Taller #1

Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Mauricio Alejandro Arcos
Stephanie Vergara Rojas

Notas:
- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 24 de Enero.

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

Un grupo de jóvenes se reunió para celebrar los 10 años de su graduación del colegio. Para ambientar la reunión, uno de ellos (que había estudiado estadística) les propuso un juego en donde además de utilizar un dado y una moneda, se incluyera la posibilidad de que lloviera o no (según el IDEAM existe una probabilidad de ¼ de que llueva). Igualmente, se ofrece a cada voluntario las siguientes tablas de premios:

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	-5
3	8
4	-11
5	14
6	-17

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	5
Sello	10

Si	Remuneración (miles de pesos)
está Lloviendo	10
No está lloviendo	2

Sea X, Y y Z los ingresos recibidos por el voluntario por el resultado del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente.

1. A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas
   a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.
   b. Calcule la varianza de X, Y y Z.
2. Sea $W = X + Y$, entonces:
   a. calcule: $Var[W]$, $Cov[W,Z]$
   b. Sea $Q = ZY$, calcule: $Var[Q]$.
3. Continuando con el ejercicio anterior,

   a. ¿Son W^2 y W independientes?
   b. ¿Son Q y W independientes?

4. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

   Encuentre (muestre todo el procedimiento):

   a) AB, DC, CB, AD.
   b) $A^T A$ y $B^T B$
   c) $tr(A)$ y $ran(A)$
5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre
   a) $\det(CB)$
   b) det (D)
   c) A+D y B+C
   d) A^{-1}, $\left[B^T B\right]^{-1}$ y C^{-1}

Taller #1

Respuestas Sugeridas
Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Mauricio Alejandro Arcos
Stephanie Vergara Rojas

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 24 de Enero.

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

Un grupo de jóvenes se reunió para celebrar los 10 años de su graduación del colegio. Para ambientar la reunión, uno de ellos (que había estudiado estadística) les propuso un juego en donde además de utilizar un dado y una moneda, se incluyera la posibilidad de que lloviera o no (según el IDEAM existe una probabilidad de ¼ de que llueva). Igualmente, se ofrece a cada voluntario las siguientes tablas de premios:

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	-5
3	8
4	-11
5	14
6	-17

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	5
Sello	10

Si	Remuneración (miles de pesos)
está Lloviendo	10
No está lloviendo	2

Sea X, Y y Z los ingresos recibidos por el voluntario por el resultado del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente.

1. A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas
   a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, tenemos que:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_iP(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}X_i=-\frac{9}{6}=-1.5$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}Y_iP(Y_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{15}{2}=7.5$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}Z_iP(Z_i)=\frac{10}{4}+\frac{6}{4}=\frac{16}{4}=4$$

Así, se espera que el voluntario reciba en promedio -1500, 7500 y 4000 pesos por concepto del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente

b. Calcule la varianza de X, Y y Z.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E[A^2]-[E[A]]^2$, tenemos que:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{233}{2}-\frac{9}{4}=\frac{457}{4}=114{,}25$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{125}{2}-\frac{225}{4}=\frac{25}{4}=6{,}25$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=28-16=12$$

2. Sea $W=X+Y$, entonces:
   a. calcule: $Var[W]$, $Cov[W,Z]$

Empleando las propiedades de la varianza y el hecho de que X y Y son estadísticamente independientes[1], entonces tenemos:

$$Var[W]=Var[X+Y]=Var(X)+Var(Y)=\frac{457}{4}+\frac{25}{4}=\frac{241}{2}=120{,}5$$

Para hallar la $Cov[W,Z]$, se debe tener en cuenta que W y Z son variables independientes, dado que lo que ocurra con las variables X y Y es independiente del clima (Z), por lo tanto:

$$Cov[W,Z]=E(WZ)-E(W)E(Z)=0$$

b. Sea $Q=ZY$, calcule: $Var[Q]$.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E[A^2]-[E[A]]^2$, tenemos que:

$$Var(Q)=E(Q^2)-(E(Q))^2=[E(Z^2)E(Y^2)]-[E(Z)E(Y)]^2=\frac{3500}{2}-[30]^2=850$$

3. Continuando con el ejercicio anterior,

[1] Es muy fácil demostrar esto, pero intuitivamente es fácil argumentar que el resultado de un dado no depende para nada del resultado de una moneda.

a. ¿Son W^2 y W independientes?

W^2 y W son independientes si y sólo si $E(W^2W)=E(W^2)*E(W)$. Así, debemos probar si esto es cierto. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(W^2W)=E(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)$$
$$E(W^2W)=E(X^3)+3E(X^2)*E(Y)+3E(X)*E(Y^2)+E(Y^3)$$
$$E(W^2W)=2385$$

Ahora veamos a qué es igual el lado derecho:

$$E(W^2)*E(W)=E\left[(X+Y)^2\right]*E(X+Y)$$
$$E(W^2)*E(W)=\left[E(X^2)+2E(X)*E(Y)+E(Y^2)\right]*\left[E(X)+E(Y)\right]$$
$$E(W^2)*E(W)=\frac{313}{2}\cdot 6=939$$

Por lo tanto, $E(W^2W)\neq E(W^2)*E(W)$ y se concluye que W^2 y W no son independientes.

b. ¿Son Q y W independientes?

Similarmente, Q y W son independientes si y solamente si $E(QW)=E(Q)*E(W)$. Consideremos inicialmente el lado izquierdo, es decir

$$E(QW)=E\left[Q(X+Y)\right]=E(QX)+E(QY)$$
$$E(QW)=-45+250=205$$

Ahora el lado derecho:

$$E(Q)*E(W)=30*6=180$$

De esta forma se puede notar que $E(QW)\neq E(Q)*E(W)$, por lo tanto Q y W no son independientes.

4. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4\\5&9&2\\8&1&10\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}7\\4\\2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}4&10&6\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}11&6&4\\10&5&2\\7&9&3\end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a) AB, DC, CB, AD.

$$AB=\begin{bmatrix}27\\75\\80\end{bmatrix}$$ *DC* no es conformable $$CB=\begin{bmatrix}80\end{bmatrix}$$

$$AD=\begin{bmatrix}69&57&22\\159&93&44\\168&143&64\end{bmatrix}$$

b) A^TA y B^TB

$$A^TA=\begin{bmatrix}90&56&94\\56&91&40\\94&40&120\end{bmatrix}\qquad B^TB=\begin{bmatrix}69\end{bmatrix}$$

c) $tr(A)$ y $ran(A)$

$$tr(A)=1+9+10=20$$

$ran(A)=3$, pues el $ran(A)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn, existen n valores propios). Además $|A|\neq 0$, es decir que A tiene rango completo, es decir $ran(A)=3$.

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) $\det(CB)$

$$\det CB=\begin{bmatrix}80\end{bmatrix}$$

b) Det (D)

$$\det D=\begin{bmatrix}91\end{bmatrix}$$

c) A+D y B+C

$$A+D=\begin{bmatrix}12 & 9 & 8\\ 15 & 14 & 4\\ 15 & 10 & 13\end{bmatrix}$$

$B+C$ no es conformable.

d) A^{-1}, $\left[B^{T}B\right]^{-1}$ y C^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-0.3121 & 0.09219 & 0.10638\\ 0.12567 & 0.07480 & -0.06383\\ 0.23759 & -0.08156 & 0.02127\end{bmatrix}$$

$$\left[B^{T}B\right]^{-1}=\left[\frac{1}{69}\right]$$

C^{-1} No se puede hallar.