Educativo Institucional (P.E.I.), el Liceo Departamental tiene un modelo pedagógico basado en la escuela constructivista, desde un enfoque humanista (2018a, p.151). Acerca del paradigma humanista–constructivista, González (2006, p. 66) expresa que es de vital importancia respetar el valor del ser humano por lo que es (humanismo), y entregarle herramientas que le permitan acceder al conocimiento por su propia cuenta (constructivismo). Estos dos paradigmas se complementan para priorizar la parte cognitiva del ser humano y el refuerzo de su parte conductual, por medio de la manifestación de sus pensamientos, ya no como acto mecánico, sino como acto existencial que le otorga virtudes, crecimiento, armonía y valor a su ser en el momento de aprender.

No obstante, para la propuesta didáctica objeto de esta investigación se establece un enfoque pedagógico desde la teoría constructivista del aprendizaje por descubrimiento y el método de aprendizaje colaborativo, los cuales se consideran como los enfoque más coherentes con la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje mediada por un recurso tecnológico, de acuerdo a la experiencia del autor.

2.10.1. Aprendizaje por descubrimiento

Se referencia la teoría del *aprendizaje por descubrimiento* establecida por Jerome Bruner (1915 - 2016), a partir de un artículo de Barrón, A. (1993) para entender su definición y sus principios, y explicar su aplicación en el desarrollo de la secuencia didáctica de esta investigación. En primer lugar, el autor define en forma sintética el aprendizaje por descubrimiento como: “la actividad autorreguladora de resolución de problemas, que requiere la comprobación de hipótesis como centro lógico del acto de descubrimiento” (p. 3). Seguido, se enumeran los diez principios de esta práctica escolar:

1. El ser humano está dotado de potencialidad natural para descubrir conocimiento
2. El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa
3. El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas
4. El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso de resolución significativa de problemas
5. El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas
6. Para que la actividad resolutiva pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y creativa
7. El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores
8. Al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la mediación sociocultural
9. El grado de descubrimiento es inversamente proporcional al grado de predeterminación del proceso resolutivo
10. El aprendizaje por descubrimiento puede ser pedagógicamente promovido. (pp. 4-5)

En tercer lugar, se interpretan los diez principios y se explica cómo se aplican para el desarrollo de la secuencia didáctica de esta investigación de la siguiente forma: Los principios uno y dos son asumidos como algo intrínseco al ser humano, el acto de descubrir un conocimiento nuevo, a partir de la reflexión y relación de conocimientos y experiencias cognitivas anteriores, es fundamental para el aprendizaje. Los principios tres y cuatro, relacionados con la importancia de la enseñanza por medio del planteamiento de situaciones problemas que fomenten un proceso de indagación y descubrimiento, van en coherencia con la intencionalidad propuesta en las actividades (problemas de exploración en contexto dentro de las mismas matemáticas) de la secuencia didáctica diseñada en este trabajo. La relación del quinto principio con el objetivo de este trabajo es más que evidente; de hecho, las actividades planteadas a los estudiantes le apuntan al desarrollo de un proceso de visualización asociado a la conjeturación de ideas para probar de manera pragmática las propiedades y relaciones de las razones trigonométricas.

También, el sexto principio se aplica en lo que se espera del aprendizaje del estudiante al trabajar las actividades de la secuencia didáctica, pues no solo debe poner en uso los conocimientos previos para dar respuesta a algunas de las preguntas, sino que además se espera una actitud innovadora y propositiva por parte de ellos para responderlas.

En cuanto a lo expresado en el principio siete, se destaca lo dicho por Piaget (1981): “un error corregido puede ser más fecundo que un éxito inmediato” (p. 114). Aunque por cuestiones organizativas de tiempo el desarrollo de las actividades no permitía el espacio para socializar los resultados y trabajar en forma reflexiva sobre los errores cometidos en su solución, el docente investigador al ver los resultados (con errores conceptuales y procedimentales) de la primera actividad, aplica este principio haciendo una sesión de aclaración antes de continuar la actividad 2. Además, el orden de las actividades permitía que al comprender el proceso de trabajo superando los errores cometidos en las primeras razones trigonométricas (seno y coseno), luego fuera más sencillo el desarrollo de las últimas actividades con las razones trigonométrica restantes (tangente, secante, cosecante y cotangente).

Ahora bien, respecto al octavo principio se puede afirmar que es el que sustenta la conexión con el método del *aprendizaje colaborativo*; por esta razón, las actividades de la secuencia didáctica se proponen para ser trabajadas en pareja, y así lograr un diálogo entre los aprendices de sus conjeturas y puestas de acuerdo para escribir sus respuestas. Siguiendo con el noveno principio, se interpreta que la riqueza del descubrimiento depende de qué tan mínima sea la predeterminación del proceso de solución del problema propuesto. De Este modo, se puede decir que este principio no se cumple en gran medida para el caso de las actividades propuestas a los estudiantes, pues todas ellas tienen un proceso dirigido en las instrucciones dadas en el taller, del que se espera el descubrimiento de alguna propiedad o relación, y es posible que dichas instrucciones no permitan tanto la libertad de los procesos de los estudiantes, aunque siempre habrá estudiantes que sorprendan con sus procedimientos y respuestas originales.

Por último, el décimo principio invita a pensar pedagógicamente el desarrollo de esta forma de enseñanza y aprendizaje, por medio de la experimentación, la planeación reflexiva y la práctica investigativa. Por esta razón, el producto resultado de esta investigación (secuencia didáctica) se seguirá implementando en la institución educativa Liceo Departamental en los años lectivos siguientes, con el fin de evaluar y rediseñar las actividades en pro de una mejora sistemática de las actividades de dicha secuencia didáctica y, por lo tanto, de los resultados de aprendizaje en los estudiantes.

2.10.2. Aprendizaje Colaborativo

Barkley et al. (2012) responden a la pregunta ¿qué se entiende por aprendizaje colaborativo?, de la siguiente manera: “En la práctica, el aprendizaje colaborativo ha llegado a significar que los estudiantes trabajan por parejas o en pequeños grupos para lograr unos objetivos de aprendizaje comunes. Es aprender mediante el trabajo en grupo, en vez de hacerlo trabajando solo” (p. 17). Pero, esta definición tiende a ser confundida con otras expresiones como: *aprendizaje cooperativo, aprendizaje en equipo, aprendizaje en grupo o aprendizaje con ayuda de compañeros.* Por lo tanto, se enuncian tres características fundamentales del aprendizaje colaborativo, para diferenciarlo de otros términos similares:

1. Tiene un diseño intencional. Los profesores deben estructurar unas actividades de aprendizaje intencional, no solo dar una instrucción de trabajo en grupo.
2. Presencia de la colaboración. Todos los participantes (incluyendo al profesor) deben comprometerse a trabajar activamente juntos para alcanzar los objetivos señalados.
3. Tiene una enseñanza significativa. Los estudiantes deben incrementar sus conocimientos o profundizar su comprensión del currículo de la asignatura. (p. 18)

Así pues, reuniendo las tres características enunciadas por Barkley et al. (2012), se puede redefinir el aprendizaje colaborativo como la metodología de enseñanza y aprendizaje en que dos o más estudiantes trabajan juntos y comparten equitativamente la carga de trabajo mientras progresan hacia los resultados de aprendizaje previstos por el profesor (p. 18).

Teniendo una idea más clara sobre el término aprendizaje colaborativo, Barkley et al. (2012) presentan una clasificación de treinta técnicas de aprendizaje colaborativo (TACs) definidas a partir de diversas investigaciones sobre el aprendizaje colaborativo, especificando cinco grandes categorías, para hacer más resumido su tratamiento.

De las TACs, mostradas en la tabla 2, la trabajada en la propuesta de secuencia didáctica es la de la categoría de resolución de problemas (en contexto geométrico), y en forma específica la del caso tipo *resolución de problemas por parejas pensando en voz alta* (RPPPVA).

Es claro que, como se describirá en la metodología más adelante, las actividades se proponen para ser trabajadas en parejas y los estudiantes deben pensar en voz alta para desarrollar en conjunto la solución a la situación problema planteada en las preguntas del taller con base a lo observado en el AGD dado por el archivo abierto en Geogebra.

Tabla 2

Categorías de técnicas de aprendizaje colaborativo

Categoría	Descripción	Casos Tipo
Diálogo	La interacción y los intercambios de los estudiantes se consiguen principalmente mediante la palabra hablada.	Piensa, forma una pareja y comenta; Rueda de ideas; Grupos de conversación; Para hablar, paga ficha; Entrevista en tres pasos; Debates críticos.
Enseñanza recíproca entre compañeros	Los estudiantes se enseñan mutuamente con decisión a dominar temáticas y a desarrollar competencias relacionadas con ellas.	Toma de apuntes por parejas; Celdas de aprendizaje; La pecera; Juego de rol; Rompecabezas; Equipos de exámenes.
Resolución de problemas	Los estudiantes se centran en practicar estrategias de resolución de problemas.	Resolución de problemas por parejas pensando en voz alta; Pasa el problema; Estudio de casos; Resolución estructurada de problemas; Equipos de análisis; Investigación en grupo.
Organizadores de información gráfica	Los grupos utilizan medios visuales para organizar y mostrar información.	Agrupamiento por afinidad; Tabla de grupo; Matriz de equipo; Cadenas secuenciales; Redes de palabras.
Redacción	Los estudiantes escriben para aprender contenidos y competencias importantes.	Diarios para el diálogo; Mesa redonda; Ensayos diádicos; Corrección por el compañero; Escritura colaborativa; Antologías de equipo; Seminario sobre una ponencia.

Fuente: Barkley et al. (2012, p.84)

Con lo anterior dicho, se puede afirmar que los enfoques pedagógicos, aprendizaje por descubrimiento y aprendizaje colaborativo, se complementan, pues con la TAC de RPPPVA usada para trabajar la secuencia didáctica, se da cumplimiento a los principios tres, cuatro, cinco y ocho del aprendizaje por descubrimiento, descritos en el anterior apartado 2.10.1.

3. Diseño metodológico

Desde la perspectiva de Pérez, G. (1994), la investigación cualitativa es considerada como: "un proceso *activo*, *sistemático* y *riguroso* de indagación dirigida, en la que se toman decisiones sobre lo investigable, en tanto se está en el campo de estudio" (p.46). Así pues, se destaca que el presente proyecto de investigación se planteará desde un enfoque metodológico cualitativo de estudio de casos. Para precisar lo que se entiende por este tipo de estrategia metodológica de investigación, se referencia la definición dada por Yin (2003)[8]:

Primero, la definición técnica comienza con el alcance de un estudio de caso:

1. Un estudio de caso es una investigación empírica que

- investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando
- los límites entre fenómeno y contexto no son claramente evidentes.

En segundo lugar, debido a que el fenómeno y el contexto no siempre se distinguen en situaciones de la vida real, un conjunto completo de otras características técnicas, incluidas la recolección de datos y las estrategias de análisis de datos, ahora se convierten en la segunda parte de nuestra definición técnica:

2. La investigación del estudio de caso

- hace frente a la situación técnicamente distintiva en la que habrá muchas más variables de interés que puntos de datos, y como un resultado
- se basa en múltiples fuentes de evidencia, con datos que necesitan converger de forma triangular, y como otro resultado
- se beneficia del desarrollo previo de propuestas teóricas para guiar la recopilación y el análisis de datos. (pp. 13-14)

[8] Traducción realizada del inglés al español, por el autor de este trabajo, desde la fuente original (Yin, 2003).

La anterior decisión metodológica se justifica por el hecho de que la pregunta problema propone analizar *cómo* la implementación de una estrategia didáctica mediada por un recurso TIC desarrolla una competencia matemática en el estudiante, cuando se aprenden las razones trigonométricas. Así pues, una investigación cuantitativa interesada por datos numéricos y análisis estadísticos, no sería tan apropiada para dar cuenta de lo que se necesita referenciar, para lograr el objetivo de esta investigación. Por lo tanto, entre las diversas perspectivas metodológicas específicas para la investigación en Educación Matemática, que se enmarcan en la investigación cualitativa siguiendo la estrategia de estudio de casos, se escoge la de la *Ingeniería Didáctica*, sobre la cual se hace una mayor referencia y precisión a continuación.

3.1. La ingeniería didáctica como metodología de investigación

Para puntualizar a la *Ingeniería Didáctica* como la perspectiva metodológica de investigación propia de la educación matemática que se sigue en este trabajo, se procede primero a dar su definición general: “El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos”. (Douady, 1995, p.61)

Luego, se precisan las características de la ingeniería didáctica como metodología de investigación de acuerdo a Artigue (1995). En primer lugar, se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. De acuerdo a lo anterior, se distinguen dos niveles: la microingeniería y la macroingeniería, según la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. (p. 36)

Se aclara que en este trabajo lo que se lleva a cabo es una aproximación de lo que se conoce como microingeniería didáctica, que a pesar de ser el nivel de ingeniería didáctica más fácil de llevar a la práctica, se reconoce que una investigación de este nivel debe involucrar un proceso de rigor científico mucho más exigente que el realizado aquí.

En segundo lugar, la metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. Esta se diferencia de otras metodologías de investigación en el aula de clase que recurren a la experimentación, pues no tiene un enfoque comparativo con validación externa (basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control); sino que, por el contrario, se ubica en el registro de los estudios de caso, cuya validación es en esencia interna (basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori). (p. 37)

En tercer lugar, el enfoque metodológico de la ingeniería didáctica propone la realización de un proceso que consta de cuatro fases: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación. (p. 38)

Por último, se puede decir que en esta investigación el desarrollo de la primera fase, análisis preliminar, se presenta en los distintos apartados del marco teórico, pues en ellos se especifica varios de los análisis preliminares sugeridos por Artigue (1995, p. 38) para este enfoque metodológico de investigación didáctica. Entre ellos, el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza (razones trigonométricas), al igual que, las consideraciones curriculares, didácticas y cognitivas sobre la enseñanza tradicional versus la enseñanza mediada por un recurso TIC.

A continuación, se especifican los aspectos de la metodología referentes a la estrategia de muestreo, los instrumentos de medición y el plan de análisis.

3.2. Estrategia de muestreo

Teniendo en cuenta que el enfoque metodológico seleccionado es el de estudio de casos, y que el análisis de los datos requiere un trabajo bastante dispendioso, se consideró realizar la recolección de información seleccionando tres (3) parejas[9] de estudiantes de grado décimo del año lectivo 2019. Estos estudiantes fueron seleccionados teniendo en cuenta su nivel de desempeño en el área de Matemáticas en el año lectivo anterior (2018 – Grado 9°), es decir, que se escogieron una pareja de estudiantes con “nivel básico de desempeño” (valoración final de 3,0 a 3,9), otra pareja con “nivel alto de desempeño” (valoración final de 4,0 a 4,5) y otra pareja con “nivel superior de desempeño” (valoración final de 4,6 a 5,0).

La diversidad de los niveles garantiza que la muestra no esté sesgada a un solo tipo de estudiante según su desempeño académico y así, se tuviera un abanico más amplio para analizar los diversos comportamientos de los individuos al momento de realizar las actividades didácticas propuestas en esta investigación. Se aclara que no se escogieron estudiantes con dificultades de aprendizaje, porque el desarrollo de la secuencia didáctica requiere de unos conocimientos y procesos aprendidos previamente por parte de los estudiantes, que por lo general, quienes han sido promocionados de grado con un nivel bajo de desempeño no los tienen bien aprendidos.

Otra aclaración sobre la muestra es que la secuencia didáctica se implementó en uno de los cinco grupos (36 a 40 estudiantes por grupo) de grado décimo de la institución educativa, esto debido a que en dicho grado el docente investigador solo pudo acordar (teniendo en cuenta la disponibilidad del salón con recursos tecnológicos adecuados) con una de las dos profesoras

---

[9] De acuerdo a la tabla *Tamaños de muestra comunes en estudios cualitativos* presentada por Hernández et. al (2014, p.385), para un estudio de casos se sugiere como tamaño mínimo de muestra de seis a diez registros de casos, pero si es un análisis en profundidad, se sugiere de tres a cinco casos.

de matemáticas de grado décimo, la ayuda para el desarrollo de esta investigación, y la misma profesora fue quien sugirió realizar la implementación con uno de los grupos de mejor disposición para las clases, prometiéndose a los estudiantes de este grupo una valoración académica positiva en la dimensión personal para la determinación de su nota de matemáticas en el tercer periodo del año lectivo 2019. Por último, se precisa que la profesora del área de matemáticas del grupo de grado décimo con el que se realiza el trabajo no participa de la investigación, porque alude no dominar el uso del SGD Geogebra involucrado en la secuencia didáctica, por lo tanto, cede el desarrollo de las clases al docente investigador en su totalidad.

3.3. Instrumentos de medición

El trabajo de análisis cualitativo se va a centrar sobre las acciones realizadas por los estudiantes con las actividades propuestas en la secuencia didáctica que se piensa desarrollar en esta investigación. Por lo tanto, un instrumento de medición apropiado para visualizar cómo las tres parejas de estudiantes de la muestra utilizan el recurso tecnológico, es la grabación de pantalla por medio de *FastStone Capture* (software incluido en el sistema operativo Windows). También se tomará registro en video de plano frontal completo, utilizando las cámaras de video de los computadores disponibles en el salón facilitado por la profesora titular del grupo intervenido, para ver las acciones de los estudiantes respecto a la interacción con su compañero y el docente investigador. Cabe aclarar que a los padres se les solicitó firmar un consentimiento informado para la grabación de los estudiantes como el presentado en el Anexo C.

Del mismo modo, se recurre a un registro escrito de las respuestas entregadas por los estudiantes para cada una de las actividades de la secuencia didáctica, mediante un cuestionario dado en forma de guía taller. Este permite recoger información escrita sobre lo que los estudiantes están comprendiendo en cada una de las mismas actividades.

3.4. Plan de análisis

Para analizar la información recopilada en los videos y en los cuestionarios se utiliza una rejilla con categorías de análisis definidas previamente para cada una de las actividades realizadas, estas permitirán clasificar las evidencias acerca de lo que se quiere encontrar en cada una de las actividades. A continuación, se ejemplifica cómo se realiza dicho análisis.

A los estudiantes se les plantea una serie de actividades que realizan haciendo uso del software de geometría dinámica Geogebra, con la finalidad de evidenciar cómo la interacción del estudiante con la actividad le permite desarrollar procesos asociados a la competencia matemática de razonamiento, en especial el de visualización. Cada una de estas actividades tiene un análisis a priori en el que se exponen cuatro elementos: 1. Desempeños evaluados (distinguiendo nivel de competencia), 2. Indicadores de desempeños, 3. Conocimientos asociados (conceptuales y procedimentales), 4. Respuestas esperadas. Este último elemento es clave para plantear las categorías de análisis de la información recopilada.

Por cuestiones prácticas y para verificar la eficacia de la TAC de RPPPVA, el análisis se enfoca en contrastar los resultados registrados por las parejas de estudiantes en el taller de cada una de las actividades, con sus los respectivos registros de video (tanto de pantalla como frontal de los estudiantes) en donde se evidencia la interacción de las parejas de estudiantes con la actividad realizada. Estos dos videos se usarán en conjunto para analizar el desarrollo de los procedimientos esperados por parte del estudiante, al momento de dar respuesta a cada una de las preguntas propuestas en el taller guía de cada actividad. Dichos procedimientos se describen específicamente para cada actividad y se convierten en categorías de análisis para la presentación de resultados y conclusiones de esta investigación. Las categorías de análisis corresponderán a las respuestas que se esperan por parte de los estudiantes para evidenciar el desarrollo de los procesos asociados a la competencia matemática de razonamiento.

Así pues, de acuerdo a las respuestas que se esperan por parte de los estudiantes se hará la distinción de los niveles de desempeño “Ni”, esperados para cada una de las actividades propuestas. Además, se distinguen los procesos “Di”, que se esperan sean realizados por los estudiantes en las mismas actividades.

Para efectos de sistematización de los resultados, la tabla 3 presenta la forma en la que se van a identificar las tres parejas de la muestra con los códigos P1, P2 y P3, (se precisa que para identificar a los estudiantes se utilizará el código E1P1 o E2P1), y el nivel de desempeño alcanzado de acuerdo a lo esperado en las respuestas de los estudiantes en cada actividad planteada.

Tabla 3

Ejemplo de sistematización de resultados “Niveles de desempeño”

Pareja	**N_1**	**N_2**	**N_3**	**N_4**
P1			✓	
P2				✓
P3				✓

Fuente: Elaboración propia.

Del mismo modo, la tabla 4 presenta la forma en la que se van a distinguir categorías de análisis de acuerdo a los procedimientos esperados en la interacción de los estudiantes con la actividad planteada, marcando con un símbolo de chequeo (✓) el proceso evidenciado y con una equis (✕) el que no fue evidenciado por la pareja de estudiantes.

Tabla 4

Ejemplo de sistematización de resultados “Procesos desarrollados”

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
P1	✓	✓	✕	✕
P2	✓	✓	✓	✕
P3	✓	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

4. Análisis de resultados

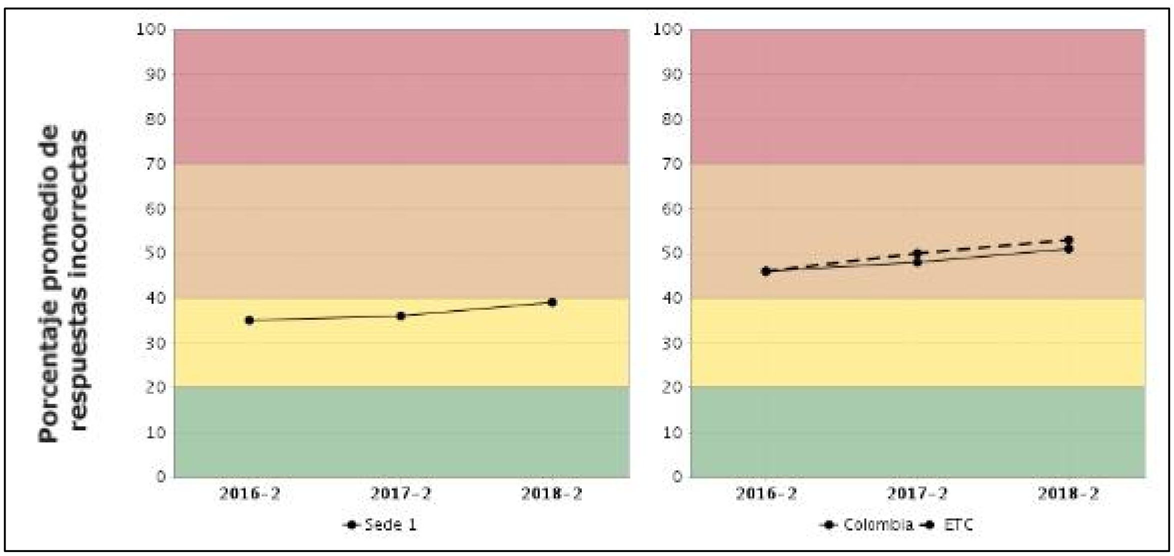
De acuerdo a los objetivos específicos planteados, se presenta a continuación el análisis del desarrollo, alcance y limitaciones de cada uno de ellos, como resultados de la presente investigación.

4.1. Diagnóstico de la competencia de razonamiento

Teniendo en cuenta el *Reporte de resultados históricos del examen Saber 11°* en la institución educativa de los años 2016 a 2018, se puede destacar la situación que tienen los porcentajes de respuestas incorrectas en el aprendizaje evaluado por el Icfes, como lo muestra la figura 8: *Aprendizaje N°1. Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas*, el cual tiene estrecha relación con el desarrollo de la competencia matemática de razonamiento.

Figura 8

Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en el aprendizaje evaluado N°1.



Fuente: Icfes (2018a, p.22)

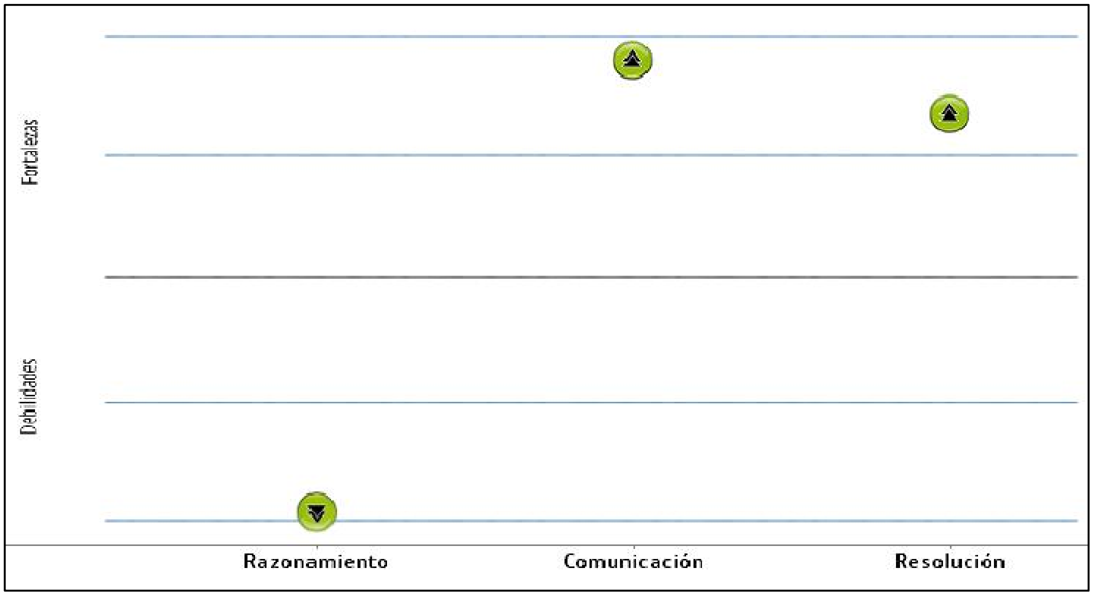
En la figura 8 se observa que los estudiantes de la I.E. Liceo Departamental de grado 11 desde el año 2016 hasta el 2018 han tenido un porcentaje promedio de respuestas incorrectas en las preguntas que evalúan el aprendizaje N°1 mencionado, entre el 35% y el 39%. Esto lo posiciona en el nivel amarillo de atención, pues, si para los siguientes años sigue la tendencia que traía de crecimiento en respuestas incorrectas, lo más probable es que en el 2019 entrase a nivel naranja de alerta.

Lo anterior evidencia que la institución debía tomar medidas curriculares y pedagógicas en el área de matemáticas para mejorar el aprendizaje de sus estudiantes y de paso sus resultados en las pruebas estandarizadas de evaluación. No obstante, en el 2019 los resultados de la prueba Saber 11 evidenciaron un sostenimiento en el mismo nivel amarillo de porcentaje de respuestas incorrectas para el mismo aprendizaje evaluado, en un 33% (Icfes, 2019, p.28).

Haciendo un análisis del historial de resultados en las pruebas presentadas por los estudiantes egresados en el 2019, se puede destacar que estos habían presentado las últimas pruebas Saber de 9° que se realizaron en el año lectivo 2017 (en los años 2018 y 2019, el Icfes no realizó pruebas saber de 9°) y sus resultados respecto a las competencias matemáticas y los componentes evaluados evidenciaron la problemática que se venía presentando respecto a la competencia matemática de razonamiento (ver figura 9) y a los conceptos y procesos relacionados con el componente geométrico-métrico (ver figura 10). De la interpretación de estas dos figuras se concluye que: "En comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al de la institución en el área de Matemáticas y en el grado noveno, el establecimiento es muy débil en la competencia de razonamiento y argumentación, y muy débil en el componente geométrico-métrico" (Icfes, 2018b, p.7).

