# Taller 1: Repaso álgebra matricial y estadística
# Econometría 06216

17-01-2011

**Profesores**: Julio César Alonso.

**Monitoras**: Sasha Magyaroff - Carolina Restrepo.

**Notas:**

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller deberá ser entregado de manera física durante los 10 primeros minutos de clase.

**Instrucciones:**

- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo grupal. Sólo se admiten grupos de dos personas, y por lo tanto debe reflejar tan sólo el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con todos ellos.
- Este taller debe ser escrito a mano con letra clara.

## Pregunta 1

Una gran firma controla cinco fabricas; fábricas: a, b, c, d y e. Los ingresos y egresos de cada una de las fábricas están dados por las columnas de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} bien\,1 \\ bien\,2 \\ bien\,3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

La primera columna corresponde a la fábrica a, la segunda a la fábrica b y así sucesivamente. Por otro parte, para cada fábrica, los insumos se registran con valores negativos y la producción con valores positivos. Además, el precio de los tres bienes está dado por:

$$\begin{array}{c} bien\,1 \\ bien\,2 \\ bien\,3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

***1.1.*** Empleando álgebra matricial, encuentre el beneficio total de la firma. Explique claramente las operaciones matriciales que emplea y muestre todos los cálculos que realiza.

***1.2.*** El profesor de álgebra matricial dio la oportunidad a sus estudiantes de obtener una décima más en el examen parcial de su materia para aquel que descifre el mensaje escondido en la guía de talleres; el mensaje oculto se puede descifrar empleando la siguiente matriz de "encriptación":

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

El mensaje escondido en la guía del taller es:
$19, 10, 15, 6, 25, 9, -7, 18, -11, -10, 2, 19, 16, \ -1, -4, 11, -12, -18, 11, -6, 7, 13, -17, -10, -1,$
$-4, 8, 19, 59, -28, -21, -6, 43, 34, 34$

Adicionalmente se cuenta con la siguiente información:

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow 1 & j \rightarrow 11 & s \rightarrow 4 \\ b \rightarrow -5 & k \rightarrow -10 & t \rightarrow 5 \\ c \rightarrow -1 & l \rightarrow 9 & u \rightarrow -4 \\ d \rightarrow 10 & m \rightarrow 6 & v \rightarrow -7 \\ e \rightarrow 3 & n \rightarrow 7 & w \rightarrow 13 \\ f \rightarrow 15 & o \rightarrow 8 & x \rightarrow -15 \\ g \rightarrow 2 & p \rightarrow -8 & y \rightarrow -11 \\ h \rightarrow -13 & q \rightarrow -3 & z \rightarrow 12 \\ i \rightarrow -2 & r \rightarrow -6 & espacio \rightarrow 0 \end{array}$$

Encuentre el mensaje escondido y muestre todos sus cálculos.

# Pregunta 2

Sea $X$ la variable aleatoria que representa la longitud de una conversación telefónica. Un práctica muy común es asumiendo que la distribución de $X$ viene dada por:

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \tag{1}$$

para $X \geq 0$ y $F_x = 0$ para $X < 0$. Donde $\lambda$ es un número positivo. La función de densidad de probabilidad correspondiente estaría dada por

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{2}$$

para $X \geq 0$ y $f_x = 0$ para $X < 0$. A partir de la información anterior responda a la siguiente pregunta:
***2.1*** Si se asume que las conversaciones telefónicas están medidas en minutos, encuentre la probabilidad de que X esté entre 5 y 10.

***2.2*** Ahora suponga que

$$F_X(x) = \left(1 - pe^{-\lambda x}\right)$$

para $X \geq 0$ y $F_x = 0$ para $X < 0$. Encuentre la media de X.

# Pregunta 3

Mauricio cuenta con un portafolio cuyo valor inicial es de 300 dólares. Adicionalmente se tiene que dicho portafolio está distribuido de tal manera que el activo a representa el 30% del portafolio y el activo b el 25%
Sea A la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos del portafolio:

$$A = \operatorname{cov}(x) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.02 & 0.03 \\ 0.1 & 0.03 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Además la matriz B ilustra los rendimientos medios de los activos que componen el portafolio:

$$B = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

***3.1*** Encuentre, si es posible, la varianza del rendimiento del portafolio.

***3.2*** Encuentre, si es posible, el rendimiento promedio del portafolio.
***3.3*** Encuentre, si es posible, la correlación del portafolio.