Figura 9

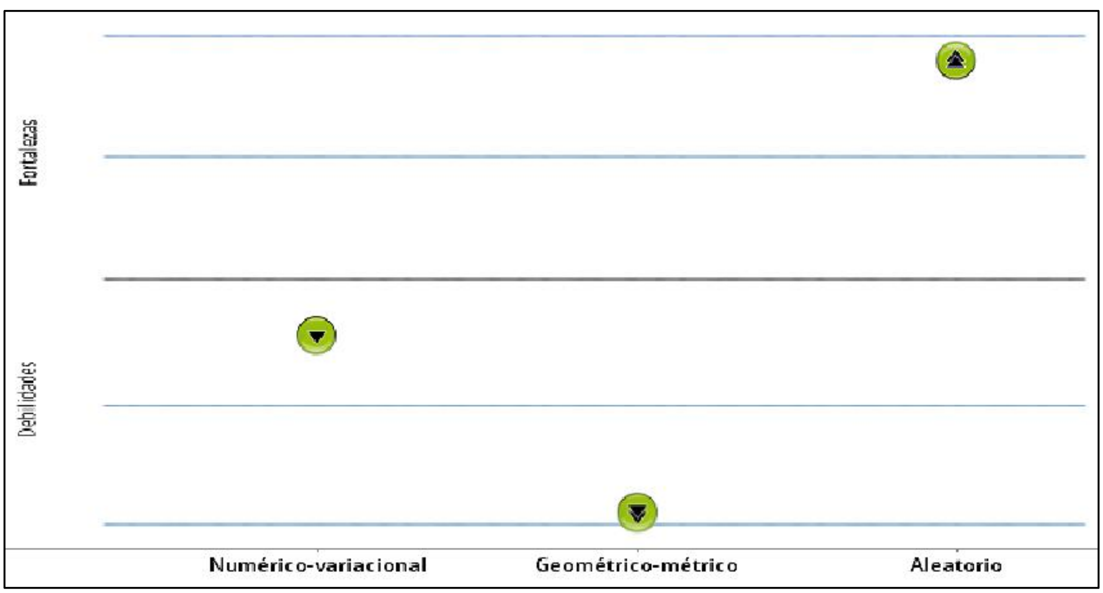
Competencias evaluadas, matemáticas - grado noveno



Fuente: Icfes (2018b, p.7)

Figura 10

Componentes evaluados, matemáticas - grado noveno



Fuente: Icfes (2018b, p.7)

Lo anterior evidencia que hasta el año 2019 se presenta una problemática respecto al desarrollo de la competencia matemática de razonamiento, en los estudiantes egresados de grado 11°. Ahora bien, respecto al tema específico de la asignatura de trigonometría en el año 2018, cuando dichos estudiantes evaluados en el 2019 se encontraban en grado 10°, se puede verificar en las estadísticas del sistema de calificaciones de la institución (I.E. Liceo Departamental, 2018b), presentadas en el Anexo A, que en el primer periodo un alto porcentaje (43,06%, es decir, 90 de 209 estudiantes) obtuvieron bajo desempeño (valoración entre 1,0 y 2,9 de 5,0) en el indicador relacionado con el aprendizaje de las razones trigonométricas: *Argumenta, resuelve y propone problemas que involucran las razones trigonométricas.*

Por otra parte, para tener presente el estado del desarrollo de la competencia matemática de razonamiento geométrico en la institución, se termina este análisis revisando el desempeño de los estudiantes que realizaron las actividades propuestas en esta investigación en el año 2019. Estos estudiantes cuando estaban en grado noveno (año lectivo 2018) no presentaron pruebas Saber 9°, porque el MEN no las implementó en ese año. Por lo tanto, se analiza el desempeño que tuvieron en el área de geometría, específicamente en el segundo periodo en el cual se le proponían problemas de semejanza de triángulos en los que debían desarrollar sus estrategias de razonamiento para resolverlos en el contexto de aplicación del Teorema de Thales. Respecto a esto se puede verificar en las estadísticas que el 71,43% de los estudiantes de grado noveno (85 de 119, ver Anexo B), reprobaron el indicador de aprendizaje relacionado con la comprobación de semejanza de triángulos desde la aplicación del teorema de Thales (I.E. Liceo Departamental, 2018c).

Es muy probable que los anteriores resultados negativos en cuanto al aprendizaje de los temas de la geometría escolar básica, tales como la semejanza de triángulos, siga siendo consecuencia de una anquilosada forma de enseñanza tradicional de la geometría. En la enseñanza tradicional de la semejanza de triángulos, los docentes inician una exposición de los criterios de semejanza mostrando una gráfica con dos triángulos entre los cuales se establece la relación propia del criterio a ejemplificar (AA, LAL y LLL). Seguido, los docentes presentan ejemplos de verificación de la semejanza de dos triángulos utilizando cada uno de los criterios, para luego pasar a la propuesta de ejercicios de práctica y por último, la evaluación escrita con ejercicios parecidos a los de la práctica. Así pues, los investigadores Briceño, E. & Alamillo, L. (2017, p.112) expresan que la dificultad en el aprendizaje de la semejanza por parte de los estudiantes, se debe a que en la enseñanza tradicional de la geometría se recurre al uso excesivo de la memorización y aplicación de fórmulas que carecen, conceptualmente, de significado para el estudiante. Además, otra posible causa de la dificultad para alcanzar este aprendizaje puede ser, como lo expresa González *et al.* (2017), que: "en la enseñanza tradicional de la trigonometría (o de la geometría), las figuras dibujadas por el maestro en la pizarra, además de ser estáticas y rígidas, pueden ser muy diferentes de aquello que él quiere representar" (p. 401). De este modo se confirma la necesidad de proponer estrategias metodológicas distintas a la tradicional, en la que se recurra a representaciones gráficas dinámicas, para la enseñanza de la geometría escolar.

4.2. Diseño e implementación de la secuencia didáctica

En primer lugar, se aclara que las actividades de la secuencia didáctica fueron propuestas en un orden específico respecto a las consideraciones teóricas realizadas sobre los conceptos y los procesos que se involucran en ellas mismas, con relación al desarrollo de la competencia del razonamiento geométrico, y en especial con el proceso de visualización. Así pues, se decide plantear como primera actividad el análisis de las tres razones trigonométricas básicas, desde sus definiciones como la relación entre los tres lados de un triángulo rectángulo, siendo esta la forma como se dio el desarrollo histórico de las razones trigonométricas, como objetos matemáticos, según se expuso en el apartado 2.5 del marco teórico.

Las actividades de la secuencia didáctica propuesta en esta investigación se dividen en tres secciones, enfocando la idea de que el desarrollo del razonamiento geométrico se puede favorecer, cuando se realiza un tratamiento conceptual de las razones trigonométricas, que abarque desde lo básico hasta lo más complejo, tal como lo plantea el modelo de los niveles de razonamiento de van Hiele (mencionados en el apartado 2.6 del marco teórico).

Siguiendo la idea, se puede decir que las actividades de la sección II de la secuencia didáctica, en las que se analiza la relación que hay entre las razones trigonométricas y las longitudes de los segmentos específicos, que las representan en el círculo unitario sobre el plano cartesiano, permiten una interpretación más geométrica que algebraica, o numérica, de las razones trigonométricas, que conlleva a una mejor comprensión de las propiedades de las gráficas de las funciones trigonométricas básicas en las actividades de la sección III de la secuencia didáctica, gracias a los procesos de visualización y conjeturación que se originan con las preguntas planteadas en ellas.

En esta misma idea, se puede mencionar la tesis doctoral del investigador Cos Dabiri Fi (2003), en la cual exhibe como una conjetura, para explicar la problemática de la enseñanza de la trigonometría desde los conocimientos (pedagógicos y matemáticos) que tienen los maestros de matemáticas en formación, que: *estos no aprendieron ni entendieron adecuadamente la trigonometría cuando estuvieron expuestos a estas ideas en las escuela secundaria o en su uso posterior de la trigonometría en los cursos de matemáticas de la universidad* (p.200). Según esto, las dificultades de la enseñanza de la trigonometría es un problema que se repite de generación a generación, por la insuficiente formación de los docentes de matemáticas en el tema. Además, en el planteamiento de las conclusiones de su tesis Fi se pregunta: *¿Cómo los maestros de matemáticas en formación, desarrollarán las seis razones trigonométricas básicas en sus clases?*, y seguido responde:

> Los resultados indican que los maestros en formación definirán con precisión las seis razones trigonométricas básicas a través de triángulos rectángulos. Sin embargo, la mayoría de estos no hacen las conexiones apropiadas con los triángulos semejantes, lo que se apoya en la comprensión de triángulos rectángulos semejantes, y que a la vez produce las nociones de las razones trigonométricas. En este punto se tuvo escasa discusión sobre las definiciones de las funciones trigonométricas o el uso del círculo unitario. (p.209)

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que para ordenar las actividades de la secuencia didáctica objeto de esta investigación, se tuvo en cuenta la sugerencia dada por Fi (2003), respecto a hacer un mayor énfasis en la relación de semejanza de los triángulos rectángulos para la construcción del concepto de las seis razones trigonométricas, y de paso desarrollar el razonamiento geométrico; así como disponer de un mayor número de relaciones conceptuales, al trabajar las razones y las funciones trigonométricas, no solo desde el enfoque de los triángulos rectángulos, sino también, con el uso del círculo unitario.

A continuación, se presentan las actividades diseñadas con su respectivo análisis a priori como se planteó en el capítulo 3 Diseño metodológico, de acuerdo a la perspectiva metodológica de la microingeniería didáctica. Al final de esta presentación, se especifican detalles de la implementación realizada, logros, dificultades y decisiones tomadas en el camino de la misma investigación.

La tabla 5 presenta los recursos didácticos diseñados para el desarrollo de cada una de las actividades de la secuencia didáctica objeto de esta investigación, separadas en tres secciones. Estos son los talleres en formato PDF, que se entregaron impresos a los estudiantes y las figuras dinámicas de Geogebra con las que se desarrollaron dichos talleres.

Tabla 5

Recursos didácticos diseñados

Sección	Actividad	Taller (Impreso)	Figura en Geogebra
I	1. Razones seno, coseno y tangente.	Actividad 1.pdf	Actividad 1A.ggb Actividad 1B.ggb
II	2. Razones seno y coseno en el círculo unitario.	Actividad 2.pdf	Actividad 2.ggb
II	3. Razones tangente y secante en el círculo unitario	Actividad 3.pdf	Actividad 3.ggb
II	4. Razones cotangente y cosecante en el círculo unitario.	Actividad 4.pdf	Actividad 4.ggb
III	5. Función seno	Actividad 5.pdf	Actividad 5.ggb
III	6. Función coseno	Actividad 6.pdf	Actividad 6.ggb
III	7. Función tangente	Actividad 7.pdf	Actividad 7.ggb

Fuente: Elaboración propia

Cabe aclarar que todos los talleres tenían el mismo título general: “Razones Trigonométricas”, solo se diferencian por el número de la actividad y no se daba un título específico como el propuesto en la tabla 3, para no predisponer las respuestas de los estudiantes, en algunas preguntas de los mismos talleres.

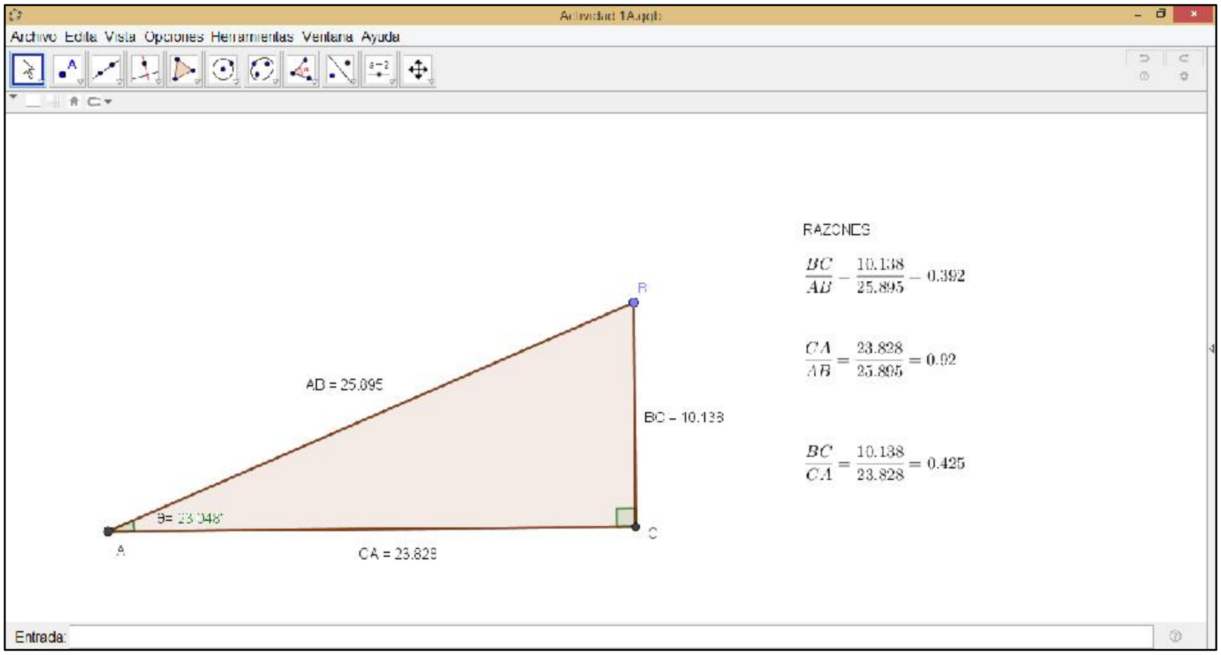
4.2.1. Secuencia didáctica - Sección I

En esta sección se tiene el desarrollo de la ***Actividad 1***, taller que consta de tres partes, de las cuales la primera se trabaja con base a la figura de Geogebra llamada Actividad 1A.ggb (ver figura 11) y la segunda y tercera parte se trabajan con base a la figura de Geogebra titulada Actividad 1B.ggb (ver figura 12).

La primera parte de esta actividad tiene como objetivo principal que los estudiantes visualicen y descubran por su propia cuenta, que las razones trigonométricas dependen específicamente del valor que tenga el ángulo agudo del triángulo rectángulo para el cual se están definiendo las razones mismas, y que no dependen de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo en cuestión, aunque se calculen haciendo uso de dichas longitudes.

Figura 11

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 1A.ggb)



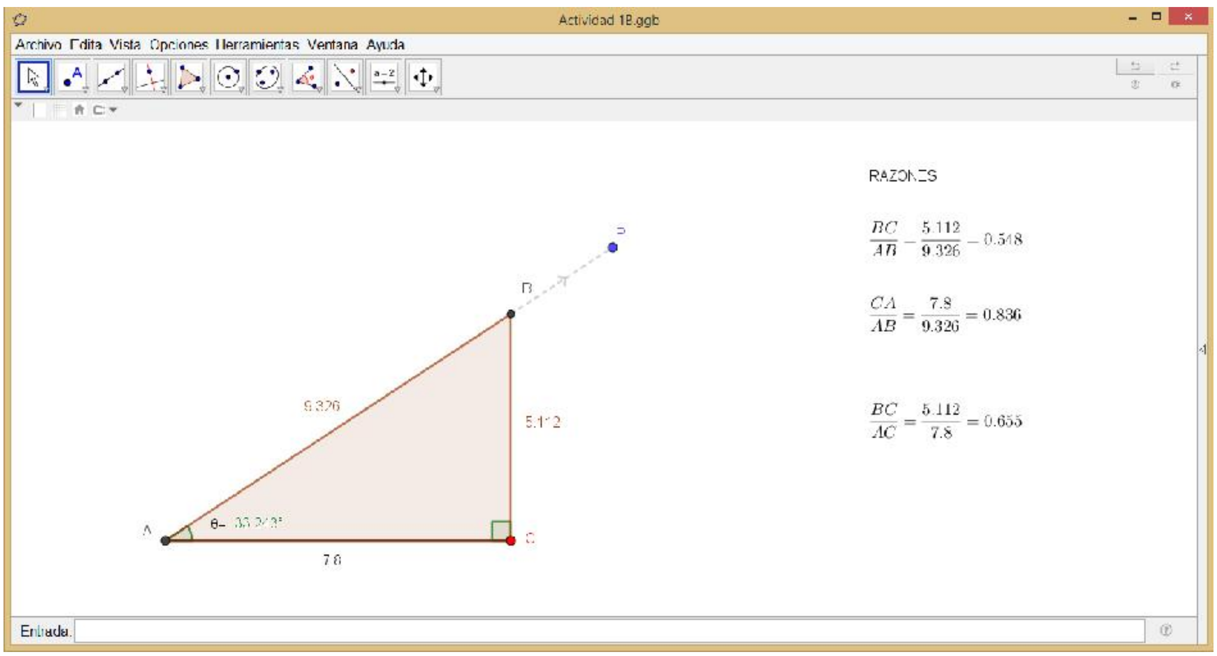
Fuente: Elaboración propia

La figura 11 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 1A.ggb”, en el cual ellos tienen que explorar, visualizar y concluir que al cambiar el ángulo agudo los valores de las razones también cambian. Se trata de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (con ángulo recto en C), cuyas longitudes de sus lados se presentan sobre cada uno de sus segmentos AB, BC y CA; además, sobre el vértice A se presenta el ángulo agudo θ con su medida en grados (con tres cifras decimales), y al lado derecho se tienen las tres razones entre los segmentos respectivos del triángulo rectángulo ABC. En esta figura el único punto que se puede mover, usando el cursor del ratón, es el vértice B (punto de color azul). Este movimiento hace que las longitudes de los catetos BC y CA cambien, mientras la longitud de la hipotenusa se queda invariante.

Así pues, por medio de la manipulación de la figura dinámica en Geogebra, se espera que los estudiantes visualicen que los valores de las razones mostradas en pantalla, al modificar el ángulo agudo θ, también van a cambiar obligatoriamente, porque el cambio en el ángulo hace que los catetos cambien sus respectivas longitudes, aunque se mantenga constante la hipotenusa. Además, se proponen dos preguntas adicionales en las que se invita a los estudiantes a explorar lo que sucede con los valores de las razones cuando el ángulo agudo toma un valor nulo (0°) o recto (90°).

Figura 12

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 1B.ggb)



Fuente: Elaboración propia

La segunda parte de esta actividad tiene como objetivo principal que los estudiantes continúen reafirmando la conclusión, que hayan podido deducir en la primera parte, acerca de la dependencia que tienen los valores de las razones con el cambio del ángulo agudo θ, y la no dependencia de ellas respecto a las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

La figura 12 presenta lo mostrado en pantalla al abrir el archivo de Geogebra "Actividad 1B.ggb". En este los estudiantes deben continuar la exploración, visualización y conclusión iniciada en la primera parte, es decir, que al cambiar el ángulo agudo θ los valores de las razones también cambian. También, podrán visualizar que si el ángulo agudo no cambia y los lados del triángulo rectángulo si lo hacen de manera proporcional, entonces las razones se mantienen invariantes. Se trata de un triángulo rectángulo similar al descrito en la figura 11, con las mismas razones entre sus lados respectivos. La diferencia es que en esta figura se tienen dos puntos que se pueden mover: el primero es el punto P (color azul) que se encuentra sobre una semirrecta que hace mover libremente el ángulo agudo θ, haciendo que las longitudes de la hipotenusa AB y el cateto BC cambien de longitud (quedando quieto el cateto CA), y como consecuencia los valores de las razones cambian igualmente. El segundo es el punto del vértice C (color rojo), el cual puede modificar la longitud del cateto CA, lo cual hace que se modifiquen las longitudes de los otros dos lados al mismo tiempo, pero en este caso el ángulo agudo θ se mantiene fijo, así como el ángulo recto en C. El movimiento del punto C, permite visualizar que las razones se mantienen constantes en sus resultados, pues los lados varían en forma proporcional, debido a que los triángulos que se obtienen siempre son semejantes entre sí, semejanza justificada por el criterio ángulo-ángulo (AA).

Por lo tanto, con la segunda parte de esta actividad se espera que los estudiantes terminen de visualizar y concluir la propiedad de las razones trigonométricas de su dependencia absoluta y única del valor del ángulo agudo para el cual se están definiendo y que no importa el tamaño del triángulo rectángulo, si el ángulo agudo es el mismo, las razones trigonométricas tendrán siempre el mismo valor.

La tercera parte de la Actividad 1 tiene como objetivo formalizar las definiciones de las tres razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente). En esta parte se solicita que los estudiantes utilicen la notación de segmentos de los lados del triángulo rectángulo de la figura 12, para definir las razones de seno como lado opuesto al ángulo agudo sobre hipotenusa, de coseno como lado adyacente al ángulo agudo sobre hipotenusa y de tangente como lado opuesto al ángulo agudo sobre el lado adyacente al ángulo agudo.

De acuerdo a la anterior descripción de la Actividad 1, en la que se expusieron de manera breve los objetivos generales de cada parte, y para efectos de la sistematización de los resultados que se realizará en la evaluación de la secuencia didáctica, se plantean los siguientes niveles de desempeño esperados:

N_1: Los estudiantes reconocen los elementos variantes e invariantes del triángulo rectángulo y de la información presentada, pero no establece relaciones entre ellos y lo sucedido con las razones trigonométricas.

N_2: Los estudiantes establecen una relación entre los elementos variantes e invariantes del triángulo rectángulo y de la información presentada, respecto a lo sucedido con las razones trigonométricas, pero no lo justifica con argumentos claros y precisos.

N_3: Los estudiantes justifican la relación entre los elementos variantes e invariantes del triángulo rectángulo y de la información presentada, respecto a lo sucedido con las razones trigonométricas, pero no lo comunican con un lenguaje y proceso adecuado.

N_4: Los estudiantes comunican con un lenguaje y proceso adecuado la justificación para la relación identificada entre los elementos variantes e invariantes del triángulo rectángulo y de la información presentada, respecto a lo sucedido con las razones trigonométricas.

Del mismo modo, de acuerdo a la intencionalidad que tienen las preguntas para evidenciar un procedimiento específico que se espera sea realizado por los estudiantes al trabajar la Actividad 1, y para efectos de la sistematización de los resultados, se plantean los siguientes procesos esperados:

D_1: Los estudiantes identifican elementos variantes e invariantes en el triángulo rectángulo obtenido y la información dada.

D_2: Los estudiantes determinan los valores del seno y coseno cuando el ángulo agudo se convierte en ángulo nulo (0°) o recto (90°).

D_3: Los estudiantes establecen la relación de semejanza entre los triángulos rectángulos que se obtienen al mover el punto C.

D_4: Los estudiantes justifican la relación de semejanza entre los triángulos rectángulos que se obtienen al mover el punto C.

D_5: Los estudiantes establecen la dependencia de las razones trigonométricas con el valor del ángulo agudo para el cual se determinan.

D_6: Los estudiantes definen las razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) con base a los lados del triángulo rectángulo (usando la nomenclatura de segmentos).

4.2.2. Secuencia didáctica - Sección II

En esta sección se desarrollan tres actividades que permiten establecer las relaciones entre las distintas razones trigonométricas desde la representación de las respectivas “líneas trigonométricas” definidas en el círculo unitario.

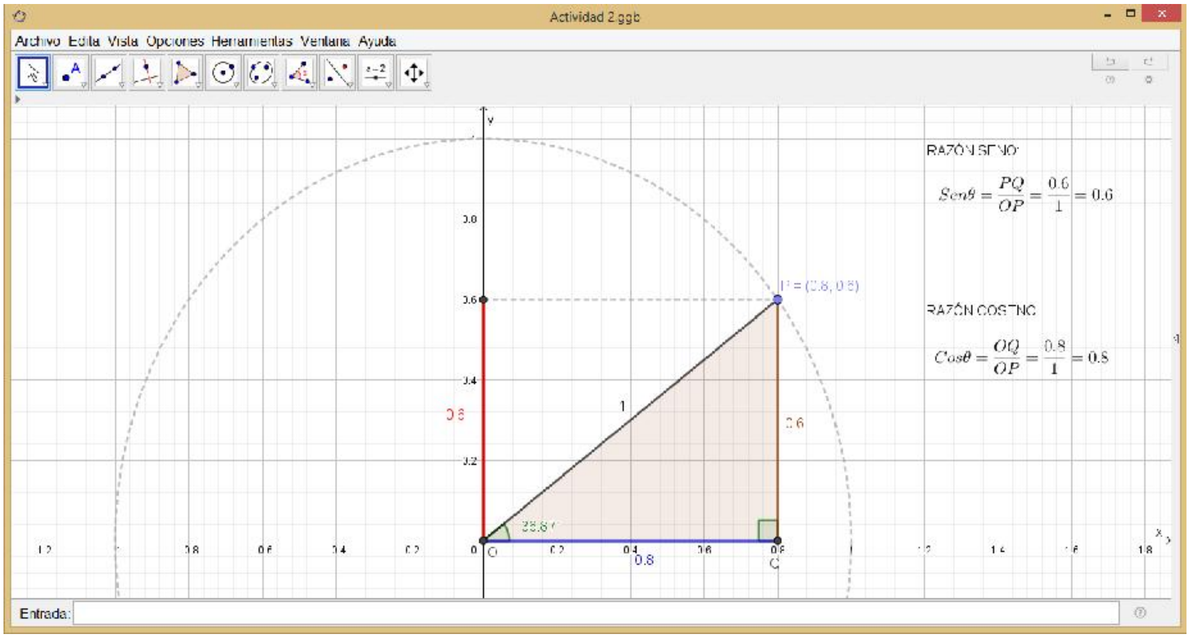
En primer lugar, la ***Actividad 2*** tiene como objetivo mostrar la representación geométrica de las razones trigonométricas por medio de los segmentos específicos cuyas longitudes equivalen a los valores de las mismas razones seno y coseno, longitudes que se relacionan con las coordenadas de un punto sobre el círculo de radio uno (ver figura 13).

Después de descubrir la equivalencia entre los valores de las coordenadas del punto sobre el círculo unitario, las longitudes de los segmentos que se proyectan desde el punto hacia el eje X y el eje Y, respectivamente, y los valores de las razones coseno y seno; con la Actividad 2 se espera que los estudiantes visualicen la relación pitagórica entre dichos elementos (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa) para determinar y escribir formalmente la expresión algebraica de la identidad pitagórica principal que relaciona al seno y el coseno de un ángulo cualquiera.

La figura 13 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 2.ggb”, en el cual se tiene un plano cartesiano con un círculo de radio unitario, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P (azul) que muestra los valores de sus coordenadas (x, y). También se tiene la representación del triángulo rectángulo que se forma si se toma el origen (0, 0) como un vértice, el punto P sobre el círculo unitario como otro vértice y el punto Q que se obtiene de la proyección perpendicular desde el punto P sobre el eje X como el tercer vértice. Tomando los segmentos de dicho triángulo rectángulo se proponen las razones trigonométricas seno y coseno para el ángulo agudo que se forma en el vértice del origen de coordenadas.

Figura 13

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 2.ggb)



Fuente: Elaboración propia

Según la anterior descripción de la Actividad 2, se plantean los siguientes niveles de desempeño esperados, para efectos de la sistematización de los resultados que se realizará en la evaluación de la secuencia didáctica:

N1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (coordenadas (x, y) del punto P, longitudes de segmentos OQ y QP, razones coseno y seno para el ángulo θ), pero no establecen alguna relación entre ellos.

N2: Los estudiantes establecen una relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (coordenadas (x, y) del punto P, longitudes de segmentos OQ y QP, razones coseno y seno para el ángulo θ, respectivamente), pero no justifican su validez.

N3: Los estudiantes justifican la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (coordenadas (x, y) del punto P, longitudes de segmentos OQ y QP, razones coseno y seno para el ángulo θ, respectivamente), pero no la comunican con un lenguaje adecuado.

N_4: Los estudiantes comunican con un lenguaje y proceso adecuado la justificación para la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (coordenadas (x, y) del punto P, longitudes de segmentos OQ y QP, razones coseno y seno para el ángulo θ, respectivamente)

Así mismo, según la intencionalidad que tienen las preguntas para evidenciar un procedimiento específico esperado en el desarrollo de la Actividad 2 por parte de los estudiantes, y para efectos de la sistematización de los resultados, se plantean los siguientes procesos esperados:

D_1: Los estudiantes identifican la equivalencia entre las razones trigonométricas coseno y seno para el ángulo agudo θ, con las coordenadas (x, y) del punto P sobre el círculo unitario, respectivamente.