# Pregunta 4

El equipo que representará a una república caribeña en el campeonato mundial de tenis de mesa está compuesto por dos jugadores. Cada jugador puede obtener 0, 1 o 2 puntos. El jugador 1 tiene una probabilidad de 0.2 de ganar 0 puntos, 0.5 de obtener 1 punto, y 0.3 de tener 2 puntos. Por su parte, las probabilidades asociadas al jugador dos son de 0.1, 0.4 y 0.5. $x_1$ denota cualquier posible puntaje obtenido por el jugador 1, y $f(x_1)$ la probabilidad de obtener un puntaje determinado. De igual forma $x_2$ representa cualquier puntaje que pueda obtener el jugador 2, y $f(x_2)$ la probabilidad asociada a dicho evento.

***4.1*** Halle la distribución conjunta de los puntajes de estos dos jugadores de tenis de mesa, asumiendo que el desempeño de cada uno de los jugadores no depende del rendimiento del otro.

***4.2*** Suponiendo que el puntaje de cada equipo resulta de sumar los puntos individuales que obtiene cada jugador, encuentre la distribución de los puntajes del equipo.

# Pregunta 5

A partir de la información suministrada responda a las siguientes preguntas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 1/2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1/2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 12 \\ 9 & 0 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

***5.1*** Calcule el determinante de A.

***5.2*** Calcule la inversa de A. Hágalo mediante el método de cofactores y por reducción de Gauss Jordan.
***5.3*** Calcule el rango de A.

***5.4*** Calcule AB.

# Pregunta 6

***6.1*** Uno de los principales indicadores del servicio de calidad de una empresa, es la rapidez con la que se da respuesta a las quejas de los clientes. Comercial logística es una gran firma familiar que se dedica al almacenamiento de vehículos, y que en los últimos años ha experimentado un gran crecimiento. El año pasado se presentaron 50 quejas relacionadas con la demora en la entrega de los vehículos. Los siguientes datos representan el número de días que pasaron desde que se recibió la queja hasta que ésta se soluciona. Adicionalmente, la empresa ha establecido que su tiempo óptimo de respuesta es de 20 días, para lo cuál implementó una serie de medidas que ayuden a cumplir su meta. No obstante, el jefe de la firma, no está muy seguro de que dichas medidas sean efectivas. Responda a la siguiente pregunta utilizando los datos que se presentan a continuación:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 5 | 35 | 137 | 31 | 27 | 152 | 2 | 123 | 81 |
| 74 | 27 | 11 | 19 | 126 | 110 | 110 | 29 | 61 | 35 |
| 94 | 31 | 26 | 5 | 12 | 4 | 165 | 32 | 29 | 28 |
| 29 | 26 | 25 | 1 | 14 | 13 | 13 | 10 | 5 | 27 |
| 4 | 52 | 30 | 22 | 36 | 26 | 20 | 23 | 33 | 68 |

¿Cree usted que el proyecto de mejoramiento de calidad fue exitoso? (para ello use un nivel de significancia del 5%.

***6.2*** Si se sabe que $Var(X) = 144$, $Var(Y) = 64$, y $\rho(X, Y) = \frac{1}{4}$ encuentre $Var(X + Y)$ y $Var(2X + Y + 5)$.

# Taller 1: Repaso álgebra matricial y estadística
# Econometría 06216
# Respuestas sugeridas

17-01-2011

**Profesores**: Julio César Alonso.

**Monitoras**: Sasha Magyaroff - Carolina Restrepo.

**Notas:**

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller deberá ser entregado de manera física durante los 10 primeros minutos de clase.

**Instrucciones:**

- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo grupal. Sólo se admiten grupos de dos personas, y por lo tanto debe reflejar tan sólo el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con todos ellos.
- Este taller debe ser escrito a mano con letra clara.

## Pregunta 1

Una gran firma controla cinco fabricas; fábricas: a, b, c, d y e. Los ingresos y egresos de cada una de las fábricas están dados por las columnas de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} bien\,1 \\ bien\,2 \\ bien\,3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

La primera columna corresponde a la fábrica a, la segunda a la fábrica b y así sucesivamente. Por otro parte, para cada fábrica, los insumos se registran con valores negativos y la producción con valores positivos. Además, el precio de los tres bienes está dado por:

$$\begin{array}{c} bien\,1 \\ bien\,2 \\ bien\,3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

***1.1.*** Empleando álgebra matricial, encuentre el beneficio total de la firma. Explique claramente las operaciones matriciales que emplea y muestre todos los cálculos que realiza.

Sea p el vector que representa el precio de los bienes, y A la matriz de dimensiones 3 por 5. Para obtener el beneficio total de la firma se procede a multiplicar la matriz A por el vector de los precios; no obstante para poder hacer dicha multiplicación, las matrices deben ser conformables, por lo que se transpone el vector de los precios, obteniendo así el siguiente vector fila:

$$p^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Entonces multiplicando dicho vector por la matriz A, se obtienen los beneficios de cada una de las fábricas:

$$p^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1/2 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 14 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

Cabe resaltar que este vector representa los beneficios de cada una de las fábricas, sin embargo el problema requiere que se calculen los beneficios totales de la firma; para ello, se multiplica este último vector por el vector columna 1. Se tiene entonces lo siguiente:

$$p^T A * 1^T = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 14 & -5 & -11 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

***1.2.*** El profesor de álgebra matricial dio la oportunidad a sus estudiantes de obtener una décima más en el examen parcial de su materia para aquel que descifre el mensaje escondido en la guía de talleres; el mensaje oculto se puede descifrar empleando la siguiente matriz de "encriptación":

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

El mensaje escondido en la guía del taller es:
$19, 10, 15, 6, 25, 9, -7, 18, -11, -10, 2, 19, 16, -1, -4, 11, -12, -18, 11, -6, 7, 13, -17, -10, -1,$
$-4, 8, 19, 59, -28, -21, -6, 43, 34, 34$

Adicionalmente se cuenta con la siguiente información:

$$\begin{array}{ccc} a \to 1 & j \to 11 & s \to 4 \\ b \to -5 & k \to -10 & t \to 5 \\ c \to -1 & l \to 9 & u \to -4 \\ d \to 10 & m \to 6 & v \to -7 \\ e \to 3 & n \to 7 & w \to 13 \\ f \to 15 & o \to 8 & x \to -15 \\ g \to 2 & p \to -8 & y \to -11 \\ h \to -13 & q \to -3 & z \to 12 \\ i \to -2 & r \to -6 & espacio \to 0 \end{array}$$

Encuentre el mensaje escondido y muestre todos sus cálculos.
Este ejercicio es similar al que se presenta en el documento Apuntes de Economía No. 11 asignado para la lectura. Para descifrar el mensaje del profesor basta con construir la matriz AB de dimensiones 5x7 a partir del mensaje escondido. Luego hay que obtener la inversa de la matriz A, de forma a multiplicar esta última con AB para obtener la matriz B que a su vez es la que contiene el mensaje inicialmente encriptado en AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 10 & 15 & 6 & 25 & 9 & -7 \\ 18 & -11 & -10 & 2 & 19 & 16 & -1 \\ -4 & 11 & -12 & -18 & 11 & -6 & 7 \\ 13 & -17 & -10 & -1 & -4 & 8 & 19 \\ 59 & -28 & -21 & -6 & 43 & 34 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}AB = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1 & -2/3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & -3 \\ 5/6 & 5/4 & 7/12 & 2 & -1 \\ -5/12 & -5/8 & -7/24 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}AB = B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 & 8 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 & -6 & 3 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & -1 & -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Una vez se obtiene la matriz B, basta con mirar las letras que corresponden a los números de dicha matriz. De esta forma se descifra que el mensaje oculto es: tengo que repasar álgebra matricial.

# Pregunta 2

Sea $X$ la variable aleatoria que representa la longitud de una conversación telefónica. Un práctica muy común es asumiendo que la distribución de $X$ viene dada por:

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \tag{1}$$

para $X \geq 0$ y $F_x = 0$ para $X < 0$. Donde $\lambda$ es un número positivo. La función de densidad de probabilidad correspondiente estaría dada por

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{2}$$

para $X \geq 0$ y $f_x = 0$ para $X < 0$. A partir de la información anterior responda a la siguiente pregunta:
***2.1*** Si se asume que las conversaciones telefónicas están medidas en minutos, encuentre la probabilidad de que X esté entre 5 y 10.

$$P\left[5 \text{ ¡ X10}\right] = \int_5^{10} \lambda e^{-x\lambda} dx = e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda}$$

***2.2*** Ahora suponga que

$$F_X(x) = \left(1 - pe^{-\lambda x}\right)$$

para $X \geq 0$ y $F_x = 0$ para $X < 0$. Encuentre la media de X.