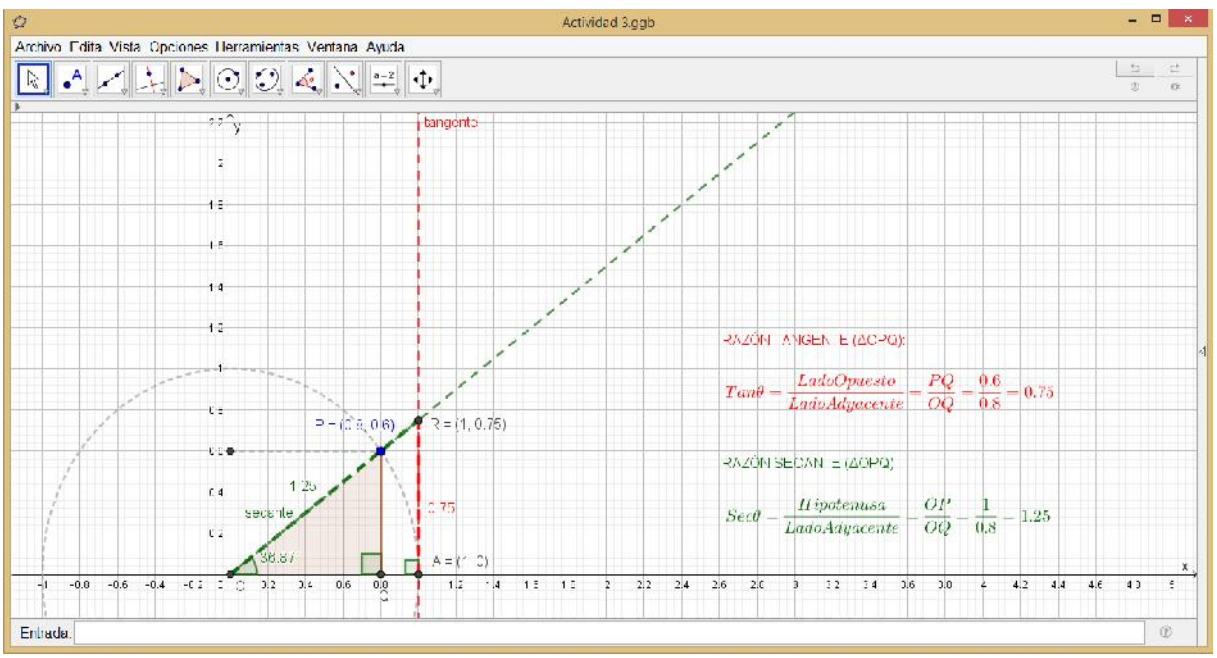
D_2: Los estudiantes identifican la equivalencia entre las razones trigonométricas seno y coseno, con las longitudes de los segmentos respectivos que las representan en el plano cartesiano sobre el círculo unitario.

D_3: Los estudiantes determinan la relación pitagórica que existe entre los tres lados del triángulo rectángulo formado sobre el círculo unitario, para expresar la identidad trigonométrica pitagórica principal, que relaciona al seno y el coseno.

En segundo lugar, la ***Actividad 3*** tiene como objetivo mostrar la representación geométrica de las razones trigonométricas por medio de los segmentos definidos, uno sobre la línea tangente al círculo unitario en el punto (1, 0) y otro sobre la línea secante al círculo unitario por el punto P. Las longitudes de dichos segmentos equivalen a los valores de las razones trigonométricas, tangente y secante respectivamente, definidas para el ángulo agudo con vértice en el origen (0, 0). Del mismo modo, se espera en esta actividad que los estudiantes después de descubrir la equivalencia que hay entre los valores de las longitudes de los segmentos secante y tangente con los valores de las razones trigonométricas secante y tangente del ángulo agudo con vértice en el origen; logren visualizar la relación pitagórica entre los tres elementos (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa) para determinar y escribir formalmente la expresión algebraica de la identidad pitagórica que relaciona a la tangente y la secante de un ángulo cualquiera.

Figura 14

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 3.ggb)



Fuente: Elaboración propia

La figura 14 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 3.ggb”, en el cual se tiene, del mismo modo que en la actividad anterior, un plano cartesiano con un círculo de radio unitario, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P (azul) que muestra los valores de sus coordenadas (x, y). También se tiene el mismo triángulo rectángulo de vértices OPQ, y lo diferente con respecto a la anterior actividad es que se proyecta una recta tangente al círculo unitario por el punto A (1, 0) y se proyecta la recta secante al círculo unitario por el punto móvil P (x, y), para así en la intersección de las dos rectas definir el punto R cuya abscisa siempre es 1 y su ordenada varía según el movimiento del punto P sobre el círculo unitario. De este modo, se espera que los estudiantes visualicen que el triángulo rectángulo ORA que se forma, es semejante al triángulo rectángulo OPQ por el criterio A-A y así plantear una proporción adecuada para demostrar la validez de afirmar que las longitudes de los segmentos secante y tangente, en realidad equivalen a los valores de las razones secante y tangente del ángulo agudo θ, respectivamente.

Tomando en cuenta la anterior descripción de la Actividad 3, se plantean los siguientes niveles de desempeño esperados, los cuales se usarán en la sistematización de los resultados para evaluar la secuencia didáctica:

N_1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos AR y OR, razón tangente y razón secante para el ángulo θ), pero no establecen alguna relación entre ellos.

N_2: Los estudiantes establecen una relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos AR y OR, razón tangente y razón secante para el ángulo θ, respectivamente), pero no justifican su validez.

N_3: Los estudiantes justifican la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos AR y OR, razón tangente y razón secante para el ángulo θ, respectivamente), pero no la comunican con un lenguaje adecuado.

N_4: Los estudiantes comunican con un lenguaje y proceso adecuado la justificación para la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos AR y OR, razón tangente y razón secante para el ángulo θ, respectivamente)

De la misma manera, de acuerdo a la intencionalidad que tienen las preguntas para evidenciar un procedimiento específico esperado por parte de los estudiantes en el desarrollo de la Actividad 3, y para realizar la sistematización de los resultados, se plantean los siguientes procesos esperados:

D_1: Los estudiantes determinan y justifican la semejanza entre los triángulos rectángulos de la figura.

D_2: Los estudiantes establecen la proporcionalidad entre los lados respectivos de los triángulos rectángulos de la figura.

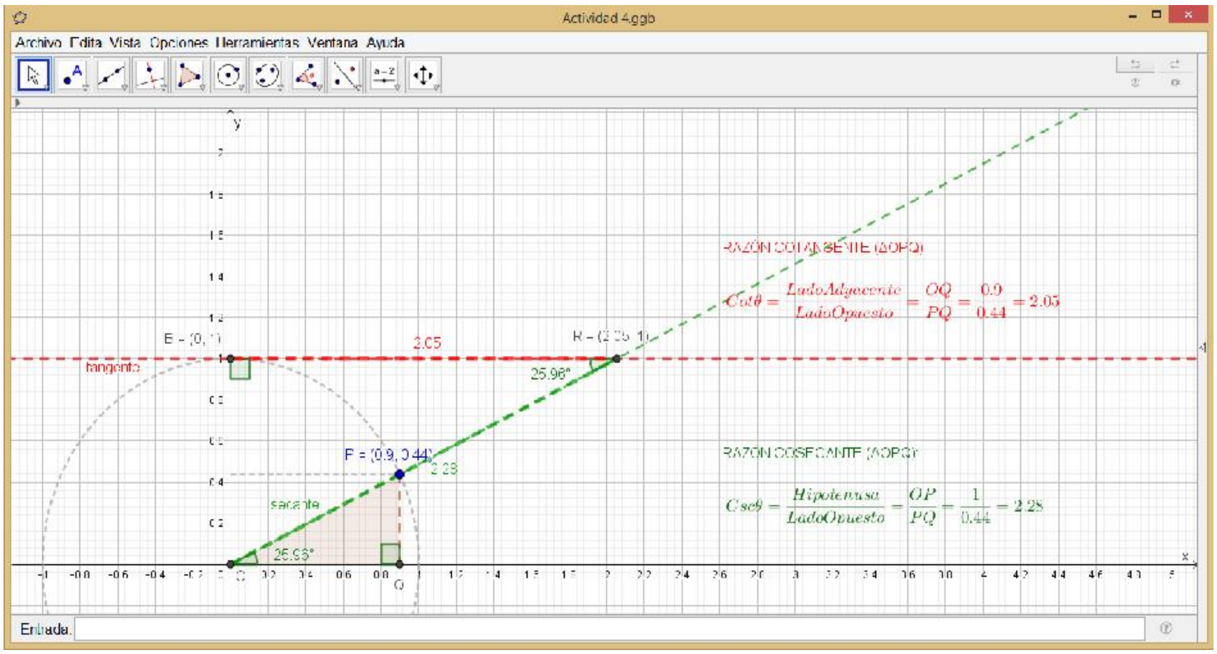
D_3: Los estudiantes identifican la equivalencia entre las razones trigonométricas tangente y secante, con las longitudes de los segmentos respectivos que las representan en el plano cartesiano sobre el círculo unitario.

D_4: Los estudiantes determinan la relación pitagórica que existe entre los tres lados del triángulo rectángulo mayor formado sobre el círculo unitario, para expresar la identidad trigonométrica pitagórica respectiva, que relaciona la tangente y la secante.

En tercer lugar, esta sección de la secuencia didáctica termina con el desarrollo de la ***Actividad 4***, cuyo objetivo es mostrar la representación geométrica de las razones cosecante y cotangente, mediante los segmentos específicos que se forman sobre las rectas tangente al círculo unitario por el punto (0, 1) y secante al círculo por el punto P (x, y). Las longitudes de dichos segmentos son equivalentes a los valores de las razones trigonométricas cotangente y cosecante del ángulo agudo con vértice en el origen (0, 0) (ver figura 15).

Figura 15

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 4.ggb)



Fuente: Elaboración propia

Así pues, en esta actividad se espera que los estudiantes primero visualicen y comprueben, mediante las propiedades de triángulos semejantes y la aplicación de proporciones, que los segmentos definidos sobre las rectas tangente horizontal (cotangente) y la respectiva recta secante asociada (cosecante), tienen una longitud equivalente a los valores de las razones cotangente y cosecante, respectivamente. Y luego, se espera que logren establecer también la relación pitagórica entre los lados del triángulo rectángulo formado con dichos segmentos especiales, para escribir la identidad pitagórica que relaciona la cotangente y la cosecante de cualquier ángulo.

La figura 15 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra "Actividad 4.ggb", en el cual se tiene, del mismo modo que en las dos actividades anteriores, un plano cartesiano con un círculo de radio unitario, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P de coordenadas (x,y). También se tiene el mismo triángulo rectángulo de vértices OPQ, y lo diferente con respecto a la anterior actividad es que se proyecta una recta tangente horizontal al círculo unitario por el punto B (0, 1) y se proyecta la recta secante al círculo unitario por el punto móvil P (x, y), para así en la intersección de las dos rectas definir el punto R cuya ordenada siempre es 1 y su abscisa varía según el movimiento del punto P sobre el círculo unitario.

En esta actividad, se espera que los estudiantes visualicen que el triángulo rectángulo ORB que se forma, es semejante al triángulo rectángulo POQ por el criterio A-A y así logren plantear una proporción válida para verificar la afirmación de que las longitudes de los segmentos cosecante y cotangente, en realidad equivalen a los valores de las razones cosecante y cotangente del ángulo agudo θ, respectivamente.

Ahora bien, de la misma manera como se hizo para las actividades anteriores, según la anterior descripción de la Actividad 4, se plantean los siguientes niveles de desempeño "N_i" y procesos esperados "P_i", los cuales se usarán en la sistematización de los resultados para evaluar la secuencia didáctica:

N_1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos BR y OR, razón cotangente y razón cosecante para el ángulo θ), pero no establecen alguna relación entre ellos.

N_2: Los estudiantes establecen una relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos BR y OR, razón cotangente y razón cosecante para el ángulo θ, respectivamente), pero no justifican su validez.

N_3: Los estudiantes justifican la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos BR y OR, razón cotangente y razón cosecante para el ángulo θ, respectivamente), pero no la comunican con un lenguaje adecuado.

N_4: Los estudiantes comunican con un lenguaje y proceso adecuado la justificación para la relación de igualdad entre los valores numéricos de los elementos dados en la figura presentada (longitudes de segmentos BR y OR, razón cotangente y razón cosecante para el ángulo θ, respectivamente)

D_1: Los estudiantes determinan y justifican la semejanza entre los triángulos rectángulos de la figura.

D_2: Los estudiantes establecen la proporcionalidad entre los lados respectivos de los triángulos rectángulos de la figura.

D_3: Los estudiantes identifican la equivalencia entre las razones trigonométricas cotangente y cosecante, con las longitudes de los segmentos respectivos que las representan en el plano cartesiano sobre el círculo unitario.

D_4: Los estudiantes determinan la relación pitagórica que existe entre los tres lados del triángulo rectángulo mayor formado sobre el círculo unitario, para expresar la identidad trigonométrica pitagórica respectiva, que relaciona la cotangente y la cosecante.

4.2.3. Secuencia didáctica - Sección III

En esta sección se desarrollan tres actividades que permiten establecer la relación de las longitudes de las líneas trigonométricas definidas en el círculo unitario, establecidas en la Sección II, y los valores de las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) para un ángulo en general cuya representación cartesiana y=f(x) origina las curvas del seno, coseno y tangente, respectivamente.

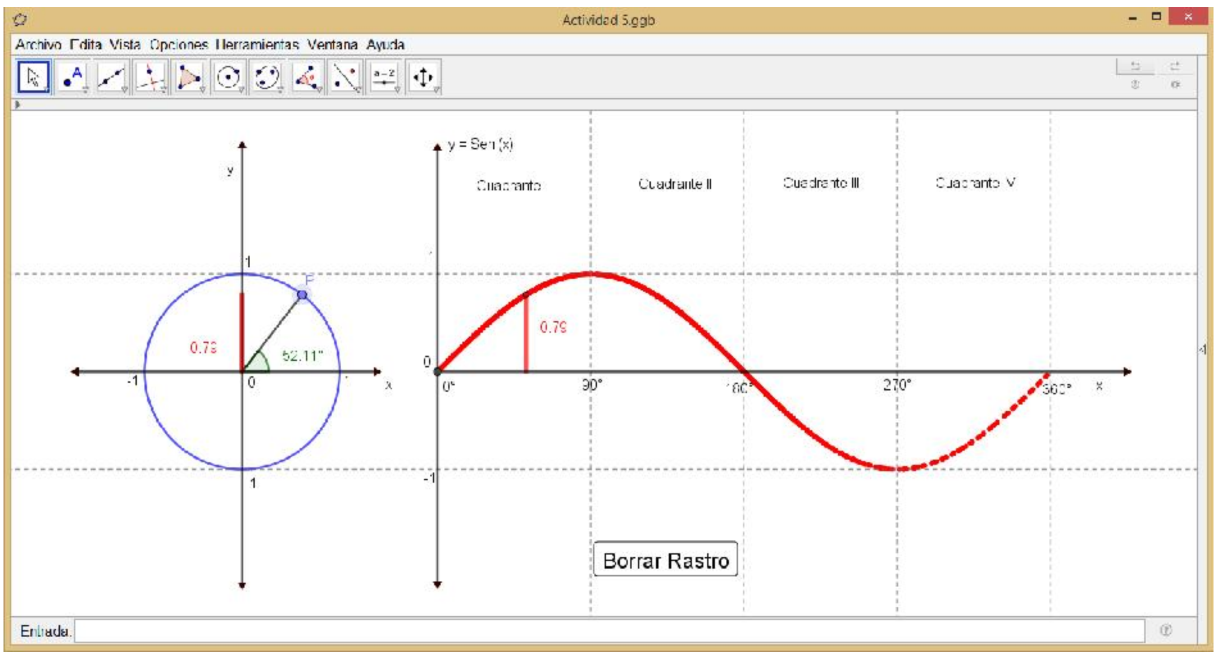
El objetivo de esta sección de la secuencia didáctica es establecer la conexión que existe entre la representación geométrica (segmento específico para el seno, el coseno o la tangente) y la representación funcional (curva del seno, del coseno o de la tangente), para así dar el paso de interpretación conceptual desde las razones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, hasta las funciones trigonométricas para cualquier ángulo en general.

Los dispositivo en pantalla presentados en las figuras 16, 17 y 18 son unas potentes herramientas para establecer el puente entre la interpretación geométrica y algebraica de las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente, respectivamente). Además, con las preguntas del taller, los estudiantes visualizan, descubren y expresan de acuerdo a sus definiciones las respectivas características de continuidad, dominio, rango, crecimiento, signos de valores según cuadrantes y periodo para las funciones seno, coseno y tangente.

En primer lugar, la figura 16 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 5.ggb”, en el cual se tiene, un plano cartesiano pequeño a la izquierda de la pantalla, con un círculo de radio uno, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P (azul). Dicho punto determina con su proyección sobre el eje Y la respectiva línea trigonométrica del seno (segmento rojo), cuya longitud es equivalente al valor del seno del ángulo en posición normal[10]. Al mover dicho punto P sobre el círculo unitario, en el plano cartesiano de la derecha se va mostrando la relación entre el ángulo de giro del radio unitario y el valor del seno de dicho ángulo al proyectar la misma longitud del segmento rojo. La opción de rastro activada sobre el punto extremo de dicho segmento rojo, permite visualizar la curva de la función seno en el plano cartesiano, y al mismo tiempo todas sus características.

Figura 16

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 5.ggb)



Fuente: Elaboración propia

Así pues, para el posterior proceso de sistematización y evaluación de la secuencia didáctica, se plantean los siguientes niveles de desempeño “N_i” y procesos “P_i” esperados por parte de los estudiantes, al desarrollar la ***Actividad 5***:

[10] Se dice que un ángulo está en posición normal cuando su vértice está en el origen de un plano cartesiano y el lado inicial está sobre el semieje positivo de las abscisas X. (Peters, M. & Schaaf, W., 1972, p. 285)

N_1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de la función trigonométrica seno para los ángulos solicitados, pero no establecen alguna relación entre la gráfica de la función seno y la línea trigonométrica del seno en el círculo unitario.

N_2: Los estudiantes establecen una relación entre la gráfica de la función seno y la línea trigonométrica del seno en el círculo unitario, pero no la comunican con claridad y precisión.

N_3: Los estudiantes comunican con un lenguaje claro y preciso la relación entre la gráfica de la función seno y la línea trigonométrica del seno en el círculo unitario.

D_1: Los estudiantes identifican la propiedad de continuidad en la curva de la función seno.

D_2: Los estudiantes determinan el dominio de la función seno.

D_3: Los estudiantes identifican el valor máximo y el valor mínimo de la función seno.

D_4: Los estudiantes determinan el rango de la función seno.

D_5: Los estudiantes determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función seno.

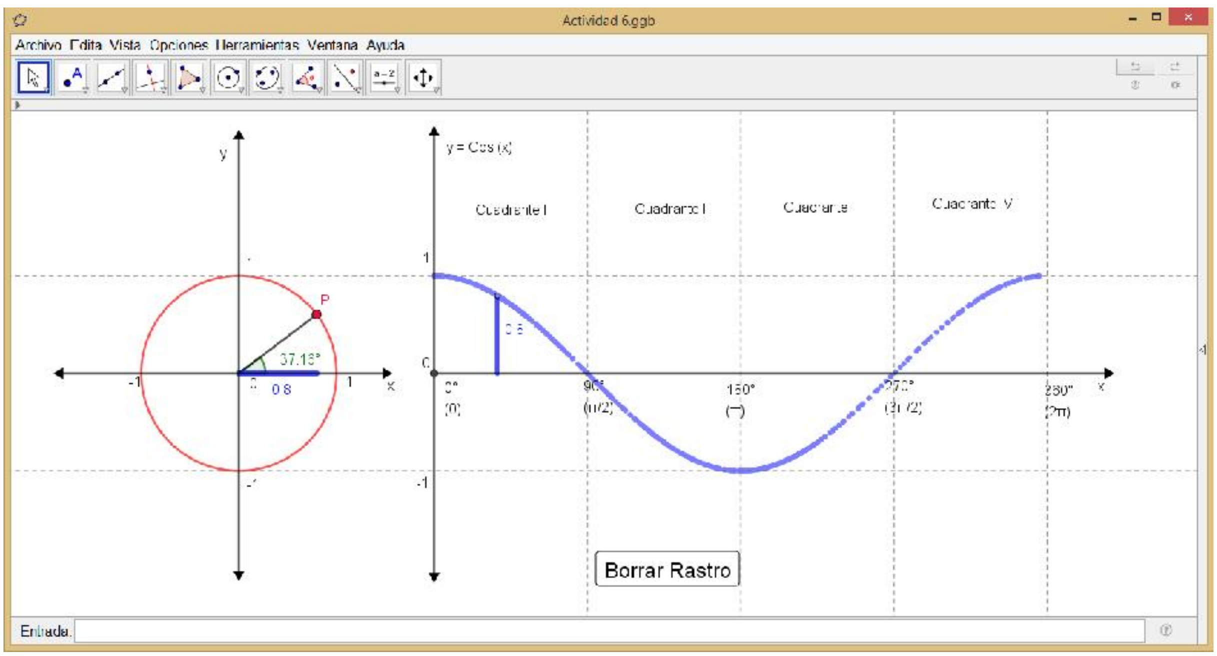
D_6: Los estudiantes establecen los cuadrantes en los que la función seno toma valores positivos o negativos.

D_7: Los estudiantes determinan el periodo de la función seno.

En segundo lugar, la figura 17 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 6.ggb”, en el cual se tiene, un plano cartesiano pequeño a la izquierda de la pantalla, con un círculo de radio uno, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P (rojo). Dicho punto determina con su proyección sobre el eje X la respectiva línea trigonométrica del coseno (segmento azul), cuya longitud es equivalente al valor del coseno del ángulo en posición normal. Al mover dicho punto P sobre el círculo unitario, en el plano cartesiano de la derecha se va mostrando la relación entre el ángulo de giro del radio unitario y el valor del coseno de dicho ángulo al proyectar la misma longitud del segmento azul. La función de rastro del punto extremo de dicho segmento permite visualizar la curva de la función coseno en el plano cartesiano, y de este modo ayuda a visualizar todas sus características.

Figura 17

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 6.ggb)



Fuente: Elaboración propia

Del mismo modo, como se propuso en la anterior actividad, para la ***Actividad 6*** se plantean los siguientes niveles de desempeño “N_i” y procesos “P_i” esperados:

N_1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de la función trigonométrica coseno para los ángulos solicitados, pero no establecen alguna relación entre la gráfica de la función coseno y la línea trigonométrica del coseno en el círculo unitario.

N_2: Los estudiantes establecen una relación entre la gráfica de la función coseno y la línea trigonométrica del coseno en el círculo unitario, pero no la comunican con claridad y precisión.

N_3: Los estudiantes comunican con un lenguaje claro y preciso la relación entre la gráfica de la función coseno y la línea trigonométrica del coseno en el círculo unitario.

D_1: Los estudiantes identifican la propiedad de continuidad en la curva de la función coseno.

D_2: Los estudiantes determinan el dominio de la función coseno.

D_3: Los estudiantes identifican el valor máximo y el valor mínimo de la función coseno.

D_4: Los estudiantes determinan el rango de la función coseno.

D_5: Los estudiantes determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coseno.

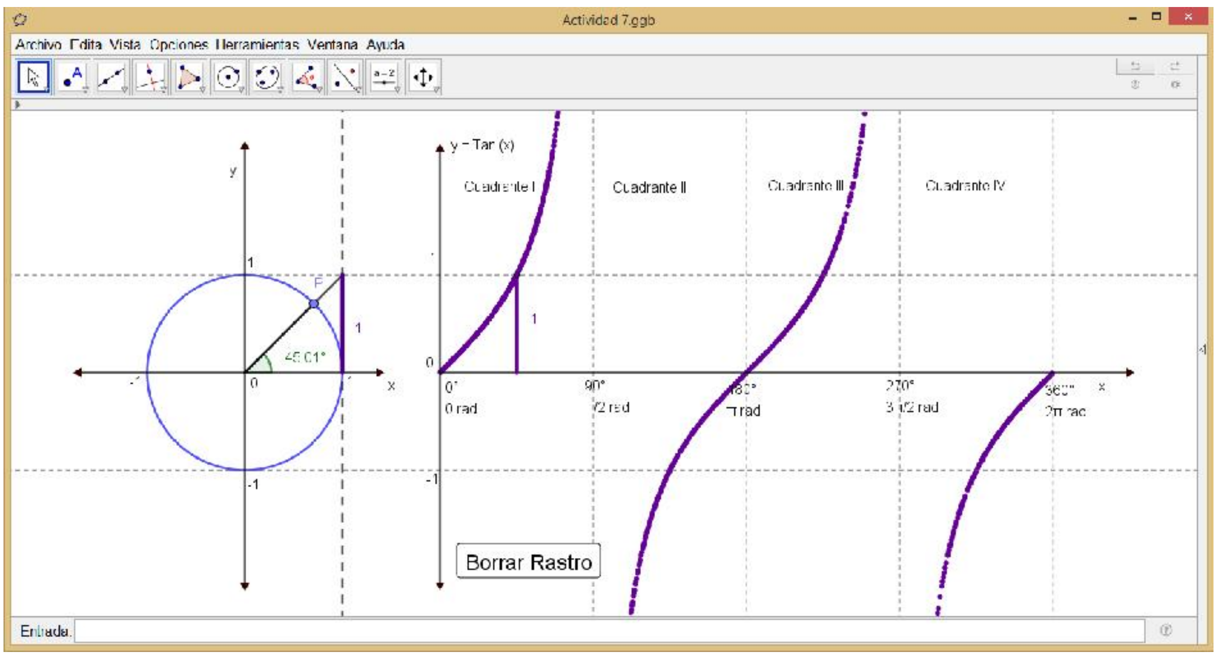
D_6: Los estudiantes establecen los cuadrantes en los que la función coseno toma valores positivos o negativos.

D_7: Los estudiantes determinan el periodo de la función coseno.

Por último, la figura 18 presenta lo que los estudiantes reciben en pantalla al abrir el archivo de Geogebra “Actividad 7.ggb”, en el cual se tiene, un plano cartesiano pequeño a la izquierda de la pantalla, con un círculo de radio uno, sobre el cual se permite el movimiento de un punto P (azul). Dicho punto determina con su proyección sobre la recta tangente al círculo en el punto (1,0) la respectiva línea trigonométrica de la tangente (segmento púrpura), cuya longitud es equivalente al valor de la tangente del ángulo de giro en posición normal. Al mover dicho punto P sobre el círculo unitario, en el plano cartesiano de la derecha se va mostrando la relación entre el ángulo de giro del radio unitario y el valor de la tangente de dicho ángulo al proyectar la misma longitud del segmento púrpura. La herramienta de rastro activada en el punto extremo de dicho segmento púrpura, permite visualizar la curva de la función tangente en el plano cartesiano, y de este modo ayuda a visualizar todas sus características.

Figura 18

Figura dinámica en Geogebra (Actividad 7.ggb)



Fuente: Elaboración propia

De igual manera que para las dos actividades anteriores, se plantean los siguientes niveles de desempeño “N_i” y procesos “P_i” esperados por parte de los estudiantes, en el desarrollo de la ***Actividad 7***:

N_1: Los estudiantes identifican los valores numéricos de la función trigonométrica tangente para los ángulos solicitados, pero no establecen una relación entre la gráfica de la función tangente y la línea trigonométrica de la tangente en el círculo unitario.

N_2: Los estudiantes establecen una relación entre la gráfica de la función tangente y la línea trigonométrica de la tangente en el círculo unitario, pero no la comunican con claridad y precisión.

N_3: Los estudiantes comunican con un lenguaje claro y preciso la relación entre la gráfica de la función tangente y la línea trigonométrica de la tangente en el círculo unitario.

D_1: Los estudiantes identifican la propiedad de no continuidad en la curva de la función tangente.

D_2: Los estudiantes determinan el dominio de la función tangente.

D_3: Los estudiantes establecen la no existencia de valor máximo o mínimo de la función tangente.

D_4: Los estudiantes determinan el rango de la función tangente.

D_5: Los estudiantes establecen la propiedad de crecimiento fijo de la función tangente.

D_6: Los estudiantes establecen los cuadrantes en los que la función tangente toma valores positivos o negativos.

D_7: Los estudiantes determinan el periodo de la función tangente.

4.2.4. Detalles de la implementación

En cuanto a los recursos tecnológicos no se tuvo inconvenientes pues la institución educativa cuenta con salones dotados con los equipos del programa Tit@, por lo tanto, cada pareja de estudiantes tenía su propio portátil para trabajar las actividades planteadas y para grabar en video de frente a las parejas seleccionadas, se utilizaban las cámaras de los mismos portátiles. Pero, el hecho de grabar con este tipo de cámaras generó algunas dificultades en cuanto a la claridad del sonido de los videos, pues el ruido del ambiente no permitía escuchar muy bien en ciertas ocasiones lo que los estudiantes hablaban.

Por cuestiones de tiempo, las prácticas tuvieron que hacerse con una secuencialidad un poco accidentada, pues a veces pasaba mucho tiempo sin hacerse una actividad y se perdía la secuencialidad, y al final se tuvo que hacer de manera muy seguida las últimas tres actividades, antes que se terminara el año lectivo. La mayoría de las dificultades se presentaron por problemas ajenos al investigador, tales como jornadas de paro laboral, actividades extracurriculares que no permitían el desarrollo normal de las sesiones de clase, falta de asistencia de alguno de los estudiantes colaboradores, etc. Cuando se presentaba el caso de la falta de asistencia de uno de los estudiantes de las parejas participantes de la investigación, se tenía que reemplazar por otro que quisiera colaborar.

De acuerdo a la reflexión pedagógica y didáctica sobre la implementación de las actividades, se puede afirmar que una de las mayores dificultades para el desarrollo de las actividades fue la falta de comprensión conceptual y manejo del lenguaje matemático formal por parte de los estudiantes para expresar sus ideas y escribir sus respuestas. No obstante, se puede decir que finalmente la implementación de la secuencia didáctica fue un éxito porque se pudo llevar a cabo en un 100% como se tenía planeada.

Acerca de las actividades de la secuencia didáctica, cabe aclarar que si se hubiese tenido un poco más de tiempo para la implementación, en la sección III se podría haber trabajado además, las tres razones trigonométricas recíprocas (secante, cosecante y cotangente) con sus respectivas representaciones funcionales y análisis de las características de sus curvas. No obstante, se tenía planeado desde un principio solo trabajar las funciones trigonométricas básicas en esta investigación.

4.3. Evaluación de la secuencia didáctica

En este apartado se presenta el análisis de los resultados de las actividades implementadas como tal. Dicho análisis se plantea mediante la contrastación entre las respuestas de los estudiantes en la guía taller de cada actividad, lo visto en los videos (de la pantalla y de la interacción entre los dos estudiantes), con los niveles de desempeño y procesos desarrollados esperados.

Para cada actividad de la secuencia didáctica se plantearon los niveles de desempeño y los procesos esperados, que pudiesen ser desarrollados por las parejas de estudiantes al responder la guía taller de las mismas (apartados anteriores 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3). Con base a dichos niveles y procesos esperados se realizan las tablas que permiten sistematizar los resultados (como tabla 3 y tabla 4), y así analizar las respuestas de los estudiantes en búsqueda de las evidencias del desarrollo de la competencia de razonamiento, y en especial, del proceso de visualización.

4.3.1. Resultados de la Actividad 1

Después de analizar las respuestas dadas por los estudiantes en la guía taller de la Actividad 1 y verificar su proceso de solución en los videos, se precisa la siguiente sistematización de resultados en las tablas 6 y 7.

Tabla 6

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 1

Pareja	N_1	N_2	N_3	N_4
P1	✓			
P2	✓			
P3	✓			

Fuente: Elaboración propia.

Interpretando la tabla 6, se puede decir en primer lugar que la pareja de estudiantes (P1) evidencia en sus respuestas (ver páginas 1, 2 y 3 del Anexo E) alcanzar un nivel de desempeño

N_1, es decir, reconocen los elementos variantes e invariantes del triángulo rectángulo y de la información presentada. Esto se ve en sus respuestas de las preguntas planteadas en el punto 1 de la Segunda Parte de la Actividad 1, cuando usan el dispositivo de Geogebra llamado Actividad 1B (ver figura 12). En el minuto 12:30 del video, el estudiante E2P1 expresa mientras mueve el punto P que el lado CA se mantiene fijo y seguido la estudiante E1P1 afirma en el minuto 12:50 que los lados AB y BC cambian al mover el punto P, y en el minuto 13:50 realiza una afirmación con su respectiva justificación al decir: "Los valores de las razones cambian aunque CA esté quieto, obviamente, porque los otros dos lados si cambian". Luego en el minuto 14:20 el estudiante E2P1 expresa que el ángulo θ cambia, y reafirma que los ángulos en los vértices A y B cambian, pero no el ángulo del vértice C porque es igual a 90°. También, al mover el punto C, el estudiante E2P1 en el minuto 16:35 expresa que todos los lados del triángulo cambian y el ángulo θ queda fijo, y la estudiante E1P1 trata de justificar (equivocadamente) dicha afirmación diciendo que eso pasa porque están moviendo el lado CA. En el minuto 17:10 la estudiante E1P1 indica que los valores de las razones aunque sus resultados no, y aquí se evidencia un problema de conceptualización insuficiente respecto al concepto de razón geométrica y la terminología adecuada para hablar de sus partes (antecedente y consecuente). Sin embargo, al desarrollar la pregunta clave de la actividad, la número 5, donde se pide una conclusión sobre lo sucedido con las razones al mover los puntos P y C respectivamente, los estudiantes solo logran sintetizar lo sucedido respecto a los elementos que cambian y se quedan fijos (a partir del minuto 7:30 del segundo video), pero no establecen relaciones entre dichos elementos y lo sucedido con las razones trigonométricas.

En segundo lugar, la pareja de estudiantes (P2) en sus respuestas (ver páginas 4 y 5 del Anexo E) evidencian solo alcanzar el nivel esperado N_1, pues, fueron muy puntuales en identificar los elementos que cambiaban y los que se quedaban fijos, al manipular el dispositivo de Geogebra llamado Actividad 1B, observando muy bien lo que sucedía al mover los puntos P y C, respectivamente. En el minuto 8:26 el estudiante E2P2 afirma que el punto P cambia al ángulo θ, y ante el cuestionamiento de la estudiante E1P2: "¿Solo cambia eso?, el estudiante E2P2 complementa en el minuto 8:39 indicando que la hipotenusa y el cateto BC también cambian. Luego en el minuto 9:30 reafirma la idea, al decir que, al mover el punto P cambian la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo θ; y en el minuto 10:00 la estudiante expresa que el valor del cateto adyacente al ángulo θ se mantiene igual, mientras señala en pantalla al lado AC con el cursor del ratón. Al momento de analizar el cambio de las razones esta pareja tiene una observación interesante al plantear una hipótesis falsa que luego por el mismo proceso de observación logran descartar, esto sucede en el minuto 10:54 cuando la estudiante E1P2 dice: "O sea, cambian los valores de las razones pero ninguna pasa de cero" (para decir, que son un número entre cero y uno). Sin embargo, al mover de nuevo el punto P, se dan cuenta que en la tercera razón el valor si sobrepasa al 1 (razón tangente) y en el minuto 12:08 la misma estudiante expresa: "La razón en la que se hace la división entre los dos lados (catetos), es la única en la que los valores sobrepasan el cero coma algo". Ahora bien, al mover el punto C, la estudiante E1P2 afirma que "todo cambia" excepto el ángulo θ, seguido el estudiante E2P2 expresa que si es verdad, pero que las "proporciones" también se quedan igual (usando mal el término proporciones en lugar de "razones"). En el minuto 13:45 la estudiante E1P2 concluye que los valores de los lados cambian y el estudiante E2P2 dice que el valor del ángulo θ se mantiene igual. Y aunque en el minuto 14:30 el estudiante E2P2 afirma que los resultados de las razones se mantienen igual, al responder la pregunta 5 que es donde se debe expresar la conclusión de la actividad para relacionar la dependencia de las razones trigonométricas con el ángulo para el cual se definen, lo que responden es una repetición de lo que ya había contestado en las preguntas 1 y 2, pero no generalizan ni relacionan nada.

En tercer lugar, la pareja de estudiantes (P3) en sus respuestas (ver páginas 6 y 7 del Anexo E) evidencian alcanzar solamente el nivel de desempeño esperado N_1. Al igual que las otras dos parejas, fueron eficaces en identificar los elementos que cambiaban y los que se quedaban fijos, al manipular los puntos P y C en el dispositivo en pantalla. Al contestar la pregunta 1 de la segunda parte del taller, el estudiante E1P3 al minuto 18:45 dice que al mover el punto P, cambia el cateto opuesto (C.O) y la hipotenusa (H) con relación al ángulo θ. Luego al minuto 19:35 el estudiante E2P3 dice que cambia el ángulo (refiriéndose a θ) y se inicia un debate sobre qué término usar para decir qué es lo que cambia del ángulo, en el cual se menciona el término “apertura”; y en el minuto 20:25, el estudiante E2P3 precisa que es mejor escribir: “Cambia la medida del ángulo θ”. En el minuto 20:56 después de mover varias veces el punto P en pantalla el estudiante expresa que todas las razones cambian, y en el minuto 21:35 plantea una interesante proposición: “Cambia el ángulo (refiriéndose a θ), por lo tanto, cambia la forma (refiriéndose al triángulo rectángulo)”. Seguido el mismo E2P3 indica que el ángulo recto no cambia y el estudiante E1P3 al minuto 33:43 dice: “El cateto adyacente (es decir, su longitud), no cambia”. Después, al contestar la pregunta 2 de la segunda parte, identifican los elementos que sufren cambios y los invariantes. En el minuto 26:30 el estudiante E1P3 dice que cambia la longitud de todos los lados del triángulo, y asocia este cambio con las razones al expresar en el minuto 27:20: “Obvio, cambian también los antecedentes y los consecuentes de las razones”. En el minuto 28:00 el estudiante E2P3 afirma que todos los ángulos se mantienen iguales y un minuto después expresa que el cociente de las razones se mantiene igual. De nuevo, de igual manera que las otras dos parejas, la pareja de estudiantes P3 no son capaces de expresar una correcta conclusión que relacione lo visualizado en los elementos cambiantes e invariantes con lo sucedido en los resultados de las razones. Tienen la idea equivocada de creer que concluir o generalizar una idea es repetir en forma resumida lo que ya habían contestado antes en las preguntas 1 y 2. De hecho, el estudiante E1P3 en el minuto 51:25 explica mal lo que el comprende por el término “constante de proporcionalidad” (para la prueba de proporcionalidad entre los lados correspondientes entre dos triángulos semejantes), confundiéndolo con los valores de las razones trigonométricas.

Tabla 7

Sistematización de resultados “Procesos desarrollados” de la Actividad 1

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**
P1	✓	✓	✓	✓	✕	✓
P2	✓	✓	✓	✕	✕	✓
P3	✓	✓	✕	✕	✕	✓

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 7 se presenta en forma resumida los procesos desarrollados “Di” que se esperaban por parte de los estudiantes en la Actividad 1, señalando aquellos que fueron evidenciados y los que no. En primer lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_1, se puede decir que las tres parejas de estudiantes no tuvieron problemas para identificar elementos variantes e invariantes en el triángulo rectángulo obtenido y la información dada. Del mismo modo, en cuanto al proceso desarrollado esperado D_2, las tres parejas lograron determinan los valores del seno y coseno cuando el ángulo agudo se aproximaba ángulo nulo (0°) o recto (90°). En este caso se destacan las respuestas de la pareja P1, quienes explican por qué las razones de seno y tangente dan cero si el ángulo es 0°, afirmando que esto sucede porque el lado BC es cero (lado opuesto al ángulo θ), y explican por qué la razón coseno da uno, al afirmar que esto pasa porque el lado CA es igual al lado AB.

Ahora bien, respecto al proceso desarrollado esperado D_3, se observa que las parejas P1 y P2 logran establecer correctamente la relación de semejanza entre los distintos triángulos rectángulos que se obtienen al mover el punto C en el dispositivo de Geogebra. El estudiante E1P1 en el minuto19:29 afirma que los ángulos se mantienen y el tamaño varía; y del mismo modo, el estudiante E2P2 en el minuto 15:00 dice que la forma de los triángulos es la misma aunque el tamaño cambie según se mueva el punto C. No obstante, la pareja P3 no realiza la pregunta en el taller y al observar el video, se nota que pasaron a la siguiente pregunta, dejando sin contestar esta parte. En consecuencia, el proceso desarrollado esperado D_4 depende del anterior, y en este caso solo la pareja P1 logró dar una justificación a la relación de semejanza mediante un criterio de semejanza válido. El estudiante E1P1 en el minuto 18:50 realiza una interesante pregunta al respecto: “¿Básicamente, qué los hace semejantes?” Inicialmente, ellos justifican bien la semejanza de los triángulos mediante el criterio de ángulo-ángulo, pues se tiene el ángulo agudo θ y el ángulo recto en C, siempre congruentes.

En el caso del proceso desarrollado esperado D_5, el cual era el objetivo principal de esta actividad propuesta, genera una preocupación por parte del docente investigador, que primero piensa en una posible falla de planteamiento de las preguntas de la guía taller o del dispositivo en Geogebra. Luego, se puede concluir que la falla en realidad es la falta de unos preconceptos mal aprendidos en los estudiantes respecto a los conceptos de razón y de proporción. También se evidencia que los estudiantes no están acostumbrados a responder preguntas donde deben desarrollar precisamente la competencia de razonamiento matemático. Para las tres parejas, sucedió que al solicitarse entregar una conclusión que recoja lo que se ha visualizado en las preguntas anteriores respecto al comportamiento de las razones trigonométricas, estos vuelven a escribir lo mismo de antes en forma resumida, sin dar la conclusión esperada sobre la dependencia de los valores de las razones con respecto al ángulo agudo para el cual se han definido.

Para finalizar el análisis de los resultados de esta primera actividad, se puede decir que el proceso desarrollado esperado D_6 fue alcanzado en forma satisfactoria por parte de las tres parejas. Los estudiantes lograron definir y escribir adecuadamente las tres razones trigonométricas básicas mediante la notación de los segmentos correspondientes a los lados del triángulo rectángulo. Las parejas P1 y P3 responden con una escritura matemática correcta al escribir las abreviaturas de las razones (sen, cos y tan) seguidas del ángulo agudo θ; mientras la pareja P2, comete el típico error de escritura matemática de no especificar el ángulo par el cual se está planteando las razones trigonométricas.

4.3.2. Análisis de resultados de la Sección I

Después del análisis descriptivo realizado para las actividades de la sección I de la secuencia didáctica, se presentan las siguientes reflexiones para evaluar cómo el trabajo con estas, puede haber desarrollado la competencia de razonamiento geométrico en los estudiantes participantes. En primer lugar, es innegable el hecho que el uso de un triángulo rectángulo dinámico en el que se pueden modificar sus partes (longitudes de sus lados y/o amplitud de sus ángulos), permite desarrollar en los estudiantes los distintos niveles de razonamiento geométrico como lo propone el modelo de Van Hiele. Los estudiantes, además de observar los elementos que cambian y los que se mantienen estáticos, establecen relaciones entre la información numérica y gráfica presentada en la pantalla, lo cual les permite enunciar conjeturas para tratar de dar explicación a los sucesos observados.

Desafortunadamente, los estudiantes no han estado familiarizados con preguntas donde se les solicite realizar una conclusión a partir de lo que se ha observado en forma particular o general sobre las propiedades de las figuras geométricas. Por lo tanto, siempre responden este tipo de preguntas haciendo un recuento resumido de las observaciones ya contestadas previamente, pero no alcanzan el nivel de generalización esperado. Se puede decir que la dificultad que tienen los estudiantes para contestar este tipo de preguntas (como la número 5 de la segunda parte de esta actividad) no radica en problemas de visualización, ni mucho menos de establecer relaciones (conjeturas), sino más bien en el manejo inadecuado del lenguaje matemático formal, y la falta de claridad conceptual para expresar lo que están observando en las figuras dinámicas.

Por último, de acuerdo a los resultados obtenidos en las respuestas a las actividades de esta sección, se podría decir que hace falta realizar primero un trabajo (una posible Actividad 0 de la secuencia didáctica), para recordar los aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con los conocimientos previos necesarios para lograr el desarrollo correcto de la Actividad 1. Es decir, se requiere indagar sobre la comprensión conceptual que tienen los estudiantes sobre temas tales como: identificación de criterios de semejanza de triángulos (en especial de triángulos rectángulos), relación entre la amplitud y la longitud de los lados de un ángulo, y el planteamiento de proporcionalidad entre lados de dos triángulos semejantes. De esta manera, es posible que se alcance el objetivo esperado en el desarrollo de la Actividad 1, es decir, que los estudiantes puedan establecer que las razones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo rectángulo, sino de la amplitud del ángulo para el cual se están definiendo.

4.3.3. Resultados de la Actividad 2

Analizando las respuestas de los estudiantes para la Actividad 2 y contrastar sus procedimientos en los videos registrados, se presenta a continuación la sistematización de sus resultados en las tablas 8 y 9.

Tabla 8

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 2

Pareja	N_1	N_2	N_3	N_4
P1		✓		
P2				✓
P3		✓		

Fuente: Elaboración propia.

Al interpretar la tabla 8, en primer lugar, se puede mencionar que la pareja P1 en su hoja de respuestas evidencia haber alcanzado el nivel de desempeño esperado N_2 (ver primera página del Anexo G). Además de identificar en forma correcta los valores solicitados en la pregunta 2, visualizando en la gráfica dada por el dispositivo de Geogebra, también son capaces de establecer la relación de igualdad entre la coordenada "x" del punto P, la longitud del cateto adyacente al ángulo agudo θ, y el valor de la razón trigonométrica coseno (y del mismo modo la relación de igualdad entre la coordenada "y" del punto P, la longitud del cateto opuesto al ángulo agudo θ, y el valor de la razón trigonométrica seno). Sin embargo, no expresan una justificación para las afirmaciones realizadas en las respuestas de las preguntas 2.c. (minuto 7:52 del video) y 2.f. (minuto 9:44 del video).

En segundo lugar, la pareja P2 además de identificar la relación de igualdad entre las coordenadas del punto (x, y), las longitudes de los segmentos OQ y QP, y las razones razones coseno y seno para el ángulo θ, respectivamente; son capaces de justificar mediante un razonamiento adecuado, haciendo uso de la propiedad transitiva de la igualdad, cuando expresan (al minuto 20:46) que si la coordenada "x" es igual a la longitud del segmento OQ y a su vez es igual al valor de la razón coseno para θ, entonces la longitud del segmento OQ es igual al valor de la razón cosθ. De manera análoga, concluyen (al minuto 26:12) que si la coordenada "y" es igual a la longitud del segmento QP y a su vez es igual al valor de la razón seno para θ, entonces la longitud del segmento QP es igual al valor de la razón senθ. Así pues, por su forma correcta de relacionar la información, razonar una justificación para la relación de igualdad, expresarla oralmente y comunicarla con la escritura y simbología correcta (ver segunda página del Anexo G), la pareja de estudiantes P2 se clasifica en el nivel de desempeño esperado N_4.

En tercer lugar, se puede decir que la pareja P3 evidencian no haber entendido el sentido de las preguntas 2.c. y 2.f. para concluir la relación de igualdad entre las coordenadas del punto (x, y), las longitudes de los segmentos OQ y QP, y las razones razones coseno y seno para el ángulo θ, respectivamente; por lo tanto, su nivel de desempeño en esta actividad quedaría clasificado como el nivel N_1, es decir, solo pudieron identificar la información solicitada a partir de la figura en pantalla, pero no establecieron la relación solicitada entre dichos valores (ver tercera página del Anexo G). No obstante, al analizar el video en el minuto 36:40, se evidencia que los estudiantes si habían visualizado la igualdad que se les estaba pidiendo concluir, pero la equivocación estuvo en la forma de escribir sus respuestas. Por lo tanto, se podría decir que el desempeño estaría mejor clasificado en el nivel N_2.

Tabla 9

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 2

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**
P1	✓	✓	✓
P2	✓	✓	✓
P3	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 9 presenta en síntesis los tres procesos desarrollados "Di", que se esperaban fueran realizados por los estudiantes en la Actividad 2. Así pues, se puede afirmar que las tres parejas alcanzaron evidenciar el desarrollo de los tres procesos de manera correcta, a excepción de unas pequeñas fallas en la escritura formal de las expresiones algebraicas solicitadas. En primer lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_1, la pareja P1 identificó la igualdad entre el coseno y la coordenada "x" del punto P sobre el círculo unitario (minuto 6:53), la pareja P2 hizo lo mismo en el minuto 18:36 y la pareja P3 en el minuto 21:57. Del mismo modo, la pareja P1 identificó la igualdad entre el seno y la coordenada "y" del punto P al minuto 9:02, mientras la pareja P2 hizo lo mismo en el minuto 24:05 y la pareja P3 en el minuto 34:10.

En segundo lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_2, la pareja P1 identificó la igualdad entre el coseno y la longitud del segmento OQ (azul) en el minuto 7:52, la pareja P2 hizo lo mismo en el minuto 20:46 y la pareja P3 en el minuto 28:37. Del mismo modo, la pareja P1 identificó la igualdad entre el seno y la longitud del segmento QP (rojo) en el minuto 9:44, mientras la pareja P2 hizo lo mismo en el minuto 26:12 y la pareja P3 en el minuto 36:40.

En tercer lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_3, se puede decir que las tres parejas analizaron los triángulos rectángulos, aplicaron correctamente el teorema de Pitágoras y escribieron las expresiones solicitadas, para finalmente, concluir con la escritura de la identidad trigonométrica pitagórica principal. En el caso de las parejas P1 y P3, escriben mal la expresión final, pues al elevar al cuadrado las razones seno y coseno de un ángulo, el número dos (2) debe ponerse encima a la derecha de la expresión de la razón y no a la derecha del ángulo θ (ver primera y quinta página del Anexo G). Los estudiantes de la pareja P2 evitaron el error usando paréntesis para encerrar las razones con el ángulo respectivo y afuera escribieron el exponente 2 (ver tercera página del Anexo G).

4.3.4. Resultados de la Actividad 3

De nuevo se analizan las respuestas de los estudiantes para la Actividad 3 y se realiza un contraste con sus procedimientos en los videos, para así dar paso a la sistematización de los resultados de esta actividad en las tablas 10 y 11. Cabe aclarar que el análisis de esta actividad es muy parecido al realizado en la anterior actividad, pues los niveles esperados y los procesos a desarrollar son muy similares, solo cambian las líneas y las razones trigonométricas a analizar.

Tabla 10

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 3

Pareja	N_1	N_2	N_3	N_4
P1		✓		
P2			✓	
P3				✓

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a la tabla 10, se tiene en primer lugar, que la pareja P1 evidencia haber alcanzado el nivel de desempeño esperado N_2 (ver primera página del Anexo I). En el desarrollo de las preguntas 2.c. y 2.d. no tienen claridad para justificar, mediante un proceso formal de análisis de proporcionalidad, la igualdad entre los segmentos que representan a la tangente y la secante, respectivamente. Después de cometer varios errores en sus respuestas, expresan de manera correcta (al minuto 23:30) el proceso de proporcionalidad para probar que la tanθ es igual a la longitud del segmento AR, pero en el caso de la secθ no hacen bien el mismo proceso (al minuto 26:50) para probar la igualdad con la longitud del segmento OR.

En segundo lugar, la pareja P2 además de identificar la relación de igualdad entre las longitudes de los segmentos AR y OR con los valores de la razón tangente y la razón secante del ángulo θ, respectivamente, tienen la idea de una justificación por medio del análisis de la proporcionalidad de los lados de los triángulos semejantes para probar dicha igualdad. No obstante, requieren de la ayuda del docente (en el minuto 56:00) para comprender cómo se escribe sin necesidad de usar ejemplos numéricos particulares. Por eso se clasifica su nivel de desempeño como N_3, pues aún les hace falta utilizar el lenguaje matemático formal para expresar sus conclusiones y demostraciones.

En tercer lugar, se puede decir que los estudiantes de la pareja P3, evidencian un buen entendimiento de los procesos realizados en esta actividad, y avanzaron bastante con respecto a la problemática de no comprensión de las preguntas que presentaron en el desarrollo de la Actividad 2. En esta ocasión, alcanzaron el nivel de desempeño N_4, mostrando un adecuado razonamiento en cada una de las preguntas y una correcta escritura formal de las justificaciones solicitadas para probar las relaciones descubiertas por medio de la visualización de propiedades y elementos de las figuras (triángulos semejantes) presentadas en la pantalla. En el minuto 56:00 se tiene el instante en el que logran probar la igualdad entre el valor de la razón tangente del ángulo θ y la longitud del segmento AR, así como en el minuto 61:00 hacen lo mismo para probar la igualdad entre el valor de la razón secante de θ y la longitud del segmento OR.

Tabla 11

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 3

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
P1	✓	✕	✓	✓
P2	✓	✕	✓	✓
P3	✓	✕	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 11 presenta los cuatro procesos desarrollados "Di", que se esperaban fueran realizados por los estudiantes en el desarrollo de la Actividad 3. En primer lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_1, las parejas P1 y P2 identificaron la relación de semejanza entre los dos triángulos rectángulos en cuestión, justificando correctamente mediante la aplicación del criterio ángulo-ángulo (AA), como se evidencia en las respuestas de la pregunta 1 (primera y tercera página del Anexo I). En el caso de los estudiantes de la pareja P3, se les valora como proceso alcanzado, aunque lo hicieron aplicando un criterio de semejanza diferente, el de lado-ángulo-lado (LAL) justificado en forma correcta, (quinta página del Anexo I).

En segundo lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_2, las tres parejas reconocen que por ser ORA y OQP dos triángulos semejantes, entonces sus lados respectivos deben ser proporcionales. Sin embargo, como se evidencia en sus hojas de respuestas ninguno tuvo una adecuada verificación de dicha proporcionalidad. La pareja que más se acercó a una prueba correcta fue la P2, quiénes alcanzaron a plantear y comprobar la proporcionalidad entre dos de los lados (con un error de cálculo al final del proceso), pero les faltó verificar la proporcionalidad con el tercer lado. Los estudiantes de P1 entregaron una justificación no formal incorrecta y a los de la pareja P3 se les olvidó responder dicha pregunta.

En tercer lugar, respecto al proceso desarrollado esperado D_3, se puede decir que las tres parejas lograron establecer la igualdad entre las longitudes de los dos segmentos especiales en cuestión (AR y OR), con los valoras de las razones trigonométricas (tangente y secante) respectivamente. El establecimiento de la relación de igualdad entre el valor de la tangente del ángulo q y la longitud del segmento AR fue realizado por la pareja P1 en minuto 13:30, por la pareja P2 en el minuto 49:20 y por la pareja P3 en el minuto 41:30.

En cuarto lugar, con relación al proceso desarrollado esperado D_4, se tiene que los estudiantes, (gracias a la experiencia con la actividad anterior), logran establecer una correcta aplicación del teorema de Pitágoras para relacionar los lados del triángulo rectángulo, con una adecuada escritura formal de segmentos, y luego obtener la expresión de la identidad pitagórica que relaciona el cuadrado de la tangente y el cuadrado de la secante de un ángulo cualquiera θ. Cabe destacar que las parejas P1 y P2 escribieron la identidad en la forma esperada ($Sec^2\theta = 1 + Tan^2\theta$), aunque en la pareja P1 olvidan el orden del exponente; en cambio, los estudiantes de la pareja P3 presentaron la identidad en una forma diferente y por distracción la terminaron escribiendo al revés ($Tan^2\theta - Sec^2\theta = 1$), porque su planteamiento inicial era el correcto al escribir la respuesta 1 de la segunda parte, expresión pitagórica con los segmentos ($OR^2 - AR^2 = 1$).

4.3.5. Resultados de la Actividad 4

Debido a que esta es la tercera actividad de la sección II de la secuencia didáctica diseñada, entonces la presentación de las respuestas por parte de los estudiantes son muy parecidas a las de la anterior actividad. Se puede decir que los estudiantes reconfirman sus procedimientos de solución, teniendo en cuenta las pequeñas diferencias de la nueva actividad, la cual ya no trabaja con una línea tangente vertical por el punto (1,0) del círculo unitario, sino una tangente horizontal por el punto (0,1) del mismo círculo.

Tabla 12

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 4

Pareja	**N_1**	**N_2**	**N_3**	**N_4**
P1				✓
P2				✓
P3				✓

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 12 evidencia que las tres parejas al momento de realizar la tercera actividad de la sección II, ya han alcanzado a entender la idea principal de este tipo de actividades en cuanto a la identificación de un segmento especial cuya longitud es equivalente al valor de una de las seis razones trigonométricas. Por lo tanto, responden de manera más acertada y pronta el taller propuesto, así alcanzan a evidenciar un nivel de desempeño N_4, porque ya han aclarado sus procedimientos de razonamiento y comunicación, para escribir en forma más clara y precisa, las justificaciones y pruebas pedidas en las respectivas preguntas. El buen nivel de desempeño de las tres parejas en el desarrollo de esta actividad, se puede evidenciar claramente en las respuestas registradas en las cinco páginas del Anexo K.

Tabla 13

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 4

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
P1	✓	✓	✓	✓
P2	✓	✓	✓	✓
P3	✓	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

De igual modo, los cuatro procesos desarrollados "Di" registrados como logrados en la tabla 13, reconfirman que esta actividad sirvió para evidenciar el avance de aprendizaje de los estudiantes, en cuanto al proceso de visualización y razonamiento para solucionar las preguntas propuestas. Además, se evidencia a la vez un pequeño avance en cuanto a la comunicación escrita (aunque no es el objetivo de esta investigación) de los razonamientos realizados para justificar algunas preguntas clave.