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_x(x)]dx - \int_{-\infty}^{0} F_x(x)\,dx = \int_0^{\infty} pe^{-\lambda x}dx = \frac{p}{\lambda}$$

# Pregunta 3

Mauricio cuenta con un portafolio cuyo valor inicial es de 300 dólares. Adicionalmente se tiene que dicho portafolio está distribuido de tal manera que el activo a representa el 30% del portafolio y el activo b el 25%

Sea A la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos del portafolio:

$$A = \text{cov}(x) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.02 & 0.03 \\ 0.1 & 0.03 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Además la matriz B ilustra los rendimientos medios de los activos que componen el portafolio:

$$B = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

***3.1*** Encuentre, si es posible, la varianza del rendimiento del portafolio.

***a.***

$$Var(x) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} * A * \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$$

$$Var(x) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.02 & 0.03 \\ 0.1 & 0.03 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.45 \end{bmatrix}^T = 0.13925$$

***3.2*** Encuentre, si es posible, el rendimiento promedio del portafolio.

La rentabilidad media del portafolio corresponde a efectuar el siguiente cálculo:

$$\text{E}(\text{x}) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix} = 0.124$$

***3.3*** Encuentre, si es posible, la correlación del portafolio.

La correlación del portafolio no existe, puesto que la correlación se calcula entre dos variables, es decir entre dos portafolios, y en este caso sólo se cuenta con un portafolio.

# Pregunta 4

El equipo que representará a una república caribeña en el campeonato mundial de tenis de mesa está compuesto por dos jugadores. Cada jugador puede obtener 0, 1 o 2 puntos. El jugador 1 tiene una probabilidad de 0.2 de ganar 0 puntos, 0.5 de obtener 1 punto, y 0.3 de tener 2 puntos. Por su parte, las probabilidades asociadas al jugador dos son de 0.1, 0.4 y 0.5. $x_1$ denota cualquier posible puntaje obtenido por el jugador 1, y $f(x_1)$ la probabilidad de obtener un puntaje determinado. De igual forma $x_2$ representa cualquier puntaje que pueda obtener el jugador 2, y $f(x_2)$ la probabilidad asociada a dicho evento.

***4.1*** Halle la distribución conjunta de los puntajes de estos dos jugadores de tenis de mesa, asumiendo que el desempeño de cada uno de los jugadores no depende del rendimiento del otro.

Bajo el supuesto de independencia se tiene que:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

Entonces, la probabilidad de que ambos jugadores tengan un puntaje igual a cero es igual a:

$$f(0,0) = f(0) f(0) = (0.2)(0.1) = 0.02$$

De nuevo, la probabilidad de que el jugador 1 tenga un puntaje igual a 0 mientras que el jugador dos tiene uno igual a 1 es:

$$f(0,1) = f(0) f(1) = (0.2)(0.4) = 0.08$$

y así sucesivamente. La tabla que se muestra a continuación presentta la distribución bivariada completa, esto es nueve probablidades distintas.

| | X2=0 | X2=1 | X2=2 | Suma=f1(x1) |
|---|---|---|---|---|
| X1=0 | 0.02 | 0.08 | 0.1 | 0.2 |
| X1=1 | 0.05 | 0.2 | 0.25 | 0.5 |
| X1=2 | 0.03 | 0.12 | 0.15 | 0.3 |
| Suma=f2(x2) | 0.1 | 0.4 | 0.5 | 1 |

***4.2*** Suponiendo que el puntaje de cada equipo resulta de sumar los puntos individuales que obtiene cada jugador, encuentre la distribución de los puntajes del equipo.

Dado que el puntaje del equipo es la suma de los puntajes indivuduales, claramente los posibles valores son 0,1,2,3 o 4. La probabilidad lograr un marcador determinado corresponde a la suma de las probabilidades individuales de lograr un marcador dado, esto es:

$$
\begin{aligned}
p(0) &= f(0,0) = 0.02\\
p(1) &= f(0,1) + f(1,0) = 0.08 + 0.05 = 0.13\\
p(2) &= f(0,2) + f(1,1) + f(2,0) = 0.1 + 0.2 + 0.03 = 0.33\\
p(3) &= f(1,2) + f(2,1) = 0.25 + 0.12 = 0.37\\
p(4) &= f(2,2) = 0.15
\end{aligned}
$$

# Preguntа 5

A partir de la información suministrada respoenda a las siguientes preguntas.