En primer lugar, para el proceso desarrollado esperado D_1, se evidencia en las hojas de respuestas (primera, tercera y quinta página del Anexo K) que las tres parejas logran establecer y justificar correctamente una relación de semejanza entre los dos triángulos rectángulos presentados en el dispositivo de Geogebra. De nuevo, las parejas P1 y P2 hacen uso del criterio AA para justificar la semejanza de los dos triángulos, mientras los estudiantes de la pareja P3 lo hacen usando el criterio LAL.

En segundo lugar, en cuanto al proceso desarrollado esperado D_2, se puede decir que las tres parejas reconocen de nuevo que si los dos triángulos rectángulos son semejantes, entonces sus lados respectivos deben ser proporcionales. A diferencia de lo sucedido en la actividad anterior, en este caso las tres parejas si presentaron un proceso de razonamiento válido para justificar la proporcionalidad de los lados, siendo el más formal y cercano al esperado, el proceso realizado por la pareja P2, quienes si presentaron la proporción entre dos lados y confirmaron con cálculos numéricos adecuados su validez.

En tercer lugar, las tres parejas de estudiantes también alcanzaron a desarrollar en buen término el proceso esperado D_3. Los estudiantes lograron establecer la igualdad entre las longitudes de los dos segmentos en cuestión (BR y OR), con los valoras de las razones trigonométricas (cotangente y cosecante) respectivamente.

En cuarto lugar, sobre el proceso desarrollado esperado D_4, se evidencia que los estudiantes, (gracias a la experiencia con las dos actividades anteriores), de nuevo establecen una relación pitagórica entre los lados del triángulo rectángulo, con una adecuada escritura formal de segmentos, para así, expresar luego la identidad pitagórica que relaciona el cuadrado de la cotangente y el cuadrado de la cosecante de un ángulo cualquiera θ. Cabe destacar, de nuevo, que la pareja P1 presentó la identidad en la forma esperada ($Csc^2\theta = 1 + Cot^2\theta$); la pareja P2, por distracción al reemplazar la expresión que tiene correcta con segmentos ($OR^2 = OB^2 + AR^2$) escribieron la identidad al revés ($Cot^2\theta = 1 + Sec^2\theta$), pero en lo que expresaron verbalmente se evidencia que si lo tenían correcto. De igual manera, la pareja P3 presentó la identidad en una forma diferente, pero esta vez bien escrita, ($Cot^2\theta - Sec^2\theta = 1$).

4.3.6. Análisis de resultados de la Sección II

Finalizado el análisis descriptivo de las tres actividades de la sección II de la secuencia didáctica, se reflexiona de nuevo sobre cómo el trabajo con ellas, permitió desarrollar la competencia de razonamiento geométrico en los estudiantes. Primero que todo, se puede afirmar que la secuencialidad de estas tres actividades permitió evidenciar un avance en el nivel de desempeño de las parejas, en cuanto a la resolución más rápida y mejor elaborada, de las Actividades 3 y 4 con respecto a la resolución de la Actividad 2. Esto puede indicar que el trabajo secuencial, permite a los estudiantes establecer relaciones entre las estrategias de resolución utilizadas en una actividad anterior, para aplicar sus conocimientos previos en el desarrollo de una nueva tarea.

Ahora bien, respecto al alcance del objetivo esperado con el desarrollo de estas tres actividades, se puede afirmar que los estudiantes pudieron establecer la relación que existe entre las longitudes de las líneas trigonométricas en el círculo unitario con los valores de las razones trigonométricas referidas al ángulo para el cual se están definiendo. El hecho de establecer dicha relación y tratar de explicar su justificación, facilita el desarrollo de la competencia de razonamiento geométrico, específicamente desde los procesos de la visualización y la conjeturación. Además, otra evidencia de que el conjunto de actividades de esta sección II permite el desarrollo del razonamiento geométrico, está en el desempeño correcto que mostraron los estudiantes al establecer la relación pitagórica entre los lados del triángulo rectángulo que se formaba con el radio unitario y las líneas trigonométricas respectivas a las razones trigonométricas que representan. Este trabajo desde un punto de vista geométrico, ayuda a comprender las identidades trigonométricas pitagóricas y a interiorizar su validez de una manera mucho más elaborada, que simplemente aprender una fórmula de memoria, como se trabaja en la forma de enseñanza tradicional.

Así pues, se puede decir que la decisión tomada en el apartado 4.2 siguiendo la sugerencia de Cos D. Fi (2003) de trabajar las razones trigonométricas desde el enfoque del círculo unitario, además del enfoque del triángulo rectángulo, fue acertada. Esto permite ampliar un campo de relaciones conceptuales entre los distintos objetos matemáticos que conciernen a las seis razones trigonométricas.

Por último, quedaría como una propuesta de mejora de estas actividades realizar preguntas que permitan evidenciar que las cofunciones coseno, cotangente y cosecante, están representadas en un sentido gráfico horizontal, y que se relacionan con las funciones seno, tangente y secante (representadas en forma vertical) precisamente por el desfase de 90°.

4.3.7. Resultados de la Actividad 5

Esta es la primera actividad de la sección III de la secuencia didáctica diseñada, que como ya se mencionó en el apartado 4.2.3 tienen un mismo objetivo principal para el análisis gráfico de las propiedades de cada una de las tres funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente). Por lo tanto, para no parecer repetitiva la presentación del análisis de resultados, se hará de una manera muy detallada para la Actividad 4, y en el caso de los análisis de las otras dos actividades solo se destacará si hay procedimientos que se salgan de lo esperado o del ya realizado antes.

Tabla 14

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 5

Pareja	**N_1**	**N_2**	**N_3**
P1		✓	
P2		✓	
P3			✓

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 14 se puede observar que las parejas P1 y P2, alcanzaron un nivel de desempeño esperado N_2, es decir que, establecen una relación entre la gráfica de la función seno y la línea trigonométrica del seno en el círculo unitario. Lo anterior fue posible, gracias a que los estudiantes ya habían trabajado la relación de dicha línea con la razón trigonométrica seno al realizar la Actividad 2. Sin embargo, en las apreciaciones que realizan en sus hojas de respuestas, para contestar la pregunta 7 de la primera parte (primera y segunda página del Anexo M), se evidencia la falta de comunicación de una explicación para dicha relación, con suficiente claridad y precisión. En primer lugar, al analizar el desempeño de la pareja P1, se puede ver que en el minuto 1:26, después de leer la instrucción de la primera pregunta y mover el punto P sobre el círculo unitario, de inmediato el estudiante E2P1 identifica lo que se está trazando en pantalla como la función seno y la estudiante E1P1 expresa al minuto 1:30: "Uy que chévere”, al visualizar cómo se va generando la gráfica con el trazo del segmento rojo, a medida que se mueve el punto P sobre el círculo unitario. La pareja P1 escribe una buena justificación, para decir que la longitud máxima que se puede registrar es de valor uno (1 unidad), debido a que es lo que el radio del círculo permite a lo máximo; sin embargo, no dan una mejor explicación respecto a la relación de la gráfica del seno con el segmento asociado a la razón seno (al minuto 3:40).

En segundo lugar, se analiza el desempeño de los estudiantes de la pareja P2, quienes en el minuto 7:38 identifican que la longitud del segmento rojo corresponde al valor de la función seno. Del mismo modo, en el minuto 20:00 describen lo que observan en el plano cartesiano de la derecha a medida que se mueve el punto P sobre el círculo unitario, pero no se presentan expresiones que evidencien relación de una gráfica de un plano con lo que pasa en el otro. Solo se dan descripciones obvias de las características que luego se preguntarán en la parte 2 de la actividad. La única frase que puede aludir al descubrimiento de la dependencia de la variable “y” de la función con respecto al ángulo de giro registrado en el eje “x” es la dada en la respuesta a la pregunta 7 de la primera parte: “Se va trazando una recta con respecto a los ángulos, …” (Segunda página del Anexo M).

En tercer lugar, de acuerdo lo presentado en sus hojas de respuestas, se podría decir que el nivel de desempeño de los estudiantes de la pareja P3 alcanza a ser el N_3. Esta afirmación se basa en que lo escrito por los estudiantes al responder las preguntas 1 y 7 de la primera parte de la actividad, indicarían una buena comprensión de la relación entre las dos representaciones para la función seno (la línea trigonométrica de la razón seno en el círculo unitario y la curva de la función seno en el plano cartesiano). Sin embargo, al ver y escuchar el video, se pudo verificar que los estudiantes planteaban diferentes hipótesis para contestar estas preguntas (por ejemplo, el estudiante E1P3 menciona al minuto 14:30 el concepto físico de onda para nombrar a la gráfica del seno), y las contestaron por escrito después de haberse adelantado y leído las preguntas de la segunda parte, donde se daba la descripción esperada en la pregunta 7. Este detalle se debe tener en cuenta para posteriores correcciones del diseño de la actividad, o para dar una instrucción específica de entregar las respuestas de la primera parte antes de ser entregada la segunda parte del cuestionario. De todos modos, se ratifica la clasificación de nivel de desempeño N_3, porque el estudiante E2P3 expresó al minuto 1:05 de manera inmediata que la longitud del segmento rojo correspondía al valor del seno. Además, la síntesis que escribieron con ayuda de la segunda parte del taller, fue bien redactada y presentaba lo más importante que se esperaba se identificara: "se va generando una función…, en donde el eje x son los ángulos que se generan del (movimiento) del punto P sobre el círculo unitario y el eje "y" (son) los valores del segmento rojo"

Tabla 15

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 5

Pareja	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P1	✕	✓	✓	✓	✓	✓	✓
P2	✓	✕	✓	✓	✓	✓	✓
P3	✓	✕	✓	✓	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, respecto al proceso desarrollado que se esperaba con relación a identificación de la propiedad de continuidad en la curva de la función seno, etiquetado como D_1, se puede afirmar que los estudiantes de las tres parejas tenían la idea aproximada del concepto, pero no lo pudieron expresar de manera formal correcta. Por ejemplo, el estudiante E2P3 en el minuto 26:10 expresaba que la función seno era continua porque "la gráfica no estaba separada", pero el compañero E1P3 (minuto 27:40) se impuso con su idea equivocada al afirmar que era continua "porque esta se repite constantemente cada vez que se leda una vuelta al círculo unitario". Es claro que en este caso, el estudiante E1P3 confunde el concepto de continuidad con el de periodicidad. La misma confusión conceptual sucedió en los estudiantes de la pareja P1, quienes expresaban al minuto 10:05 que: "la curva es continua porque cada 180° hay una curva que continúa con igual medida de la que le precede" (ver segunda página del Anexo M). De igual manera, los estudiantes de la pareja P2 tenían una idea inicial según el estudiante E2P2 de que la función era continua "porque no se corta" (minuto 26:30), sin embargo, escriben de nuevo que es continua porque se repite constantemente, pasando de nuevo a la confusión con la propiedad de periodicidad.

En cuanto al proceso esperado D_2 relacionado con la determinación del dominio de la función seno, también hay varios detalles interesantes para analizar en las respuestas de los estudiantes. En primer lugar, los estudiantes de la pareja P1 primero no plantean bien el concepto de dominio, hecho que se evidencia en el video al minuto 11:20 cuando el estudiante E2P2 hace la afirmación incorrecta de que: "según la definición de dominio dada en la pregunta solo se tomaría como dominio los valores donde la función corta el eje x, porque son los únicos valores de x donde existe la función". Sin embargo, al final escriben bien en la hoja de respuestas (ver primera página de Anexo M), que el dominio de la función seno son todos los números reales, con un error de escritura formal al decir que "x = R". En segundo lugar, se tiene que la pareja P2 no logra identificar bien el dominio, pues lo limitan solo al intervalo mostrado en la gráfica de 0° a 360° (expresado en el minuto 27:20). Y, en tercer lugar, el estudiante E1P3 expresa al minuto 27:40 lo que sería el dominio: "son todos los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el círculo unitario", lo cual sería correcto, sino se esperara una respuesta concreta, haciendo uso del lenguaje matemático formal.

Siguiendo con el proceso esperado D3, relacionado con la identificación del valor máximo y mínimo, se puede afirmar que las tres parejas identificaron que el valor máximo de la función seno es 1 y el mínimo es –1, sin embargo, las parejas P1 y P2 no tienen una buena notación en sus respuestas, porque se solicitaban las coordenadas de los puntos (máximo y mínimo) y solo escriben el valor de la ordenada, faltando la abscisa y la correcta notación de punto (x,y). En cambio, los estudiantes de la pareja P3, si expresaron los puntos solicitados correctamente con las coordenadas del eje x, tanto en grados como en radianes (ver tercera página del Anexo M).

Por otra parte, con relación al proceso esperado D_4, referente a la determinación del rango de la función seno, se puede afirmar que sucede algo similar con la pregunta anterior. Es decir, las tres parejas identifican que los valores del seno van desde el valor mínimo (-1) hasta el máximo (1), pero no saben cómo escribir con un lenguaje matemático formal esta característica de las funciones. Y de nuevo, el estudiante E1P3 se destaca por hacer una afirmación distinta a la esperada (minuto 35:15), que en gran parte se puede considerar correcta: “rango = valores del segmento rojo” (refiriéndose a la línea trigonométrica que representa el seno, segmento sobre el “eje y” en el plano cartesiano con el círculo unitario).

En lo que al proceso esperado D5 se refiere, de nuevo se puede afirmar que los estudiantes de las tres parejas identifican correctamente en dónde la función seno es creciente y en donde es decreciente, gracias al proceso de visualización realizado con ayuda de la figura dinámica en pantalla. Sin embargo, siguen evidenciando la carencia de una comunicación escrita formal correcta.

En primer lugar, las parejas P1 y P2 contestan en formas muy similares, expresando en lenguaje no formal de intervalos los valores entre los cuales la función seno es creciente o decreciente (ver respuesta 5, en primera y segunda página del Anexo M). En cambio, el estudiante E2P3 no expresa los valores de los ángulos, ni los intervalos, sino que emplea la definición de cuadrantes dada en la siguiente pregunta para contestar en qué cuadrantes la función seno es creciente y en cuáles es decreciente (ver respuesta 5, en tercera página del Anexo M).

Para el sexto proceso esperado D_6, se puede evidenciar la facilidad con que los estudiantes de las tres parejas logran establecer, con la ayuda de la figura dinámica en pantalla, los cuadrantes en los que la función seno toma valores positivos y en cuáles toma valores negativos. Hecho que es muy importante cuando el estudiante pasa a trabajar de manera algebraica con los valores de la función seno. En este caso que no exige una formalidad en la escritura las tres parejas escriben una respuesta correcta, (aunque solo los estudiantes de la pareja P3, si usaron números romanos para etiquetar los cuadrantes), como lo muestra las respuestas a la pregunta 6 de la segunda parte, en las tres páginas del Anexo M.

Por último, en lo que al desempeño esperado D7 se refiere, se expone que los estudiantes de las tres parejas entendieron el significado del concepto periodo, como el valor del eje X en el cual la gráfica de la función se vuelve a repetir, y lo lograron determinar en forma correcta para la función seno. En este caso, la pareja P1 expresó su respuesta queriendo hacer énfasis en que las medidas de los ángulos debe ser expresada en términos de radianes: "Periodo = 2 π = 2 π rad"; mientras que las otras dos parejas P2 y P3, cumpliendo la petición del profesor, expresaron el periodo tanto en grados como en radianes de la siguiente manera: "Periodo = 360° = 2π rad" (ver respuestas de la pregunta 7 de segunda parte, en las tres páginas del Anexo M).

4.3.8. Resultados de la Actividad 6

Siendo la segunda actividad de la sección III de la secuencia didáctica diseñada, y dado que las preguntas del taller son las mismas que las formuladas para la función seno, pero en este caso para analizar la función coseno. El análisis se hará en forma resumida, destacando solo variables interesantes que se presenten con respecto al análisis realizado en la actividad anterior.

Antes de realizar el análisis, cabe mencionar que el día que se implementó esta actividad, los estudiantes de la pareja P2 no asistieron a clases, por lo tanto, fueron reemplazados con otra pareja de estudiantes que ofrecieron su colaboración para realizar el registro de sus desempeños. Dicha pareja suplente se encuentra registrada en la tabla 16 como P2*.

Tabla 16

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 6

Pareja	**N_1**	**N_2**	**N_3**
P1		✓	
P2*			✓
P3			✓

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 16 presenta los resultados evidenciados de acuerdo a los niveles de desempeño "Ni", por las tres parejas de estudiantes que realizaron la Actividad 6. En el caso de la pareja P1 se tiene que al igual que en la actividad anterior, lograron visualizar la relación que existe entre la línea trigonométrica, que representa la razón coseno de un ángulo en posición normal en el círculo unitario, con la gráfica de la función coseno del mismo ángulo. Sin embargo, en sus respuestas a las preguntas 1 y 7 de la primera parte de la actividad, solo expresan las características observables de la gráfica y no justifican con un lenguaje adecuado dicha relación (ver primera página del Anexo O). Por el contrario, los estudiantes de la pareja nueva P2* presentaron una interesante respuesta de la pregunta 1, en la cual demuestran un buen razonamiento para justificar la relación de la línea trigonométrica del coseno con su respectiva gráfica en el plano cartesiano. En el minuto 1:08 el estudiante E2P2* expresa: “Sabemos que es coseno (refiriéndose al segmento azul en el plano del círculo unitario) porque el cateto que hace varíe los valores en el plano es el adyacente al ángulo θ”; esto lo dicen al recordar lo trabajado en la Actividad 3 y pasan a dar la definición correcta de la razón coseno (cateto adyacente sobre hipotenusa). Además, en el minuto 5:10 la estudiante E1P2* dice: “Dependiendo del valor que tome el ángulo, así mismo va a aumentar o disminuir el cateto adyacente”; frase muy interesante ya que es la primera vez que un estudiante en el desarrollo de las actividades expresa de manera directa la dependencia que tienen los valores de las razones trigonométricas (por tanto, de las funciones trigonométricas) respecto al ángulo θ (lo cual era el objetivo principal de la primera actividad de la secuencia didáctica). Por otro lado, la pareja P3 vuelve a evidenciar como en la actividad anterior que reconocen la relación entre lo sucedido en el plano a medida que se mueve el punto P sobre el círculo unitario con lo que sucede en el plano cartesiano que traza la gráfica de la función coseno. En el minuto 5:25 el estudiante E1P3 empieza a dar la respuesta de la pregunta 7: “A medida que el punto P es movido en el círculo unitario va generando unos valores del segmento azul que…” en ese momento el estudiante E2P3 puntualiza algo que no registra bien en su respuesta escrita para completar la expresión de su compañero: “…en el plano cartesiano, se ve reflejado como la función coseno, y ya”; luego el estudiante E1P3 registra la respuesta escrita, mencionando las características de las gráficas, pero olvida la precisión realizada por su compañero E2P2*. Por lo anterior, se puede considerar de todos modos, que el nivel de desempeño para esta pareja es el de N_3 (segunda página del Anexo O).

Por otra parte, con base en la tabla 17 se presenta el análisis de los desempeños desarrollados esperados “Di” en la Actividad 6.

Tabla 17

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 6

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	**D_7**
P1	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
P2*	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
P3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se tiene que los estudiantes de la pareja P1 de nuevo exhiben no comprender bien el significado del concepto de continuidad (minuto 7:25) y responden que si es continua dando una justificación incorrecta, pues confunden esta característica con la periodicidad de la gráfica del coseno. De igual manera, la pareja P2* responden algo similar confundiendo el concepto de continuidad con el de periodicidad; esto se evidencia en el minuto 14:04 cuando el estudiante E2P2* dice: "Obvio es continua, pero hay que explicar por qué siempre es continua", y ante esta cuestión la estudiante E2P2* responde: "pues porque se repite cada dos pi". Por el contrario, los estudiantes de la pareja P3 logran dar una justificación más acertada para explicar la propiedad de continuidad de la gráfica de la función coseno; como se puede ver en su respuesta escrita, inicialmente parece confundir la continuidad con la periodicidad, pero al final expresa una razón correcta: "Es continua porque se prolonga periódicamente en la recta del eje x, *sin ser cortada en ninguna parte*".

En segundo lugar, respecto al proceso D_2 correspondiente a la determinación del dominio, se puede afirmar que las tres parejas logran identificar correctamente esta propiedad de la función coseno, expresando que el dominio son todos los números reales. Las parejas P1 y P3 lo escriben con el lenguaje matemático correcto, en cambio, la pareja P2* lo escriben con una equivocada notación de conjuntos (ver Anexo O).

En tercer lugar, respecto al proceso esperado D_3 se puede decir que las tres parejas identifican correctamente los puntos máximo y mínimo de la curva de la función coseno. Sin embargo, solo la pareja P3 logra escribir la notación de punto con coordenadas (x, y) en forma correcta. En cambio las otras dos parejas (P1 y P2*) escriben solamente el valor de la coordenada "y" de dichos puntos, usando una notación no formal (inventada por ellos) como P_m= -1 o P_M =1 para la pareja P1; y $P_{mín}$ = -1 o $P_{máx}$= 1, en el caso de la pareja P2*, para expresar el punto mínimo o máximo, respectivamente.

En cuarto lugar, acerca del proceso esperado D_4 relacionado con la determinación del rango de la función coseno, al igual que en la Actividad 5 para el caso de la función seno, los estudiantes de las tres parejas identifican correctamente el intervalo del eje "y" en el que la función tiene imagen, es decir, entre -1 y 1 (incluyéndolos). Observando sus respuestas en el Anexo O, se puede destacar que las parejas P2* y P3 escriben con un lenguaje simbólico formal correcto la notación de intervalo para expresar el rango del coseno. La pareja P1 utiliza una notación incorrecta, pues utiliza llaves para expresar un intervalo y los valores están en desorden: Rango {1, -1}.

En quinto lugar, se tiene el análisis para el desarrollo del proceso esperado D5, relacionado con la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coseno. Al respecto, se observa en las respuestas que las tres parejas establecen correctamente los intervalos del dominio (entre 0° y 360°) en los que la función coseno es creciente y decreciente, pero solo la pareja P2* lo escribe con la notación correcta de intervalos (ver segunda página del Anexo O).

En sexto lugar, se puede decir que para el proceso de determinación de los cuadrantes en los que el coseno toma valores positivos o negativos, etiquetado como D_6, fue evidenciado su logro por parte de las tres parejas de estudiantes, y sus respuestas están correctamente escritas aunque unas usen una simbología más formal, como el caso de la pareja P2* que usaron notación de intervalos para expresar los cuadrantes.

En séptimo y último lugar, respecto al análisis de los procesos esperados se desarrollaran en esta actividad, se tiene que el proceso D_7, relacionado con la determinación del periodo de la función coseno, fue identificado y expresado correctamente por escrito por las tres parejas.

4.3.9. Resultados de la Actividad 7

En el caso de esta tercera actividad de la sección III y última de toda la secuencia didáctica diseñada, se hará un análisis detallado destacando las dificultades que evidenciaron los estudiantes para analizar las mismas características que ya reconocían bien en las funciones seno y coseno, pero que en el caso de la tangente ya no eran las mismas. De igual manera que en la actividad anterior, el análisis se hará en forma resumida, destacando solo variables interesantes en los procesos de solución mostrados por los estudiantes, tanto en sus respuestas del taller, como en el video.

Tabla 18

Sistematización de resultados "Niveles de desempeño" de la Actividad 7

Pareja	**N_1**	**N_2**	**N_3**
P1		✓	
P2		✓	
P3		✓	

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de la función tangente se afirma que las tres parejas de estudiante logran identificar la relación que existe entre la línea asociada a la razón tangente en el círculo unitario y la gráfica generada para la función tangente. Sin embargo, ninguna de las parejas expresaron en sus respuestas (orales ni escritas) una justificación adecuada para explicar dicha relación. Por lo tanto, según el desarrollo de esta actividad, se les da a las tres parejas una clasificación de nivel de desempeño N_2.

Para finalizar el análisis de resultados de toda la secuencia didáctica, se presenta la tabla 19 con la sistematización de los procesos desarrollados en la Actividad 7.

Tabla 19

Sistematización de resultados "Procesos desarrollados" de la Actividad 7

Pareja	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	**D_7**
P1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✕
P2	✓	✕	✕	✓	✓	✓	✓
P3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Fuente: Elaboración propia.

En el caso del proceso desarrollado esperado D_1, relacionado con la propiedad de discontinuidad de la función tangente, se puede afirmar que fue mucho más fácil para los estudiantes de las tres parejas, dar un justificación correcta para explicarla, que lo sucedido en el caso de la explicación de la continuidad para el seno y coseno en las dos actividades anteriores. En el caso de la función tangente, es más sencillo explicar su propiedad de discontinua por el proceso de visualización, como lo expresa la pareja P1 en su respuesta escrita: "La curva no es continua porque cada 90° la función se *sale de su dominio y da la impresión de que se corta las curvas*" (lo que querían decir es que, en la gráfica se observa que en 90° y 270° la curva se va al infinito y viene de menos infinito dando un corte de la misma). Al respecto la pareja P2 fue más concreta para contestar: "la curva es discontinúa ya que se corta". Del mismo modo, la pareja P3 expresa a su manera la justificación de la discontinuidad escribiendo: "Es discontinua, pues esta es hecha de ∞ trozos" (de acuerdo a lo escuchado en el video lo que querían expresar era que la gráfica se cortaba en trozos de tamaño infinito).

En cuanto al proceso de la determinación del dominio de la función tangente, etiquetado como D_2, se presentó dificultad para la pareja P2 en su identificación pues respondieron del mismo modo que en el caso de la función seno y coseno, es decir, todos los reales desde menos infinito hasta infinito. No obstante, las parejas P1 y P3 si tuvieron una acertada observación y determinación al establecer, a su manera, la exclusión de los valores que no pertenecen al dominio porque en donde la gráfica se va al infinito es porque la función no existe. En el caso de la pareja P1, al minuto 8:30 empiezan a resolver la pregunta 2 de la segunda parte cuando el estudiante E2P1 dice que toca contestar con palabras porque no sabe cómo expresarlo en lenguaje simbólico. Por esta razón, deciden explicar por partes los intervalos (entre 0° y 360°) en los cuales la función existe, excluyendo los valores de 90° y 270° (ver primera página del Anexo Q). En cambio, los estudiantes de la pareja P3 si intentaron escribir en símbolos lo que ya habían escrito en palabras al responder la pregunta 7 de la primera parte, es decir, el estudiante E2P1 expresa que la curva tiene una asíntota (vertical) en los múltiplos impares de pi medios, pero al querer escribir en símbolos lo mismo en la respuesta 2 de la segunda parte, lo hace en forma incorrecta como se puede observar en la cuarta página del Anexo Q.

Ahora bien, para no extender más este análisis de la Actividad 7, se puede afirmar que para los procesos esperados restantes, se obtuvieron los siguientes resultados:

Para D_3, las parejas P1 y P3 explican correctamente que para la función tangente no es posible determinar puntos máximos o mínimos, debido a que en los valores múltiplos impares de pi medios la función se va a más infinito y luego viene de menos infinito. Por otro lado, la pareja P2 expresa en forma incorrecta que el valor máximo es infinito positivo y el mínimo es infinito negativo.

Para D_4, las tres parejas identifican en forma acertada que el rango de la función tangente es todo el eje y, es decir todos los números reales. Sin embargo, al intentar expresar en forma simbólica solo la pareja P3 escribe la notación de intervalos correcta: $Ran(Tan) = (-\infty, \infty)$, mientras que la pareja P1 lo escribe mal con llaves: $Rango = \{-\infty, \infty\}$ y la pareja P2 también se equivoca al escribir con corchetes: $Ran(Tan) = y \in [-\infty, \infty]$, pues el infinito no puede ser cerrado.

Para D_5, en general se puede afirmar que las tres parejas identificaron y expresaron en forma correcta que la función tangente es creciente en todo su dominio.

Para D_6, del mismo modo se puede decir que las tres parejas establecieron en forma acertada y fácilmente, en qué cuadrantes la función tangente toma valores positivos y en cuáles toma valores negativos.

Por último, para D7 se tiene que las parejas P2 y P3 lograron identificar la propiedad del periodo de la función tangente, expresando correctamente que la gráfica se vuelve a repetir cada pi radianes como se puede ver en la tercera y cuarta página del Anexo Q. Por el contrario, la pareja P1 tuvo dificultad para visualizar bien el periodo de la función tangente y se confundieron con los valores de discontinuidad que se relacionan con los múltiplos impares de pi medios, por esta razón, contestaron en forma equivocada que el periodo de la tangente es: "P = 90° = π/2 rad" (ver segunda página del Anexo Q).

4.3.10. Análisis de resultados de la Sección III

Teniendo realizado el análisis descriptivo de las tres actividades de la sección III de la secuencia didáctica, se presentan las reflexiones acerca de cómo el trabajo con dichas actividades, influyó en el desarrollo de la competencia de razonamiento geométrico. Primero, se precisa de nuevo la correcta decisión que se tomó en el diseño de las actividades de esta sección (con base en la sugerencia dada por el trabajo del doctor Cos D. Fi), para trabajar las propiedades de las gráficas de las funciones trigonométricas, relacionando su dependencia con los valores de las longitudes de las líneas trigonométricas respectivas en el círculo unitario.

El dinamismo de las figuras en estas tres actividades permitieron que los estudiantes desarrollaran sus procesos de visualización y conjeturación para descubrir y establecer las propiedades de las tres funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), a partir de la relación entre las representaciones en el círculo unitario de las razones trigonométricas y su respectiva imagen en el plano cartesiano de las gráficas de dichas funciones. En estas actividades se pudo establecer de una mejor manera la dependencia que tienen los valores de las funciones trigonométricas con respecto al ángulo para el cual se están calculando.

Algo interesante que se desprende del análisis de las respuestas de los estudiantes en las actividades de esta sección III, es la necesidad de continuar un trabajo de investigación específico sobre conceptos tales como el dominio de una función y el infinito.

Por otro lado, como ya se mencionó antes, por cuestiones de tiempo no se alcanzó a diseñar y proponer las actividades para analizar las propiedades de las curvas de las otras tres funciones trigonométricas (secante, cosecante y cotangente). Además, tomando en cuenta lo expresado por Fi (2003, p.203) con relación al trabajo de la funciones trigonométricas y sus gráficas, se debe proponer como oportunidad de mejora para esta secuencia didáctica el diseño de actividades extras para tratar las tan olvidadas funciones trigonométricas inversas.

Al respecto, el doctor Fi indica que es importante trabajar la comprensión gráfica de las funciones inversas como reflejos de las funciones originales sobre la recta $y = x$; y defiende la relevancia del conocimiento de las funciones inversas, al afirmar que estas permiten a los estudiantes ser versátiles y adaptativos en situaciones de resolución de problemas. De hecho, las funciones inversas permiten desarrollar una acción importante de las matemáticas, que es la capacidad de deshacer o revertir acciones para reclamar el comienzo.

De este modo, se da por finalizado el detallado análisis cualitativo de los resultados de las actividades de la secuencia didáctica diseñada e implementada, y las respectivas reflexiones sobre el cumplimiento del objetivo general en cada una de las secciones de la misma. Con esto, se tiene una base para sustentar buena parte de las conclusiones de este trabajo de investigación, encaminadas hacia la verificación de la hipótesis planteada y a la comprobación del alcance de los objetivos general y específicos.

5. Conclusiones

Para empezar, es importante destacar que la experiencia de la implementación de la secuencia didáctica, bajo una mirada investigativa, y a la vez con una intencionalidad pedagógica formativa, permitió realizar varias observaciones interesantes sobre el proceso de resolución de los estudiantes de este tipo de actividades mediadas con un recurso tecnológico, como el SGD Geogebra. Dichas observaciones, conllevan al investigador a realizar reflexiones, como docente del área de matemáticas, sobre los distintos problemas que tienen los estudiantes, en cuanto al aprendizaje de las diferentes competencias matemáticas.

Ahora bien, en cuanto a los resultados obtenidos en el análisis realizado, con base en la sistematización de la implementación de la secuencia didáctica, se puede decir que es posible verificar el cumplimiento de la hipótesis planteada al inicio de esta investigación. En efecto, las distintas actividades diseñadas para la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas, mediadas por el ambiente de geometría dinámica Geogebra, facilitó la manipulación de los objetos geométricos en pantalla (como los puntos móviles que originaban los ángulos y/o modificaban el tamaño de los lados del triángulo rectángulo, los segmentos asociados a las razones trigonométricas llamados “líneas trigonométricas” y los trazos de las curvas de las funciones trigonométricas). Dichas figuras dinámicas permitieron a los estudiantes realizar procesos de exploración, visualización y conjeturación sobre las distintas relaciones entre los elementos (por ejemplo, segmentos y razones) presentados en las figuras;

así como, sobre las propiedades de las gráficas de las funciones trigonométricas. Así pues, al analizar los procesos desarrollados por los estudiantes, fue posible determinar el nivel de desempeño que estos alcanzaron en cuanto al desarrollo de la competencia matemática de razonamiento, y en especial del proceso de visualización.

No obstante, se deja por sentado que el desarrollo del proceso de visualización, y de la competencia matemática de razonamiento, se vio afectado porque los estudiantes en varias ocasiones no lograban asociar los conceptos previos que deberían tener, con las propiedades y las relaciones geométricas sobre las cuales se les cuestionaba en las actividades, para finalmente, poder expresar respuestas adecuadas a las preguntas planteadas.

De lo anterior, se puede establecer como una de las principales conclusiones de esta investigación, que los estudiantes en realidad no presentan tantas dificultades en el desarrollo de la competencia de razonamiento matemático, y mucho menos, en lo que al proceso de visualización respecta, sino que en su lugar, las dificultades que más se evidenciaron tanto en los videos como en sus respuestas escritas, eran las relacionadas con el desarrollo de la competencia de *comunicación matemática*. De hecho, en la mayoría de las actividades, cuando las parejas no alcanzaban el máximo nivel de desempeño esperado para la competencia de razonamiento, siempre la dificultad principal era el no tener un lenguaje adecuado, tanto en forma discursiva como en forma simbólica, para expresar sus respuestas.

Al desarrollar las actividades con las razones trigonométricas con ayuda del dispositivo tecnológico, los estudiantes evidenciaban con sus expresiones sobre lo observado en pantalla, que si estaban realizando un proceso de análisis y visualización de las propiedades y relaciones existentes entre los conceptos y las figuras; sin embargo, a ellos se les dificultó constantemente usar un lenguaje apropiado para expresar sus ideas de manera correcta y formal; siendo en la mayoría de los casos por desconocimiento de los términos y en otras ocasiones por la confusión entre conceptos y/o notaciones.

Por otra parte, como resultado de una reflexión pedagógica originada a partir de lo observado en los registros de video, se puede destacar la importancia de haber utilizado la técnica de aprendizaje colaborativo (TAC) de resolución de problemas por parejas pensando en voz alta (RPPPVA), pues los docentes de matemáticas recurrimos casi exclusivamente, a la forma tradicional de valorar (evaluar) el trabajo de los estudiantes por medio de la evidencia escrita de la solución de los problemas. De esta manera, se pierden valiosas evidencias del pensamiento realizado por los estudiantes, que no quedan registrados en forma escrita, por lo tanto, se termina valorando al estudiante como si definitivamente no tuviese ningún nivel de desempeño en una u otra competencia matemática, lo cual en muchas ocasiones no es del todo cierto.

Así pues, se puede concluir que esta investigación deja abierta una reflexión pedagógica y didáctica encaminada hacia repensar y replantear formas de evaluación formativas distintas a las técnicas de evaluación tradicionales.

En este sentido, es necesario exhibir la innegable importancia que tiene la mediación de las TIC para innovar las prácticas pedagógicas en el aula. Además, de los software especializados para la enseñanza de las matemáticas como Geogebra, es necesario incrementar la implementación de las herramientas tecnológicas, como el celular y el computador con conexión a internet en las clases de matemáticas. La información está a disposición de los estudiantes en forma constante, por lo tanto, el papel del docente cambia de ser un simple transmisor, a ser el guía y acompañante del proceso de aprendizaje. Así, el docente se convierte en un diseñador de experiencias significativas, generando preguntas especiales que impulsen la curiosidad investigativa de los estudiantes, y al mismo tiempo proponer actividades en las que los mismos estudiantes apliquen sus conocimientos en cuanto al manejo de la tecnología, para registrar y evidenciar su comprensión de los conceptos y procesos trabajados.

De este modo, una idea de este tipo de actividades podría ser, por ejemplo, proponer a los estudiantes realizar un ejercicio de solución de un problema, en el cual, además de entregar la respuesta escrita, se acompañe de un video tomado con el celular explicando sus justificaciones para realizar cada uno de los pasos. Al respecto, cabe aclarar que lo único innovador de esta propuesta está en el instrumento de registro de la respuesta por video, pues ya preguntas de este tipo se han venido trabajando en las clases de matemáticas, en las cuales los docentes solicitan las justificaciones del paso a paso del proceso de solución de un problema, pero en forma escrita. La desventaja de solicitar en forma escrita este tipo de análisis a los estudiantes, es que requiere de una buena competencia comunicativa por escrito, por lo tanto, es posible que en forma verbal al estudiante le resulte más fácil expresar sus ideas y así dar unas evidencias más interesantes sobre su verdadero aprendizaje.

Para finalizar, se concluye que esta investigación, al intentar responder la pregunta problematizadora de cómo el trabajo con este tipo de secuencias didácticas mediadas por un SGD, facilitan el desarrollo de la competencia matemática de razonamiento, y en especial del proceso de visualización, al abordar temas propios de la geometría (como las razones trigonométricas); evidencia que de verdad los estudiantes al tener un trabajo colaborativo en el cual exponen y debaten sus observaciones y justificaciones, incrementan su nivel de desempeño en cuanto a la competencia de razonamiento a medida que avanzan en la solución de las actividades planteadas en una secuencia ordenada y metódica, como la realizada. Además, se puede afirmar que los estudiantes al finalizar el desarrollo de la secuencia didáctica pueden dar cuenta de una mayor comprensión de las propiedades, características y tipos de representaciones de las razones trigonométricas, pasando desde su representación geométrica (línea trigonométrica en el círculo unitario) hasta su interpretación algebraica como funciones trigonométricas (gráfica de función en el plano x, y).

Más aún, la realización de esta investigación terminó dejando abierto, en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, un posible interrogante para una futura investigación académica: ¿Qué tipo de propuestas se pueden diseñar para fomentar el desarrollo de la competencia de comunicación matemática; en especial, desde el tratamiento de un objeto o concepto geométrico (por ejemplo, la semejanza de triángulos o las funciones trigonométricas inversas)?

Fuentes de consulta

- Algarín, D. (2013). *Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Andrade, O. (2015). *Diseño de una propuesta de aula para enseñar las razones trigonométricas en el grado décimo de la Institución Educativa Presbiterio Bernardo Montoya Giraldo del municipio de Copacabana Antioquia* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Anfossi, A. & Flores, M. (1978). *Curso de Trigonometría Rectilínea.* México, D.F.: Editorial Progreso S.A. de C.V.
- Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 359-435). Bogotá: Ediciones Uniandes.

- Argudin, Y. (2008). *La educación basada en competencias: algunas nociones que pueden facilitar el cambio.* Ciudad de México: Universidad Iberoamericana de Santa Fe.
- Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 7-24). Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana S.A.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana S.A.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes, una empresa docente.
- Barkley, E., Cross, K. & Major, C. (2012). *Técnicas de aprendizaje colaborativo, manual para el profesorado universitario (2ª Ed).* Madrid, España: Ediciones Morata, S.L.
- Barrón, Á. (1993). Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 11, (1). 3-11. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/39770
- Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.
- Briceño, E. & Alamillo, L. (2017). *Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria*. Revista de investigación educativa de la REDIECH, 8(15), 111-131. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200111&lng=es&tlng=es.

- Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-462). New York, USA: McMillan.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 61-96). Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana S.A.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processing. En R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer-Verlag.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. ICMI Study* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* (Tesis doctoral), Universidad de Iowa, EE.UU. https://doi.org/10.17077/etd.hgi8dv0k
- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia; Valencia, España.
- González, C. (2016). El modelo humanista-constructivista en la educación. *Escritos en la Facultad, Universidad de Palermo,* 12, (124). 65-66. https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/archivos/624_libro.pdf

- González, M., Matilla, J., & Rosales, F. (2017). Potencialidades del software Geogebra en la enseñanza de la matemática, estudio de caso de su aplicación en la trigonometría. Roca: Revista Científico Educaciones de la provincia de Granma, 13, (4), 401-415. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6759725
- Guin D. & Trouche L. (2007). Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques. En M. Baron, D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Environnements informatiques et ressources numériques pour l'apprentissage* (pp.197-226). Paris, Francia: Hermes Science.
- Gutiérrez, L. et al. (2008). *Cuaderno de Educación de Cantabria 5. Las competencias básicas en el área de Matemáticas*. Cantabria, España: Consejería de Educación de Cantabria.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación, 6ª edición*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill, Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Icfes. (2018a). *Reporte de resultados históricos del examen Saber 11, establecimientos educativos. I.E. Liceo Departamental, código Dane: 176001001745.* http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/consultaAgregadosEstablecimiento.jsf#No-back-button
- Icfes. (2018b). *Publicación de Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9° (2017)*. I.E. Liceo Departamental. http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx.
- Icfes. (2019). *Reporte de resultados del examen saber 11° por aplicación 2019-4, establecimientos educativos. I.E. Liceo Departamental, código Dane: 176001001745.*

http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/descargarresultadoagregadospdfservlet

- I.E. Liceo Departamental. (2018a). *Proyecto educativo institucional PEI, Unidos por la excelencia*. Cali: Institución Educativa Liceo Departamental.
- I.E. Liceo Departamental. (2018b). *Estadística de indicadores perdidos, grado 10, Área de Trigonometría, Periodo 1° de 2018.* Cali: Institución Educativa Liceo Departamental.
- I.E. Liceo Departamental. (2018c). *Estadística de indicadores perdidos, grado 9, Área de Geometría, Periodo 2° de 2018.* Cali: Institución Educativa Liceo Departamental.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st Century. ICMI Study* (pp. 113-121). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publisher.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. [Versión electrónica]. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Serie Documentos. Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.
- MEN-Icfes. (2017). *Siempre día e, informe por colegio. Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9° (2016). I.E. Liceo Departamental*. https://diae.mineducacion.gov.co/siemprediae/documentos/2017/Institucion_Educativa/176001001745.pdf

- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid, España: Editorial La Muralla S. A.
- Peters, M. & Schaaf, W. (1972). *Álgebra y trigonometría.* Barcelona, España: Editorial Reverté S.A.
- Piaget, J. (1981). Lo posible, lo imposible y lo necesario, *Journal for the Study of Education and Development*, 4 (2), 108-122, https://doi.org/10.1080/02103702.1981.10821905
- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. En *Revista EMA*, 1, (1). 4-24. https://core.ac.uk/download/pdf/12341496.pdf
- Rodríguez, L. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. *Revista Digital Universitaria, UNAM*, 5, (1). 1-18. http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/ene_art2.pdf
- Samper, C., Camargo, L. & Leguizamón, C. (2003). *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Sémadéni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics*, 4, (1). pp. 32-34. https://flm-journal.org/Articles/7DE6E459B48131C6FD31327F97E5B.pdf
- Semanov, A. (2005). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza.* Montevideo, Uruguay: Ediciones Trilce.
- Sullivan, M. (2006). *Algebra y Trigonometría, 7ª edición.* Naucalpan de Juárez, México: Editorial Pearson Educación de México S.A. de C.V.
- Tobón, S., Pimienta, J. & García, J. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias.* Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

- Van Hiele, P. (1984). The child's though and geometry. En D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele.* (pp. 247-256). New York, USA: Brooklyn College.
- Vasco, C. (1985). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. *Revista de la Universidad Nacional*, 1, (2). 45-51. https://revistas.unal.edu.co/index.php/revistaun/article/view/11733/12435
- Yin, R. (2003). *Case Study Research: design and methods, 3.ed.* Thousand Oaks, USA: Sage Publications, Inc.

ANEXOS

Anexo A. Estadística de indicadores perdidos Trigonometría 10° (2018-P.1)

Institución Educativa LICEO DEPARTAMENTAL

Sede : 1 - Liceo Departamental

Estadistica de Indicadores Perdidos

Grado : 10 Asignatura : TRIGONOMETRÍA Año Lectivo : 2018

Indicador	Total Estudia	Reprobados (%)	Aprobados (%)
00889 COMPRENDE Y UTILIZA LOS SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN LA CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS.	209	125 (59.81 %)	84 (40.19 %)
00891 ARGUMENTA, RESUELVE Y PROPONE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.	209	90 (43.06 %)	119 (56.94 %)
00853 RECONOCE, CLASIFICA TRIÁNGULOS RELACIONANDO SUS PROPIEDADES EN LA SOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA.	113	79 (69.91 %)	34 (30.09 %)
00890 ANALIZA E INTERPRETA ÁNGULOS ATENDIENDO A SU MEDIDA Y VERIFICA A QUÉ CUADRANTE PERTENECE.	96	26 (27.08 %)	70 (72.92 %)
01026 PRESENTA SU CUADERNO CON TAREAS, TALLERES Y ACTIVIDADES REALIZADAS DURANTE EL PERIODO	113	4 (3.54 %)	109 (96.46 %)
01072 SU TRABAJO CONTIENE TODOS LOS TEMAS PROPUESTOS, CUMPLE CON LAS CONSIGNAS DADAS, ES CLARO Y PRECISO EL ROL QUE DESEMPEÑA DENTRO DEL GRUPO, SE EVIDENCIA PREPARACIÓN Y PARTICIPACIÓN EN EL TRABAJO COLABORATIVO, TENIENDO IDEAS CREATIVAS E INNOVADORAS A LA HORA DE PRESENTAR Y EXPLICAR LOS TEMAS PROPUESTOS	113	4 (3.54 %)	109 (96.46 %)
01396 PARTICIPA COMPROMETIDAMENTE EN CLASE PREOCUPÁNDOSE POR DESARROLLAR LAS ACTIVIDADES QUE CONTRIBUYAN CON EL ALCANCE DE LOS DESEMPEÑOS INDIVIDUALES Y COLECTIVOS, RECONOCIENDO QUE LOS RECURSOS SON DE TODOS Y DANDO USO RESPONSABLE DE LOS MISMOS.	113	3 (2.65 %)	110 (97.35 %)
01542 ES RESPONSABLE CON SUS OBLIGACIONES ACADÉMICAS, Y PARTICIPA ACTIVAMENTE EN LA CONSTRUCCIÓN DE SU CONOCIMIENTO	96	1 (1.04 %)	95 (98.96 %)
01363 CUMPLE CON TODOS LOS REQUERIMIENTOS QUE LE PROPONEN EL ÁREA Y EL MANUAL DE CONVIVENCIA DE MANERA EFICIENTE	96	0 (0 %)	96 (100 %)

ZETI - Institución Educativa LICEO DEPARTAMENTAL - 5141714/5141725 Abril 15 de 2020 - Pagina 1 de 1

Anexo B. Estadística de indicadores perdidos Geometría 9° (2018-P.2)

Institución Educativa LICEO DEPARTAMENTAL

Sede : 1 - Liceo Departamental
Estadistica de Indicadores Perdidos
Grado : 9 Asignatura : GEOMETRÍA Año Lectivo : 2018

Indicador	Total Estudia	Reprobados (%)	Aprobados (%)
00732 ESTABLECE LA PERTINENCIA DE APLICAR EL TEOREMA DE THALES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS	119	85 (71.43 %)	34 (28.57 %)
00733 ESTABLECE LA PERTINENCIA DE APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	81	67 (82.72 %)	14 (17.28 %)
01542 ES RESPONSABLE CON SUS OBLIGACIONES ACADÉMICAS, Y PARTICIPA ACTIVAMENTE EN LA CONSTRUCCIÓN DE SU CONOCIMIENTO	160	19 (11.88 %)	141 (88.13 %)
01026 PRESENTA SU CUADERNO CON TAREAS, TALLERES Y ACTIVIDADES REALIZADAS DURANTE EL PERIODO	40	9 (22.5 %)	31 (77.5 %)
01072 SU TRABAJO CONTIENE TODOS LOS TEMAS PROPUESTOS, CUMPLE CON LAS CONSIGNAS DADAS, ES CLARO Y PRECISO EL ROL QUE DESEMPEÑA DENTRO DEL GRUPO, SE EVIDENCIA PREPARACIÓN Y PARTICIPACIÓN EN EL TRABAJO COLABORATIVO, TENIENDO IDEAS CREATIVAS E INNOVADORAS A LA HORA DE PRESENTAR Y EXPLICAR LOS TEMAS PROPUESTOS	40	8 (20 %)	32 (80 %)
01396 PARTICIPA COMPROMETIDAMENTE EN CLASE PREOCUPÁNDOSE POR DESARROLLAR LAS ACTIVIDADES QUE CONTRIBUYAN CON EL ALCANCE DE LOS DESEMPEÑOS INDIVIDUALES Y COLECTIVOS, RECONOCIENDO QUE LOS RECURSOS SON DE TODOS Y DANDO USO RESPONSABLE DE LOS MISMOS.	40	6 (15 %)	34 (85 %)
01363 CUMPLE CON TODOS LOS REQUERIMIENTOS QUE LE PROPONEN EL ÁREA Y EL MANUAL DE CONVIVENCIA DE MANERA EFICIENTE	160	3 (1.88 %)	157 (98.13 %)

ZETI - Institución Educativa LICEO DEPARTAMENTAL - 5141714/5141725 Abril 15 de 2020 - Pagina 1 de 1

Anexo C. Consentimiento informado a padres de familia

SANTIAGO DE CALI

LICEO DEPARTAMENTAL

UNIVERSIDAD ICESI

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Santiago de Cali. 10 de septiembre de 2019

Yo,____, Madre - Padre y/o Acudiente, identificado con cédula de ciudadanía No. ________________________ de_____________, autorizo a mi hijo (a) _____________________________________ del grado **10°- 5** para participar en el diagnóstico e implementación de situaciones didácticas que el licenciado **Edward Benavides** de la institución, en el marco de su trabajo de grado de Maestría en Educación, pretende desarrollar como estrategia de mejoramiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes participantes. Estoy enterado que mi hijo(a) será registrado en video y que su imagen no será publicada, al igual que su participación será registrada en forma anónima, y los datos recopilados solo serán utilizados con fines académicos.

____

Firma del Padre /Madre de Familia/ Acudiente

Tel/Cel: ___________________________

ORSERVACIÓN: La secuencia didáctica se desarrollará dentro del horario de clases habitual de la asignatura de Trigonometría y los resultados de aprendizaje serán evaluados por la docente encargada del área Luz Elena Jiménez.

Gracias por su atención y apoyo a esta actividad, determinante en la formación de los educandos y en la movilización de sus saberes.

Cordialmente,

____

Edward Antonio Benavides Rosero
Lic. en Matemáticas y Física
Cel: 300 467 69 54

Anexo D. Guía taller de Actividad 1

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #1: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ____ **Fecha:** __________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 1A.ggb*** presenta un triángulo rectángulo de vértices ABC, con las respectivas medidas de sus lados en cm y del ángulo agudo formado en el vértice A (con tres cifras decimales), y a la derecha, se tienen las razones (cociente) entre dichas medidas. El único punto que permite movimiento es el punto B (color azul).

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto B y muévalo libremente. Observe lo que sucede con las distintas partes del triángulo (ángulos y lados), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene igual? ¿Qué sucede con las razones?
2. Si el ángulo agudo θ, se aproxima a cero grados, ¿qué sucede con los valores de las razones?
3. Si el ángulo agudo θ, se aproxima a noventa grados, ¿qué sucede con los valores de las razones?

SEGUNDA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 1B.ggb*** presenta un triángulo rectángulo de vértices ABC, con las respectivas medidas de sus lados en cm y del ángulo agudo formado en el vértice A (con tres cifras decimales), y a la derecha, se tienen las razones (cociente) entre dichas medidas. El punto P (color azul) permite modificar el ángulo agudo θ, y el punto C (color rojo) permite cambiar el tamaño del triángulo.

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente (manteniendo un triángulo presente). Observe lo que sucede con las distintas partes del triángulo (ángulos y lados), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene igual? ¿Qué sucede con las razones?

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

2. Con el puntero del mouse seleccione el punto C y muévalo libremente (manteniendo un triángulo presente). Observe lo que sucede con las distintas partes del triángulo (ángulos y lados), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene igual? ¿Qué sucede con las razones?
3. ¿Qué puede decir respecto a los distintos triángulos que se obtienen cuando se mueve el punto C (rojo) dejando quieto el punto P (azul)? ¿Cómo son en forma y en tamaño? ¿Qué nombre recibe su relación y cuál es el criterio que lo justifica?
4. Para cualquier triángulo ABC en pantalla, registre las medidas de sus lados AB, BC y CA. Luego, modifique el tamaño del triángulo moviendo el punto C (rojo) y registre las nuevas medidas de los lados con las etiquetas A´B´, B´C´ y C´A´. Confirmar la proporcionalidad entre los lados respectivos.
5. De acuerdo a lo que observaron y respondieron en las preguntas anteriores (1 y 2), discuta con su compañero y plantee una **conclusión** de lo que sucede con los valores de las razones calculadas en general.

TERCERA PARTE

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman "catetos" y el lado mayor (opuesto al ángulo recto) se llama "hipotenusa". Las tres razones presentadas en los archivos de Geogebra se llaman Razones Trigonométricas y se definen para un ángulo agudo θ con tres nombres en especial: Seno (***Senq***), Coseno (***Cosq***) y Tangente (***Tanq***).

En el archivo Geogebra Actividad 1B.ggb, observe el triángulo ABC y las razones para responder:

1. Si el Seno del ángulo agudo θ se define como la razón del lado opuesto (al frente del ángulo) sobre la hipotenusa, escriba la razón correspondiente (con la nomenclatura de segmentos).
2. Si el Coseno del ángulo agudo θ se define como la razón del lado adyacente (que forma el ángulo) sobre la hipotenusa, escriba la razón correspondiente (con la nomenclatura de segmentos).
3. Si la Tangente del ángulo agudo θ se define como la razón del lado opuesto sobre el lado adyacente, escriba la razón correspondiente (con la nomenclatura de segmentos).

Edward Antonio Benavides R.

Lic. en Matemáticas y Física

Anexo E. Hojas de Respuestas de Actividad 1

Act.1-Pareja 1 (Pág. 1 de 3)

Michelle Galeano – Nikolas Andrade 10-5

Primera parte

1. Que cambio? Longitud – lados → ¿3? ⇒ Cambian los valores de las razones
Medida de los angulos menos el angulo "C"

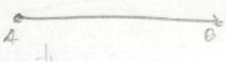
Que sucede con las razones? Los valores de las razones fluctuan a medida que se mueve el punto B con el mouse

El planteamiento de las razones se mantiene independientemente de que los datos varien

2. $\measuredangle \Theta = 0$

La razon

$\frac{CA}{AB} = 1$ ⇒



$\frac{25,895}{25,945} = 1$

Las razones

$\frac{BC}{AB}$ y $\frac{BC}{CA} = 0,001$

El resto de las proporciones da como valor 0

Porque tiene misma longitud

3. $\measuredangle \Theta = 90°$

La longitud de los lados $\frac{BC}{AB}$ es la misma

$\frac{25,895}{25,895} = 1$

Segunda parte

Que cambia: Las longitudes de los lados BC y AB
Cambia el resultado de las razones aun cuando el lado AC no cambia de valor. Cambian la medida del angulo $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$
$\measuredangle \Theta$

Que se mantiene: La longitud del lado AC
La medida del $\measuredangle C = 90°$ a menos que se aproxime a "0"

Act.1-Pareja 1 (Pág. 2 de 3)

② • Todos los lados y sus medidas cambia
• Los ángulos se mantienen
• Aunque los valores de las razones cambien su resultado se mantiene

③ Son triángulos rectángulos
Sus ángulos se mantienen
Su tamaño varía
Se puede decir que por lo anterior los distintos triángulos que se obtienen son semejantes por el criterio A.A. ~~LAL~~.

$\triangle ABC \sim \triangle ABC$

④
Triangulo 1

$AB = 6{,}998$
$BC = 3{,}5$
$CA = 6{,}06$

Triangulo 2

$AB = 11{,}848$
$BC = 5{,}926$
$CA = 10{,}26$

Proporcionalidad

$\frac{BC}{AB} = \frac{3.5}{6{,}998} = 0{,}500$

$\frac{CA}{AB} = \frac{6{,}06}{6{,}998} = 0{,}866$

$\frac{BC}{AC} = \frac{3{,}5}{6{,}06} = 0{,}578$

Proporcionalidad

$\frac{BC}{AB} = \frac{5{,}926}{11{,}848} = 0{,}500$

$\frac{CA}{AB} = \frac{10{,}26}{11{,}848} = 0{,}866$

$\frac{BC}{AC} = \frac{5{,}926}{10{,}26} = 0{,}578$

. Así no se prueba esto.

⑤ Conclusiones:

¿Y las razones?

1) Moviendo el punto "P" cambia el ángulo θ y la longitud de los lados AB y BC

2) Moviendo el punto "C" los longitudes de los lados cambian y el resultado de la razones y los ángulos no cambian

Act.1-Pareja 1 (Pág. 3 de 3)

5) ① Si el seno del ángulo θ

Razón $= \frac{BC}{AB} = \text{Sen}\ \theta$

② Coseno ángulo θ

Razón $= \frac{AC}{AB} = \cos\theta$

③ Tangente Ángulo θ

Razón $= \frac{BC}{AC} = \tan\theta$

OK

Act.1-Pareja 2 (Pág. 1 de 2)

Primera Parte.

1

- Cambian los valores de los lados y el ∡θ
- Se mantiene igual el valor de la hipotenusa y el ∡90°
- Al cambiar el valor de los lados el resultado de las proporciones * varia.

razones

2

- La hipotenusa (AB) y el cateto adyacente (AC) tienen el mismo valor.
- Al dividir los catetos por la hipotenusa el resultado de las razones es el mismo.

¿?

3.

- Los lados BC y AB tienen el mismo valor.
- la division entre los lados CA y AB se aproximan a 0.

Segunda Parte.

1

- Cambia el valor de la hipotenusa, el valor del ∡θ y el valor del cateto opuesto.
- Se mantiene igual el valor del cateto adyacente.
- El resultado de las razones no pasan de 2 ¿? ✗

2.

- Cambian los valores de los lados. → ¿? Todos
- Se mantiene el valor del ∡θ
- El resultado de las razones se mantienen,

3.

- Se mantiene la misma forma y el tamaño puede variar dependiendo del punto C.

• Incompleto

4.

AB = 9,338 BC = 4,749 AC = 8,04

A'B' = 12,589 B'C' = 6,402 A'C' = 10,84.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$ ¿Y el otro?

$$\frac{4,749}{9,338} = \frac{6,402}{12,589}$$

0,509 = 0,509

los lados son proporcionales por ende los triangulos BAC ∼ B'A'C'

Act.2-Pareja 2 (Pág. 2 de 2)

5.

• los resultados de la razones varia ya que el valor de los lados cambia. (al mover el punto P).

• los resultado de los razones al mover el punto C siguen siendo los mismos aunque los valores de los lados cambien.

Tercera Parte.

· No es lo esperado

$Sen = \frac{7,187}{12,939}$ $Sen\theta = \frac{BC}{AB}$

$Cos = \frac{10,76}{12,939}$ $\cos\theta = \frac{CA}{AB}$

$tan = \frac{7,187}{10,76}$ $\tan\theta = \frac{BC}{AC}$

Act.1-Pareja 3 (Pág. 1 de 2)

Ricardo Pabón Serna y Santiago Giraldo 10-5

Desarrollo

¿Qué cambia? ¿?

1. R// · La proporción de los lados del triángulo cambia · La Forma del triángulo
· El cociente de las razones cambia
· La apertura del ángulo θ cambia
· La longitud de los catetos cambia.

¿Qué se mantiene igual?
· La Longitud de la hipotenusa se mantiene igual
· Se mantie el ángulo recto.

¿Qué sucede con las razones? ¿?
· La constante de proporcionalidad entre las razones varía dependiendo de la Longitud de los catetos. ¿?

2. R// Las constante de proporcionalidad entre $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; $\overline{CA}$ se aproximan a valores cercanos al cero mientras que el de la razón $\overline{CA}$; $\overline{AB}$ se aproxima a valores de 1

3 R/ La constante de proporcionalidad $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; $\overline{CA}$ se aproxima a 1 mientras que $\overline{CA}$; $\overline{AB}$ se aproxima a 0 (cero)

2da parte

1) ¿Qué cambia?
· cambia "Co" y la h en relación a θ → ¿Co? ¿h?
· cambia la medida del ángulo θ, por lo tanto, la forma
· cambia el cociente de las razones

¿Qué se mantiene igual?
· se mantiene el ángulo de 90°
· La longitud del "Ca" con relación a θ → ¿Ca?

¿Qué sucede con las razones?
· La constante de proporcionalidad entre las razones varía dependiendo de la longitud de los catetos. ¿?

Act.1-Pareja 3 (Pág. 2 de 2)

2. ¿Qué cambia?

Cambia la longitud de los lado del triangulo, ✗ → ✱ Todos

¿Qué se mantiene igual?

- Se mantiene la medida de los angulos del triangulo. ✓
- El cociente de las razones se mantiene ✓ (OK)

¿Qué sucede con las razones?

La ~~constante de proporcionalidad~~ → ¿? ✗ se mantiene, pero cambia el valor de los antecedente y consecuente de la razón.

(3). Cuando se modifica el punto P cambia la forma del triangulo y las constante de proporcionalidad entre las razones, mientras que se modifica el punto C el triangulo cambia de tamaño per no de forma la constante de proporcionalidad se mantiene

· No era lo esperado.

4. $BC = 3{,}017$ $AB = 6{,}02$ $AC = 5{,}209$ < $B'C' = 4{,}033$ $A'B' = 8{,}047$ $A'C' = 6{,}964$

1° △ 2^do △

$\frac{BC}{AB} = \frac{3{,}017}{6{,}02} = 0{,}501$ $\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{4{,}033}{8{,}047} = 0{,}502$ $\boxed{\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}}$ ✗

$\frac{CA}{AB} = \frac{5{,}209}{6{,}02} = 0{,}865$ $\frac{C'A'}{A'B'} = \frac{6{,}964}{8{,}047} = 0{,}865$ $\boxed{\frac{CA}{AB} = \frac{C'A'}{A'B'}}$ ✗

$\frac{BC}{AC} = \frac{3{,}017}{5{,}209} = 0{,}579$ $\frac{B'C'}{A'C'} = \frac{4{,}033}{6{,}964} = 0{,}579$ $\boxed{\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}}$ ✗

· Mal probada la proporcionalidad entre lados.

5. Si se cambia la forma del triangulo cambia los cocientes de la razon se ve reflejado moviendo el punto P. Se mantiene igual la forma pero cambia el tamaño. dos → Los cocientes de las razones se mantiene. ✓

· No es lo esperado.

1R/ $\operatorname{Sen} \theta = \frac{BC}{AB}$ ✓ 2R/ $\operatorname{Cos} \theta = \frac{CA}{AB}$ ✓ 3R/ $\operatorname{Tan} \theta = \frac{BC}{AC}$ ✓ (OK)

Anexo F. Guía taller de Actividad 2

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #2: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ____ **Fecha:** __________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 2.ggb*** presenta un triángulo rectángulo de vértices OPQ, con las respectivas medidas de sus lados en cm y del ángulo agudo formado en el vértice O (con dos cifras decimales), y a la derecha, se tienen las razones trigonométricas del seno y coseno. El único punto que permite movimiento sobre la circunferencia de radio 1, es el punto P (color azul).

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente (solo hasta máximo $\theta = 90°$). Observe lo que sucede con las distintas partes del triángulo rectángulo obtenido (ángulos y lados), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene igual? ¿Qué sucede con las razones?
2. Para cualquier ángulo agudo θ, registre la información pedida, luego responda:
   θ =¿? P = (¿? , ¿?) QP = ¿? OQ = ¿? Sen θ = ¿? Cos θ = ¿?
   - **a.** ¿Cómo es la coordenada "x" (abscisa) del punto P, con respecto a la longitud del cateto adyacente OQ?
   - **b.** ¿Cómo es la coordenada "x" del punto P, con respecto al valor de la razón coseno para el ángulo agudo θ?
   - **c.** De acuerdo a las dos respuestas anteriores, ¿qué puede concluir respecto a la razón coseno y la longitud del segmento OQ (azul) proyectado sobre el eje x?
   - **d.** ¿Cómo es la coordenada "y" (ordenada) del punto P, con respecto a la longitud del cateto opuesto QP?
   - **e.** ¿Cómo es la coordenada "y" del punto P, con respecto al valor de la razón seno para el ángulo agudo θ?
   - **f.** De acuerdo a las dos respuestas anteriores, ¿qué puede concluir respecto a la razón seno y la longitud del segmento QP (rojo) proyectado sobre el eje y?

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ, se obtiene un triángulo rectángulo OPQ, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes de los catetos (OQ y QP) y el valor fijo de la hipotenusa (OP=1), la fórmula (con letras) quedaría:

   ____

2. Ahora, de acuerdo a las respuestas **a** y **d** de la Primera Parte, usando las coordenadas del punto P = (x,y), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   ____

3. Por último, de acuerdo a las respuestas **b** y **e** de la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (cosθ y senθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   ____

Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 3, corresponde a la ***"Identidad Pitagórica Principal"*** , y es una fórmula que te permitirá resolver problemas de verificación de identidades y de solución de ecuaciones trigonométricas.

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo G. Hojas de Respuestas de Actividad 2

Act.2-Pareja 1 (Pág. 1 de 1)

Michelle Galeano – Nikolas Andrade

①

Qué cambio? El resultado de las razones, cambia el angulo θ, cambia la longitud de todos los lados

Qué se mantiene? Se mantiene la hipotenusa y el angulo de 90° = Q

Qué sucede con las razones? Cambia el resultado de las razones dependiendo de los 2 catetos

②

$\measuredangle \theta = 31°$ P = (0,86 , 0,52) $\overline{QP}$ = 0,52 $\overline{OQ}$ = 0,86

$\text{Sen } \theta = \frac{0{,}52}{1} = 0{,}52$

$\cos \theta = \frac{0{,}86}{1} = 0{,}86$

C

a) Es la misma : 0,86 → b ¿?

b) La longitud del lado $\overline{OQ}$ tiene la misma medida que el coseno del angulo θ

d) 0,52 – Es la misma

e) Es igual al resultado del seno del angulo θ

F) Es el mismo resultado ($\overline{OQ}$) $\overline{QP}$ a seno de θ que es 0,52

Segunda parte

1) $1^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$

2) $1^2 = (x^2 + y^2)$

3) $h^2 = \text{sen}\,\theta^2 + \cos\theta^2$

$1 = \text{sen}\,\theta^2 + \cos\theta^2$

Act.2-Pareja 2 (Pág. 1 de 2)

Primera parte

1.

→ Cambia los valores de los catetos y del ángulo → ¿cuál?

→ Se mantiene igual la hipotenusa. → y el ángulo recto.

→ El resultado de las razones cambia al cambiar el valor de los catetos. → ¿Angulo?

$\theta = 30{,}02°$

$P = (0{,}87, 0{,}5)$

$QP = 0{,}5$

$OQ = 0{,}87$

$\text{Sen}\,\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5.$

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{0{,}87}{1} = 0{,}87$

a. la coordenada x(P) con respecto a la longitud de cateto adyacente OQ es igual.

$x = OQ. \rightarrow 0{,}87 = 0{,}87.$

b. la coordenada x(P) con respecto al coseno de θ es igual.

$x = \cos\theta \rightarrow 0{,}87 = 0{,}87.$

C. En conclusión como observamos en los puntos anteriores la coordenada x tiene el mismo valor que OQ y cos θ por ende OQ es igual a cos θ

$\cos\theta = OQ \rightarrow 0{,}87 = 0{,}87.$

d. la coordenad y (P) con respecto a la longitud del cateto opuesto QP es igual.

$y = QP \rightarrow 0{,}5 = 0{,}5.$

e. la coordenad y (P) con respecto al valor de la razon de Seno de θ es igual.

$y = \text{Sen}\,\theta \rightarrow 0{,}5 = 0{,}5$

f. En los dos puntos anteriores observamos que "y" es igual a QP y Sen θ, por ende, QP es igual a Sen θ.

$\text{Sen}\theta = QP \rightarrow 0{,}5 = 0{,}5$ *

Segunda Parte: En la hoja del Taller.

Act.2-Pareja 2 (Pág. 2 de 2)

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ, se obtiene un triángulo rectángulo OPQ, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes de los catetos (OQ y QP) y el valor fijo de la hipotenusa (OP=1), la fórmula (con letras) quedaría:

   $(OP)^2 = (OQ^2 + QP^2) = (1)^2 = (0{,}8)^2 + 0{,}5^2)$ ✗

2. Ahora, de acuerdo a las respuestas **a** y **d** de la Primera Parte, usando las coordenadas del punto P = (x,y), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   $1^2 = x^2 + y^2$

3. Por último, de acuerdo a las respuestas **b** y **e** de la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (cosθ y senθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   $1 = (\cos\theta)^2 + (\text{Sen}\,\theta)^2.$

Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 3, corresponde a la ***"Identidad Pitagórica Principal"*** , y es una fórmula que te permitirá resolver problemas de verificación de identidades y de solución de ecuaciones trigonométricas.

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Act.2-Pareja 3 (Pág. 1 de 2)

Desarrollo

A. → 1

1. R// Lo que cambia es:

- El cociente de las razones Trigonométricas
- La medida de los ángulos "P" y "Q"
- La longitud de los catetos

2. Que se mantiene igual.

- La longitud de la hipotenusa ¿valor?
- La medida del ángulo "Q" (a2)

3. R// El cociente de las razones cambian a medida que se mueve el punto "P" en la circunferencia del círculo unitario.

B. → 2 $\theta = 30°$ $P = (0.87, 0.5)$ $QP = 0,5$ $OQ = 0.87$ $Sen\theta = 0,5$ $Cos\theta = 0,87$

1) La coordenada abscisa del punto P es igual a la longitud de cateto adyacente OQ $Q = \overline{OQ}$ (a)

2) La coordenada X del punto P es equivalente al valor de la razón coseno para el ángulo θ $Q = Cos\theta$ (b)

3) Puedo concluir que la razón coseno y la longitud del segmento OQ no varían con el cambio de posición del punto "P", si se mantiene la hipotenusa.

$Q = cos\theta = \overline{OQ}$ (c) • No es lo esperado

4. La coordenada y del punto p es igual a la longitud del cateto opuesto QP (d)

5. La coordena "y" del punto p es igual a la razón seno para el ángulo θ. (e)

(f)

6. Podemos concluir que la razón seno y la longitud del segmento QP no varían con el cambio de posición del punto "p", si se mantiene la hipotenusa * No es lo esperado

Act.2-Pareja 3 (Pág. 2 de 2)

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ, se obtiene un triángulo rectángulo OPQ, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes de los catetos (OQ y QP) y el valor fijo de la hipotenusa (OP=1), la fórmula (con letras) quedaría:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$$

2. Ahora, de acuerdo a las respuestas **a** y **d** de la Primera Parte, usando las coordenadas del punto P = (x;y), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

$$1^2 = x^2 + y^2$$

3. Por último, de acuerdo a las respuestas **b** y **e** de la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (cosθ y senθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

$$1^2 = \cos\theta^2 + \operatorname{sen}\theta^2$$

Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 3, corresponde a la ***"Identidad Pitagórica Principal"*** , y es una fórmula que te permitirá resolver problemas de verificación de identidades y de solución de ecuaciones trigonométricas.

Edward Antonio Benavides R.

Lic. en Matemáticas y Física

Anexo H. Guía taller de Actividad 3

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #3: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ____ **Fecha:** _________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 3.ggb*** presenta dos triángulos rectángulos OQP y OAR, (las medidas de sus catetos son observables en las coordenadas de los puntos P y R, respectivamente). En los triángulos se da la medida del ángulo agudo formado en el vértice O, que se llamará θ (en grados con dos cifras decimales). Note que el punto R está en la intersección de la recta secante (recta verde que atraviesa el círculo unitario por el punto P) con la recta tangente vertical (recta roja que toca al círculo unitario en el punto A). Además, a la derecha, se tienen las razones trigonométricas de la tangente y la secante (recíproca del coseno) del ángulo θ con las longitudes del triángulo OQP. **Nota:** El único punto que permite movimiento sobre la circunferencia de radio 1, es el punto P (color azul).

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente (solo hasta máximo $\theta = 90°$). Observe lo que sucede con las partes (ángulos y lados) de los dos triángulos rectángulos presentados (OQP y OAR), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué tienen en común los dos triángulos? ¿Qué pueden concluir acerca de los dos triángulos? ¿Con qué criterio lo justifica? ¿Son proporcionales los lados respectivos?
2. Para cualquier ángulo agudo θ, registre la información pedida, luego responda: θ = ¿?
   P = (¿?, ¿?) QP = ¿? OQ = ¿? OP = ¿? R = (¿?, ¿?) AR = ¿? OA = ¿?
   OR = ¿? Tan θ = ¿? Sec θ = ¿?
   a. ¿Cómo es la medida del segmento AR, con respecto al valor de la razón tangente para el ángulo agudo θ?
   b. ¿Cómo es la medida del segmento OR, con respecto al valor de la razón secante para el ángulo agudo θ?
   c. Plantee una proporción con los segmentos respectivos de los triángulos OQP y OAR para demostrar lo que respondió en la pregunta **2.a**.
   d. Plantee una proporción con los segmentos respectivos de los triángulos OQP y OAR para demostrar lo que respondió en la pregunta **2.b**.

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ sobre el círculo unitario, se obtiene un triángulo rectángulo OAR, usando las rectas secante y tangente vertical al mismo círculo, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes del cateto fijo (OA), del cateto variable (AR) y el valor de la hipotenusa variable (OR), la fórmula quedaría:

   ____

2. Así pues, de acuerdo a las respuestas **a** y **b** de la pregunta 2 en la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (Tanθ y Secθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   ____

   Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 2, corresponde a otra de las ***"Identidades Pitagóricas"***. Como la que verificamos en la Actividad 2 de la semana anterior.

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo I. Hojas de Respuestas de Actividad 3

Act.3-Pareja 1 (Pág. 1 de 2)

1) Qué tienen en comun?

- El angulo recto (90°) ubicado A en el toque del circulo unitario de la tangente
- El angulo de (90°) ubicado en el punto Q
- La secante es la misma.
- El angulo ubicado en el punto (O) es para los 2 triangulos

• Qe pueden concluir de los 2 triangulos?

- Son semejantes por el criterio de A.A porque todos los lados están regidos o son dependientes del angulo ubicado en "O"

- Son proporcionales los lados respectivos?

- Si son proporcionales porque la medida de los lados RA y PQ son los mismos y por lo tanto sus razones son iguales

2) • $P = (0{,}72 , 0{,}69)$ • $R = (1, 0{,}95)$

• $QP = 0{,}69$ • $AR = (0{,}95)$ • $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$

• $OQ = 0{,}72)$ • $OA = (1)$ • $\sec\theta = \frac{OP}{OQ}$

• $OP = (1{,}38)$ • $OR = 1{,}38$

a) $AR = 0{,}95$

$\tan\theta = \frac{0{,}69}{0{,}72} = 0{,}95$

R/(a)

b) $OR = 1{,}38$

$\sec\theta = \frac{1}{0{,}72} = 1{,}38$

R/(b)

c) Segmentos OQP

La proporción

$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$ $\frac{AR}{OA} = \frac{PQ}{OQ}$

$\tan\theta = \frac{0{,}69}{0{,}72}$ $= \frac{AR}{1} = \frac{PQ}{OQ} = \tan\theta$

OK

$AR = \tan\theta$

d) La proporción

$\sec\theta = \frac{OP}{OQ}$ $\frac{OR}{OA} = \frac{PQ}{OQ}$

$OR = \sec\theta$ $\frac{OA}{1} = \frac{PQ}{OQ} = \sec\theta$

Error

Act.3-Pareja 1 (Pág. 2 de 2)

Segunda parte

Pitagoras

① C. fijo = OA = 1

C. variable = AR = 0,95

hipotenusa OR = 1,38

$\boxed{OR^2 = OA^2 + AR^2}$

② $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = AR$

$\sec\theta = \frac{OP}{OQ} = OR$

$\sec^2\theta = 1^2 + (\tan\theta)^2$

$\boxed{(1,38)^2 + (1)^2 + (0,95)^2}$

Act.3-Pareja 2 (Pág. 1 de 2)

Génesis Mesa - Andrés Bravo 10-5

1. ¿Qué tienen en común los dos triángulos?

Tienen los mismos ángulos (θ y ángulo recto), además por sumatoria 180°, comparten un tercer ángulo).

Son reflejos, el uno del otro.

¿Qué pueden concluir acerca de los dos triángulos?

Que sus ángulos son congruentes, que la secante pasa por los dos triángulos, que las medidas de todos los lados del triángulo dependen del ángulo θ y el único ángulo que no cambia es el recto, mantiendo el Δ como rectángulo.

¿Con qué criterio lo justifica?

Con criterio A.A, porque $\measuredangle Q \cong \measuredangle A$ porque miden 90°. y, los ΔOPQ y ΔOAR comparten el ángulo θ. Por ende, los triángulos son semejantes.

¿Son proporcionales los lados respectivos?

Son proporcionales porque:

$$\frac{QP}{OP} = \frac{AR}{OR}$$

$$\frac{0,6}{1} = \frac{0,75}{1,25} \longrightarrow 0,6 = 0,6$$

$$0,75 = 0,75$$

2. $P = (0,64, 0,77)$ $\overline{QP} = 0,77$ $\overline{OQ} = 0,64$ $\overline{OP} = 1$ $R = (1, 1.2)$ $\overline{AR} = 1,2$ $\overline{OA} = 1$

$\overline{OR} = 1,56$ $\quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{0,77}{0,64} = 1,2$ $\quad \sec\theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{0,64} = 1,56.$ $\quad \theta = 50,1°.$

Act.3-Pareja 2 (Pág. 2 de 2)

Génesis - Andrés 10-5.

2. a. $m.\ AR = \dfrac{0{,}77}{0{,}64} \rightarrow \tan\theta$

$1{,}2 = 1{,}2$ R// 13 Palabras

b. $m \cdot OR = \dfrac{1}{0{,}64} \rightarrow \sec\theta$

$1{,}56 = 1{,}56$ R// 13 Palabras

c. $\dfrac{OQ}{QP} = \dfrac{OA}{AR} \rightarrow \dfrac{QP}{OQ} = \dfrac{AR}{OA}$

$\dfrac{0{,}64}{0{,}77} = \dfrac{1}{1{,}2}$ $\quad \dfrac{QP}{OQ} = \dfrac{AR}{1}.$

$\tan\theta = AR$

d. $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{OR}{OA}$

$\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{OR}{1}$

$\sec\theta = OR.$

Segunda parte.

1. $(OR)^2 = (OA)^2 + (AR)^2$

2. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

Act.3-Pareja 3 (Pág. 1 de 2)

Desarrollo

1) *¿Qué tienen en común los 2 triángulos.

R//-Siempre la medida de la amplitud de los ángulos serán congruentes.

- Que los 2 triángulos posee un ángulo rectángulo.
- Que los 2 triángulos son semejantes

*¿Qué pueden concluir acerca de los 2 triángulos?

- se puede concluir que los dos triángulos son semejantes por que sus ángulos son congruentes y sus lados proporcionales. ¿? *

Faltó

¿lados proporcionales?

*¿Con qué criterio lo justifica?

R// LAL: porque los lados OP y OR son proporcionales con los lados BA y PQ. Además de que la medida del ángulo (a) es congruentes en los dos.

2) Para cualquier ángulo agudo θ, registre la información pedida, luego responda:

θ = 36,87 P = (0,8 - 0,6) QP = 0,6 OQ = 0,8 R = (1 - 0,75)

AR = 0,75 $\overline{OA}$ = 1 OR = 1,25 Tan θ = 0,75 Sec θ = 1,25

a) ¿cómo es la medida del segmento AR con respecto al valor de la razón tangente agudo.

$\boxed{AR = \tan\theta}$

b) $\boxed{OR = \sec\theta}$

c) $\frac{PQ}{OQ} = \frac{AR}{OA} \to \tan\theta = \frac{AR}{OA} \to \tan\theta = \frac{AR}{1} \to \boxed{\tan\theta = AR}$

d) $\frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OA} \to \sec\theta = \frac{OR}{OA} \to \sec\theta = \frac{OR}{1} \to \boxed{\sec\theta = OR}$

Act.3-Pareja 3 (Pág. 2 de 2)

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ sobre el círculo unitario, se obtiene un triángulo rectángulo OAR, usando las rectas secante y tangente vertical al mismo círculo, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes del cateto fijo (OA), del cateto variable (AR) y el valor de la hipotenusa variable (OR), la fórmula quedaría:

$$(OR)^2 - (AR)^2 = 1$$

2. Así pues, de acuerdo a las respuestas **a** y **b** de la pregunta 2 en la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (Tanθ y Secθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

$$(Tan\theta)^2 - (Sec\theta)^2 = 1$$ Al revés.

Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 2, corresponde a otra de las ***"Identidades Pitagóricas"***. Como la que verificamos en la Actividad 2 de la semana anterior.

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo J. Guía taller de Actividad 4

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #4: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ______________________________ **Fecha:** __________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 4.ggb*** presenta dos triángulos rectángulos OQP y OBR, (las medidas de sus catetos son observables en las coordenadas de los P y R, respectivamente). En ellos se da la medida del ángulo agudo formado en el vértice O, que se llamará θ (en grados con dos cifras decimales). Note que el punto R está en la intersección de la recta secante (recta verde que atraviesa el círculo unitario por el punto P) con la recta tangente horizontal (recta roja que toca al círculo unitario en el punto B). Además, a la derecha, se tienen las razones trigonométricas de la cotangente (recíproca de la tangente) y la cosecante (recíproca del seno) del ángulo θ con las longitudes del triángulo OPQ. **Nota:** El único punto que permite movimiento sobre la circunferencia de radio 1, es el punto P (color azul).

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente (solo hasta máximo $\theta = 90°$). Observe lo que sucede con las partes (ángulos y lados) de los dos triángulos rectángulos presentados (OQP y OBR), y discuta con su compañero, para responder: ¿Qué tienen en común los dos triángulos? ¿Qué pueden concluir acerca de los dos triángulos? ¿Con qué criterio lo justifica? ¿Son proporcionales los lados respectivos?
2. Para cualquier ángulo agudo θ, registre la información pedida, luego responda: θ = ¿?
   P = (¿?, ¿?) QP = ¿? OQ = ¿? OP = ¿? R = (¿?, ¿?) BR = ¿? OB = ¿?
   OR = ¿? Cot θ = ¿? Csc θ = ¿?
   - **a.** ¿Cómo es la medida del segmento BR, con respecto al valor de la razón cotangente para el ángulo agudo θ?
   - **b.** ¿Cómo es la medida del segmento OR, con respecto al valor de la razón cosecante para el ángulo agudo θ?
   - **c.** Plantee una proporción con los segmentos respectivos de los triángulos OQP y OBR para demostrar lo que respondió en la pregunta **a**.
   - **d.** Plantee una proporción con los segmentos respectivos de los triángulos OQP y OBR para demostrar lo que respondió en la pregunta **b**.

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

De acuerdo a las conclusiones de la Primera Parte, analice y complete:

1. Para cualquier ángulo θ sobre el círculo unitario, se obtiene un triángulo rectángulo OBR, usando las rectas secante y tangente horizontal al mismo círculo, por lo tanto si se le aplica el teorema de Pitágoras, usando las longitudes del cateto fijo (OB), del cateto variable (BR) y el valor de la hipotenusa variable (OR), la fórmula quedaría:

   ____

2. Así pues, de acuerdo a las respuestas **a** y **b** de la pregunta 2 en la Primera Parte, usando las razones trigonométricas (Cotθ y Cscθ), la fórmula del teorema de Pitágoras se puede reescribir, quedando:

   ____

   Nota: Si respondiste en forma correcta, la fórmula que acabas de obtener en el punto 2, corresponde a otra de las ***"Identidades Pitagóricas"***. Como la que verificamos en las Actividades 2 y 3 de las semanas anteriores.

Edward Antonio Benavides R.

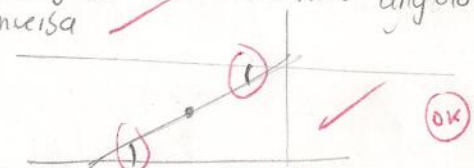
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo K. Hojas de Respuestas de Actividad 4

Act.4-Pareja 1 (Pág. 1 de 2)

① Que tienen en comun?

- Un angulo de 90° ubicado en el punto Q (ΔOPQ) y en el punto B (ΔOBR)
- Los 2 triangulos tienen el mismo angulo agudo pero proyectado a la inversa



- los 2 triangulos comparten tienen la misma linea secante

Que se concluye?

Se puede concluir que son semejantes por criterio A A porque los lados y su medida dependen directamente del angulo θ

Son proporcionales los lados?

Sí porque

$\frac{PQ}{BO} = \frac{OQ}{BR}$ Los lados son proporcionales porque los triangulos son semejantes

② $P = (0{,}84,\ 0{,}54)$

$QP = (0{,}54)$

$OQ = 0{,}84$

$\overline{OP} = 1$

$R = (1{,}57,\ 1)$

$BR = 1{,}57$

$OB = 1$

$\overline{OR} = 1{,}86$

$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ}$

$\csc\theta = \frac{OP}{PQ}$

a) $BR = 1{,}57$

$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{0{,}84}{0{,}54} = 1{,}57$

c)

$\frac{BR}{OQ} = \frac{OQ}{PQ}$

$\frac{BR}{1} = \frac{OQ}{PQ}$

$BR = 1{,}57$ $\boxed{BR = \cot\theta}$

Act.4-Pareja 1 (Pág. 2 de 2)

b) $OR = 1.86$

$\csc\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{1}{0,54} = 1,86$

d)

$\frac{OR}{OP} = \frac{OP}{PQ}$

$\frac{OR}{1} = \frac{OP}{PQ}$

$OR = 1,86$

$\boxed{OR = \csc\theta}$

Segunda parte

$OR = 1{,}86 \quad OB = 1 \quad BR = 1,57$

①

$\boxed{OR^2 = OB^2 + BR^2}$

② $(\cot\theta = 1,57)$ $(\csc\theta = 1,86)$ $OR = 1,86$

$\boxed{(\csc\theta)^2 = (\cot\theta)^2 + 1^2}$

Act.4-Pareja 2 (Pág. 1 de 2)

Génesis Mesa B. - Andrés Bravo. 10-5

1. ¿Qué tienen en común los dos triángulos?

Todos sus ángulos son iguales (θ y el recto), que la línea secante que los intersecta es su hipotenusa.

¿Qué pueden concluir acerca de los dos triángulos?

Aparentemente por uno de los criterios los triángulos son semejantes, los valores de todos los lados de los triángulos, dependen de cuánto movamos la línea secante.

¿Con qué criterio lo justifica?

Con criterio A.A, porque $\measuredangle O \cong \measuredangle R$ y el $\measuredangle Q \cong \measuredangle B$, es decir, son iguales respectivamente

¿Son proporcionales los lados respectivos?

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{BR}{BO}$$

Sí son proporcionales.

$$\frac{0{,}8}{0{,}59} = \frac{1{,}35}{1}$$

$$1{,}35 = 1{,}35$$

2. $\theta = 36{,}49°$ $P = (0{,}8 . 0{,}59)$ $QP = 0{,}59$ $OQ = 0{,}8$ $OP = 1$ $R = (1{,}35 . 1)$

$BR = 1{,}35$ $OB = 1$ $OR = 1{,}68$ $Csc\,\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{1}{0{,}59} = 1{,}68$

$Cot\,\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{0{,}8}{0{,}59} = 1{,}35.$

Act.4-Pareja 2 (Pág. 2 de 2)

2. a. $m\ BR = \frac{0,8}{0,59} \rightarrow$ ¿? $\cot\theta$

$\boxed{1,35 = 1,35}$

b. $m.\ OR = \frac{1}{0,59} \longrightarrow$ ¿? $\csc\theta$

$\boxed{1,68 = 1,68}$

c. $\frac{OQ}{PQ} = \frac{BR}{OB}$

$\cot\theta = \frac{BR}{1}$

$\boxed{\cot\theta = BR}$

d. $\frac{OP}{PQ} = \frac{OR}{BO}$

$\csc\theta = \frac{OR}{1}$

$\boxed{\csc\theta = OR}$

Segunda parte.

1) $\boxed{(OR)^2 = (OB)^2 + (BR)^2}$

2) $\boxed{\underbrace{\cot^2\theta}_{BR} = 1 + \underbrace{\csc^2\theta}_{OR}}$

OK

Act.4-Pareja 3 (Pág. 1 de 1)

1) a) ¿Qué tiene en común?

- Que todos sus angulos tiene la misma medida de amplitud
- Los 2 triangulos tiene un angulo recto
- Sus lados son proporcionales

b) ¿Que puedes concluir de los 2 triangulos?

-Son semejantes porque la medida de los ángulos correspondientes son congruentes. y sus lados respectivos son proporcionales

c) ¿Con qué critero lo justifica?

LAL porque los lados OQ y PQ son proporcionales con lados BR y OB y el ∡ O es ≅ con ∡ R

d) ¿Son proporcionales los lados respectivos?

Si, porque la razón entre los lados OQ y PQ son proporcionales con los lados BR y OB.

2. $P=(0,6-0,8)$ $QP=0,8$ $OQ=0,6$ $OP=1$ $R=(0,75-1)$ $BR=0,75$

$OB=1$ $OR=1,25$ $\cot\theta=0,75$ $\csc\theta=1,25$

a) $BR=\cot\theta$ OK

b) $OR=\csc\theta$ OK

c) $\dfrac{OQ}{PQ}=\dfrac{BR}{OB} \rightarrow \cot\theta=\dfrac{BR}{OB} \rightarrow \cot\theta=\dfrac{BR}{1} \rightarrow \boxed{\cot\theta=BR}$

d) $\dfrac{OP}{PQ}=\dfrac{OR}{OB} \rightarrow \csc\theta=\dfrac{OR}{OB} \rightarrow \csc\theta=\dfrac{OR}{1} \rightarrow \boxed{\csc\theta=OR}$

Segunda parte

(1) $\boxed{OB^2=OR^2-BR^2} \rightarrow \boxed{1=OR^2-BR^2}$

(2) $\boxed{(\csc\theta)^2-(\cot\theta)^2=1}$

Anexo L. Guía taller de Actividad 5

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #5: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ____ **Fecha:** _________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 5.ggb*** presenta dos planos cartesianos XY relacionados entre sí. En el plano cartesiano de la izquierda se tiene un círculo de radio uno (1 unidad) y se destaca un punto P sobre dicho círculo que al moverlo genera un ángulo cuya medida se ve en grados. En el plano cartesiano de la derecha se presentan cuatro separaciones iguales en el eje X cada 90° ($\pi/2$ rad), y se destaca un punto rojo que se desplaza automáticamente cuando se mueve el punto P del círculo unitario, dejando un rastro.

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente sobre el círculo unitario y analice lo que sucede con el ángulo en grados y el segmento rojo que se ve sobre el eje Y. ¿A qué razón trigonométrica corresponde la longitud de dicha línea roja?
2. Mueva el punto P hasta el ángulo de 0° (0 rad), y registre el valor del Seno:
   Sen 0°= _____.
3. Mueva el punto P hasta el ángulo de 90° ($\pi/2$ rad), y registre el valor del Seno:
   Sen 90°= _____.
4. Mueva el punto P hasta el ángulo de 180° (π rad), y registre el valor del Seno:
   Sen 180°= _____.
5. Mueva el punto P hasta el ángulo de 270° ($3\pi/2$ rad), y registre el valor del Seno:
   Sen 270°= _____.
6. Mueva el punto P hasta el ángulo de 360° (2π rad), y registre el valor del Seno:
   Sen 360°= _____.

7. ¿Qué sucede en el plano cartesiano de la derecha a medida que se van haciendo los movimientos en el punto P del círculo unitario? Describa lo que observa.

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

El plano cartesiano de la derecha presenta la gráfica de la función trigonométrica seno, en la que se tiene como variable independiente sobre el eje X los valores de los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el círculo unitario (estos valores están entre 0° y 360°), y la variable dependiente sobre el eje Y son las medidas del segmento rojo. A continuación vamos a analizar las características de la función seno de acuerdo a lo que se observa en su curva trazada:

1. Observe la curva que se forma con el rastro del punto rojo en el plano cartesiano de la derecha, ¿la curva siempre es continúa?
2. El ***dominio*** de una función se determina por los valores en el eje X en los cuales la función existe. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el dominio de la función seno?
3. Se dice que un punto es un **máximo** cuando es el más alto en una curva, y que es un **mínimo** si es el más bajo. Escriba las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo para la función seno.
4. El ***rango*** de una función se determina tomando los valores del eje Y en los cuales la función abarca desde su punto más bajo hasta el más alto. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el rango de la función seno?
5. Una función es ***creciente*** si de izquierda a derecha se observa que su gráfica va subiendo, y se dice que es ***decreciente*** si de izquierda a derecha la curva va hacia abajo. Observe la gráfica y responda: ¿En qué intervalos la función seno es creciente y en cuál es decreciente?
6. Un plano cartesiano se divide en cuatro zonas por los ejes XY, cada zona se denomina ***cuadrante*** y estos también se pueden definir de acuerdo a los ángulos: Cuadrante I (0°-90°), Cuadrante II (90° - 180°), Cuadrante III (180° - 270°) y Cuadrante IV (270° - 360°). ¿En qué cuadrantes la función seno tiene valores positivos? ¿En qué cuadrantes la función seno tiene valores negativos?
7. El ***periodo*** de una función trigonométrica es el valor en el eje x, iniciando desde el origen (0,0), en el que se vuelve a repetir la misma gráfica. ¿Cuál es el periodo de la función seno?

Edward Antonio Benavides R.

Lic. en Matemáticas y Física

Anexo M. Hojas de Respuestas de Actividad 5

Act.5-Pareja 1 (Pág. 1 de 1)

1) A qué razon trigonometrica corresponde la longitud de la linea, ge?
- Sen

7) Se forma un rastro en el plano XY

- Empieza en "0", cada que recorre 2 cuadrantes vuelve a valor "0"
- Recorre desde 0° hasta 360°
- Como el circulo unitario tiene de radio 1, la altura maxima que se registra en el plano es 1 y siempre ocurre cuando el punto "p" esta alineado en el eje Y del circulo unitario

OK

Segunda parte

1) La curva es continua? Es continua porque cada 180° hay una curva que continua con igual medida la que le precede

2) Dominio: Todos los numeros reales = $x \in \mathbb{R}$

3) $P_M = \{ 1 \}$ $P_m = \{ -1 \}$ Mala notación

4) Rango $\{ 1, -1 \}$ en el plano Mala notación.

5) 0° - 90° Creciente 90° - 270° Decreciente 270° - 360° Creciente

6) Cuadrante 1 y 2 positivos | Cuadrantes 3 y 4 Negativos

7) Periodo = 2π = 2π rad

Michelle Galeano
Nikolas Andrade
10-5

Act.5-Pareja 2 (Pág. 1 de 1)

Génesis Mesa - Andrés Bravo 10-5 11/05/19

1. A medida que aumentan los grados, se traza una función cuya razón trigonométrica es seno.

2. 0 → sen 0°

3. 1 → sen 90°

4. 0 → sen 180°

5. -1 → sen 270°

6. 0 → sen 360°

7. Se va trazando una recta con respecto a los ángulos, su altura es la misma (entre la gráfica y los ángulos), la gráfica va de 0 a 1 y desciende hasta -1, termina en 0.

Segunda parte:

1. Es continua de 0° a 360°, y se repite constantemente ¿?

2. El dominio de seno va desde 0° a 360°

3. Punto máximo: 1. Punto mínimo -1. Por el círculo unitario. ¿Coordenadas?

4. El rango de la función se encuentra desde -1 a 1.

5. de 0 a 90°; la función es creciente, de 90° a 270° la función es decreciente, y de 270° a 360°, es creciente.

6. En los cuadrantes 1 y 2, la función tiene valores positivos y en los cuadrantes 3 y 4 la función tiene valores negativos. (Función seno)

7. El "período" de una función trigonométrica es el intervalo del eje X, donde se vuelve a repetir la gráfica, ¿Cuál es el período de la función seno?

Período = 360° = 2π rad

Act.5-Pareja 3 (Pág. 1 de 1)

Desarrollo

Ricardo Pabón Serna
Santiago giraldo 10-5

1. R// El segmento rojo pertenece a la razoó trigonometrica seno.

2. R// Este va generando una Funcioó creciente en los cuadrantes I y IV y decreciente en los cuadrantes II y III, en donde el eje X son los ángulos que se generan del punto P sobre el circulo unitario y el eje "y", los valores del segmento rojo.

Segunda Parte

1. Si, porque está se repite constatemente cada vez que se le de una vuelta al circulo unitario

2. El domino son todos los valores de los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el circulo unitario

Dominio = Valores de los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el circulo unitario

3. El punto maximo es $(90°, 1)$ equivalente a $(\pi/2, 1)$ y el punto más bajo $(270, -1)$ equivalente a $\frac{3\pi}{2}$

4. El rango de la Función seno son todos los valores que puede tener el segmento rojo en el circulo unitario. Rango = Valores del segmento rojo

→ Falta formalizar.

5. La Función es:

- Decreciente en los cuadrantes II y III
- Creciente en los cuadrantes I y IV

¿Intervalos?

6. La Función es positiva en el cuadrante I y II, negativa III y IV

7. El "Periodo" de una Función trigonometrica es el intervalo del eje X donde se vuelve a repetir la grafica. ¿Cuál es el periodo función seno?

Periodo = $\boxed{360°}$ = $\boxed{2\pi}$ rad

Anexo N. Guía taller de Actividad 6

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #6: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ______________________________ **Fecha:** __________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 6.ggb*** presenta dos planos cartesianos XY relacionados entre sí. En el plano cartesiano de la izquierda se tiene un círculo de radio uno (1 unidad) y se destaca un punto P sobre dicho círculo que al moverlo genera un ángulo cuya medida se ve en grados. En el plano cartesiano de la derecha se presentan cuatro separaciones iguales en el eje X cada 90° ($\pi/2$ rad), y se destaca un punto azul que se desplaza automáticamente cuando se mueve el punto P del círculo unitario, dejando un rastro.

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente sobre el círculo unitario y analice lo que sucede con el ángulo en grados y el segmento azul que se ve sobre el eje X. ¿A qué razón trigonométrica corresponde la longitud de dicha línea azul?
2. Mueva el punto P hasta el ángulo de 0° (0 rad), y registre el valor del Coseno:
   Cos 0°= _____.
3. Mueva el punto P hasta el ángulo de 90° ($\pi/2$ rad), y registre el valor del Coseno:
   Cos 90°= _____.
4. Mueva el punto P hasta el ángulo de 180° (π rad), y registre el valor del Coseno:
   Cos 180°= _____.
5. Mueva el punto P hasta el ángulo de 270° ($3\pi/2$ rad), y registre el valor del Coseno:
   Cos 270°= _____.
6. Mueva el punto P hasta el ángulo de 360° (2π rad), y registre el valor del Coseno:
   Cos 360°= _____.

7. ¿Qué sucede en el plano cartesiano de la derecha a medida que se van haciendo los movimientos en el punto P del círculo unitario? Describa lo que observa.

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

El plano cartesiano de la derecha presenta la gráfica de la función trigonométrica coseno, en la que se tiene como variable independiente sobre el eje X los valores de los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el círculo unitario (estos valores están entre 0° y 360°), y la variable dependiente sobre el eje Y son las medidas del segmento azul. A continuación vamos a analizar las características de la función coseno de acuerdo a lo que se observa en su curva trazada:

1. Observe la curva que se forma con el rastro del punto azul en el plano cartesiano de la derecha, ¿la curva siempre es continúa?
2. El ***dominio*** de una función se determina por los valores en el eje X en los cuales la función existe. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el dominio de la función coseno?
3. Se dice que un punto es un **máximo** cuando es el más alto en una curva, y que es un **mínimo** si es el más bajo. Escriba las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo para la función coseno.
4. El ***rango*** de una función se determina tomando los valores del eje Y en los cuales la función abarca desde su punto más bajo hasta el más alto. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el rango de la función coseno?
5. Una función es **creciente** si de izquierda a derecha se observa que su gráfica va subiendo, y se dice que es **decreciente** si de izquierda a derecha la curva va hacia abajo. Observe la gráfica y responda: ¿En qué intervalos la función coseno es creciente y en cuál es decreciente?
6. Un plano cartesiano se divide en cuatro zonas por los ejes XY, cada zona se denomina ***cuadrante*** y estos también se pueden definir de acuerdo a los ángulos: Cuadrante I (0°- 90°), Cuadrante II (90° - 180°), Cuadrante III (180° - 270°) y Cuadrante IV (270° - 360°). ¿En qué cuadrantes la función coseno tiene valores positivos? ¿En qué cuadrantes la función coseno tiene valores negativos?
7. El ***periodo*** de una función trigonométrica es el valor en el eje x, en el que se vuelve a repetir la misma gráfica. ¿Cuál es el periodo de la función coseno?

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo O. Hojas de Respuestas de Actividad 6

Act.6-Pareja 1 (Pág. 1 de 1)

1) Coseno

7) En el plano cartesiano de la derecha la grafica presenta la grafica de la función trigonometrica coseno. plano XY. se genera del giro el circulo unitario

- En el eje X se puede observar que va de 0° a 360° ¿ES?
- En el eje Y desde 1 a -1
- La forma del rastro que se dibuja es una curva.

Segunda parte

1) la curva siempre es continua? Se puede decir que si es continua porque siempre que se repita la funcion va a empezar y terminar en el mismo punto

2) Dominio = IR (Reales)

3) $P_M = \{1\}$ $P_m = \{-1\}$

[Como el radio del circulo unitario es 1 el valor maximo siempre sera 1 y el valor minimo siempre sera -1]

OK

4) Rango $\{1, -1\}$

Mala notación.

5)

0° – 180°	180° – 360°
Decreciente	Creciente

Michelle Galeano
10-5
Nikolas Andrade

6)

Cuadrante 1 y 4	Cuadrante 2 y 3
positivo	negativo

7) El periodo de una funcion trigonometrica es el intervalo del eje x donde se vuelve a repetir la grafica
Cúal es el periodo de la funcion coseno?

Periodo = 0°-360° = 2π rad

Act.6-Pareja 2 (Pág. 1 de 1)

PRIMERA PARTE

1. Sabemos que es coseno ya que el cateto que hace que varíe los valores en el plano es el adyacente al ángulo θ

$\cos\theta = \frac{ca}{h}$

El ángulo al comenzar el movimiento tiene como referencia 0° hasta 360° Dependiendo de el valor que tome el ángulo así mismo va aumentar o disminuir el cateto adyacente

OK

7. A medida que movemos el punto por el cuadrante 1 y 2 es decir 0 hasta π rad tiene un movimiento decreciente en el plano y en el cuadrante 3 y 4 tiene un movimiento creciente en el plano

* 0 hasta π/2 tenemos un valor positivo sobre el eje x al igual que 3π/2 hasta 2π

* π/2 hasta π tenemos un valor negativo sobre el eje x al igual que π hasta 3π/2

"se adelantan"

SEGUNDA PARTE

1. Es continua porque se repite cada 2π periodo

2. Dom (f) = ∈ y IR Mal escrito.

3. Pmin (−1), que se encuentra en el plano cartesiano en π

Pmax (1), que se encuentra en el plano cartesiano en 2π

4. Ran (f) = [−1, 1]

Bien escrito Intervalos.

5. Creciente [π, 2π]

Decreciente [0, π]

6. Cuadrante 1 [0, π]. Cuadrante 4 [3π/2, 2π] - Valores positivos

Cuadrante 2 [π/2, π]. Cuadrante 3 [π, 3π/2] - Valores negativos

7. Periodo = 2π ¿rad?

Act.6-Pareja 3 (Pág. 1 de 1)

1, $F(x) = \cos x$

7, A medida que el punto P es movido en el circulo unitario (entre los valores 0 y 2π) este en el plano cartesiano en relacion con los ejes X y Y van tomando valores que decrecen de 1 a -1 en los cuadrantes I y II y que crecen de -1 a 1 en los cuadrantes III y IV.

* se adelantan.

Segunda Parte

1, Es continua por que esta se prolonga periodicamente en la recta del eje X sin ser cortada en ningun punto. OK

2, Dom(cos): $X \in \mathbb{R}$

3, Las coordenadas del punto maximo es $(2\pi n, 1)$ y del punto minimo es $(\pi n, -1)$

4, Ran (cos): $Y \in [1, -1]$

5, Decrecen en los cuadrante I y II
crecíente en los cuadrantes III y IV

¿Intervalos?

6, En los cuadrantes de la Función I y IV toma valores positivos mientras que en los cuadrantes II y III toma valores negativos

7, $P = 2\pi$ rad

Anexo P. Guía taller de Actividad 7

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 1 de 2	LD-FR-108	

ACTIVIDAD #7: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

MATEMÁTICAS, GRADO 10° - ___ . PERÍODO III – 2019

Estudiantes: ____ **Fecha:** _________

____

PRIMERA PARTE

El archivo Geogebra ***Actividad 7.ggb*** presenta dos planos cartesianos XY relacionados entre sí. En el plano cartesiano de la izquierda se tiene un círculo de radio uno (1 unidad) y se destaca un punto P sobre dicho círculo que al moverlo genera un ángulo cuya medida se ve en grados. En el plano cartesiano de la derecha se presentan cuatro separaciones iguales en el eje X cada 90° ($\pi/2$ rad), y se destaca un punto violeta que se desplaza automáticamente cuando se mueve el punto P del círculo unitario, dejando un rastro.

Siga las instrucciones y responda las preguntas:

1. Con el puntero del mouse seleccione el punto P y muévalo libremente sobre el círculo unitario y analice lo que sucede con el ángulo en grados y el segmento violeta que se ve sobre la recta punteada (tangente al círculo). ¿A qué razón trigonométrica corresponde la longitud de dicha línea violeta?
2. Mueva el punto P hasta el ángulo de 0° (0 rad), y registre el valor de la Tangente: Tan 0°= _____.
3. Mueva el punto P hasta el ángulo de 90° ($\pi/2$ rad), y registre el valor de la Tangente: Tan 90°= _____.
4. Mueva el punto P hasta el ángulo de 180° (π rad), y registre el valor de la Tangente: Tan 180°= _____.
5. Mueva el punto P hasta el ángulo de 270° ($3\pi/2$ rad), y registre el valor de la Tangente: Tan 270°= _____.
6. Mueva el punto P hasta el ángulo de 360° (2π rad), y registre el valor de la Tangente: Tan 360°= _____.
7. ¿Qué sucede en el plano cartesiano de la derecha a medida que se van haciendo los movimientos en el punto P del círculo unitario? Describa lo que observa.

SANTIAGO DE CALI	GUÍAS, TALLERES, EXÁMENES				LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión 01	Fecha formato: 08/01/2014	Página 2 de 2	LD-FR-108	

SEGUNDA PARTE

El plano cartesiano de la derecha presenta la gráfica de la función trigonométrica tangente, en la que se tiene como variable independiente sobre el eje X los valores de los ángulos que se generan al girar el punto P sobre el círculo unitario (estos valores están entre 0° y 360°), y la variable dependiente sobre el eje Y son las medidas del segmento violeta. A continuación vamos a analizar las características de la función tangente de acuerdo a lo que se observa en su curva trazada:

1. Observe la curva que se forma con el rastro del punto violeta en el plano cartesiano de la derecha, ¿la curva siempre es continúa?
2. El ***dominio*** de una función se determina por los valores en el eje X en los cuales la función existe. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el dominio de la función tangente?
3. Se dice que un punto es un **máximo** cuando es el más alto en una curva, y que es un **mínimo** si es el más bajo. ¿Es posible determinar un punto máximo y un punto mínimo en la función tangente? Explique.
4. El ***rango*** de una función se determina tomando los valores del eje Y en los cuales la función abarca desde su punto más bajo hasta el más alto. De acuerdo a la respuesta anterior ¿cuál es el rango de la función seno?
5. Una función es **creciente** si de izquierda a derecha se observa que su gráfica va subiendo, y se dice que es **decreciente** si de izquierda a derecha la curva va hacia abajo. Observe la gráfica y responda: ¿En qué intervalos la función tangente es creciente o decreciente?
6. Un plano cartesiano se divide en cuatro zonas por los ejes XY, cada zona se denomina ***cuadrante*** y estos también se pueden definir de acuerdo a los ángulos: Cuadrante I (0°-90°), Cuadrante II (90° - 180°), Cuadrante III (180° - 270°) y Cuadrante IV (270° - 360°). ¿En qué cuadrantes la función tangente tiene valores positivos? ¿En qué cuadrantes la función tangente tiene valores negativos?
7. El ***periodo*** de una función trigonométrica es el valor en el eje x, en el que se vuelve a repetir la misma gráfica. ¿Cuál es el periodo de la función tangente?

Edward Antonio Benavides R.
Lic. en Matemáticas y Física

Anexo Q. Hojas de Respuestas de Actividad 7

Act.7-Pareja 1 (Pág. 1 de 2)

Primera parte

① Razon trigonometrica tangente

② Qué se ve?

Se puede notar que la grafica no es continua porque se corta en ciertas partes

En 90° y 270° la funcion se sale del dominio

OK

¿Relacion de linea con curva?

Segunda parte

• 1) La curva no es continua, cada 90° la funcion "se sale del domino" y da la impresion de que se corta las curvas

• Dominio

La funcion se puede dividir en 3 partes

OK Pero no formularon..

La primera curva de la funcion en el primer cuadrante y su dominio vendria siendo $D=\{0\,rad, \frac{\pi}{2}\,rad\}$

La segunda se ubica en el cuadrante 2 y 3 y su dominio seria

$D=\{\frac{\pi}{2}\,rad, \frac{3\pi}{2}\,rad\}$

teniendo en centa que sale del dominio en el punto $\frac{\pi}{2}$ rad

La tercera parte que se ubica en el cuadrante 4. Su dominio seria

$D=\{\frac{3\pi}{2}\,rad, 2\pi\,rad\}$

Teniendo en centa que en el punto $\frac{3\pi}{2}$ rad el dominio sale de la grafica

• Punto maximo y punto minimo:

No se pueden determinar porque la grafica sale de su dominio positiva y negativamente por eso no se puede establecer un punto minimo y maximo de la funcion

(E3)

Act.7-Pareja 1 (Pág. 2 de 2)

Rango

Rango = $\{\infty, -\infty\}$ mal escrito

Rango = $y \in \mathbb{R}$

⑤ Siempre es creciente porque aunque en los puntos $\frac{\pi}{2}$ rad y $\frac{3\pi}{2}$ rad la funcion salga de su dominio su curva siempre es creciente.

⑥

Positivos cuadrante I y III

Negativos cuadrantes II y IV

⑦ $P = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

Periodo $= \frac{\pi}{2}$ rad

ok

Act.7-Pareja 2 (Pág. 1 de 1)

20/nov/2014/ 10-5 Veronica Daza - Bravo Andres

1 La longitud de dicha linea violeta corresponde a la razón trigonometrica Tangente

2. Tan 0° = 0

3 Tan 90 = ∞

4 Tan 180 = 0

5 Tan 270 = -∞

6 Tan 360 = 0

7 A medida que se van haciendo los movimentos en el punto p del circulo unitario, en el plano cartesiano de la derecha se observa que se trazan lineas en forma curveada y ascendente

Segunda Parte

1. La curva es discontinua ya que se corta.

2. Dom (Tan) = x ∈ R
= x ∈ (-∞, ∞)

3 Punto máximo = ∞
Punto minimo = -∞

× mal escrito

4 Ran (Tan) = y ∈ [-∞, ∞]

5. Es creciente en todos los intervalos

6. En los cuadrantes I, III la función tiene valores positivos
En los cuadrantes II y IV la funcion tiene valores negativos

7 Se repite cada π

Act.7-Pareja 3 (Pág. 1 de 1)

Santiago Giraldo y Ricardo Pabón Serna

Desarrollo

1. A la razón trigonométrica que le corresponde es Tan(X)

7. R// Se genera una Función discontinua que es positiva en los cuadrantes I y III y que es negativa en los cuadrantes II y IV, además tiene una Asíntota en los multiplos impares de $\pi/2$.

Segundo parte

1 No, es discontinua. Pues esta es hecha por ∞ trazos ¿? Se adelantan

2. Dom(TanX) = $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\right)$ Mal escrito. OK

3. No. Por qué está se extiende infinitamente cada vez que llega a multiplos impares de $\pi/2$

4. Ran(Tan) = $(-\infty, \infty)$

5. Es creciente en Todos los cuadrantes del Plano cartesiano que contiene el círculo unitario.

6. Valores positivos: cuadrantes I y III
Valores negativo cuadrantes II y IV

7. $P = \pi$ rad.

UNIVERSIDAD ICESI