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 3\\ 5 & 8 & 0 & 1/2\\ 4 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1/2 & 5 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 12\\ 9 & 0 & 10\\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}
$$

***5.1*** Calcule el determinante de A.

$$
\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 3\\ 5 & 8 & 0 & 1/2\\ 4 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1/2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 20
$$

***5.2*** Calcule la inversa de A. Hágalo mediante el método de cofactores y por reducción de Gauss Jordan.

$$
\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9/4 & 5/2 & -1 & 3\\ 2 & -4/5 & 1/2 & -2/5\\ -5 & 17/5 & -1/4 & 21/5\\ 11/2 & -11/5 & 2 & -18/5 \end{bmatrix}
$$

***5.3*** Calcule el rango de A.

El rango de una matriz es el número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn existen n valores propios). Además en este caso, el determinante de A es diferente de cero, lo que implica que A tiene rango completo. Por lo tanto el rango de A es igual a 4.

***5.4*** Calcule AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 60 & 68 & 120 \\ 25 & 65 & 102 \\ 10 & 34 & 32 \\ 145/2 & 85/2 & 76 \end{bmatrix}$$

# Pregunta 6

***6.1*** Uno de los principales indicadores del servicio de calidad de una empresa, es la rapidez con la que se da respuesta a las quejas de los clientes. Comercial logística es una gran firma familiar que se dedica al almacenamiento de vehículos, y que en los últimos años ha experimentado un gran crecimiento. El año pasado se presentaron 50 quejas relacionadas con la demora en la entrega de los vehículos. Los siguientes datos representan el número de días que pasaron desde que se recibió la queja hasta que ésta se soluciona. Adicionalmente, la empresa ha establecido que su tiempo óptimo de respuesta es de 20 días, para lo cuál implementó una serie de medidas que ayuden a cumplir su meta. No obstante, el jefe de la firma, no está muy seguro de que dichas medidas sean efectivas. Responda a la siguiente pregunta utilizando los datos que se presentan a continuación:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 5 | 35 | 137 | 31 | 27 | 152 | 2 | 123 | 81 |
| 74 | 27 | 11 | 19 | 126 | 110 | 110 | 29 | 61 | 35 |
| 94 | 31 | 26 | 5 | 12 | 4 | 165 | 32 | 29 | 28 |
| 29 | 26 | 25 | 1 | 14 | 13 | 13 | 10 | 5 | 27 |
| 4 | 52 | 30 | 22 | 36 | 26 | 20 | 23 | 33 | 68 |

¿Cree usted que el proyecto de mejoramiento de calidad fue exitoso? (para ello use un nivel de significancia del 5%.

Para saber si el proyecto implementado perimitió que la atención al cliente mejorara, es necesario calcular el intervalo de confianza del 95 por ciento de la media, del número de días entre que se recibe la queja y se resuelve. Cabe resaltar que la muestra es lo suficientemente grande, por lo que es apropiado usar un estadístico t.

$$\overline{X} \pm t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Sean:

$$\overline{X} = 43.04$$
$$S = 41.92605736$$
$$n = 50$$
$$t = 0.025$$

Por lo tanto el intervalo de confianza para la media es:

$$31.12\mu 54.96$$

Como se dijo anteriormente, el tiempo de respuesta de las quejas óptimo para la firma es de 20 días; No obstante esta cifra no cae dentro del intervalo de confianza, por lo que el proyecto de mejoramiento de calidad no fue exitoso.

***6.2*** Si se sabe que $Var\left(X\right) = 144,\ Var\left(Y\right) = 64,$ y $\rho\left(X,Y\right) = \frac{1}{4}$ encuentre $Var\left(X+Y\right)$ y $Var\left(2X+Y+5\right)$.

Teniendo en cuenta que $\rho\left(X,Y\right) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ entonces, $Var\left(X+Y\right) = Var\left(X\right) + Var\left(Y\right) + 2\Big(\sqrt{Var\left(X\right)}\ \sqrt{Var\left(Y\right)}$

Así pues:

$$Var\,(X+Y) = 144 + 64 + 2\left(12 * 8 * {}^{1}\!/_{4}\right)$$
$$Var\,(X+Y) = 256$$

$$Var\,(2X+Y+5) = Var\,(2X) + Var\,(Y) + 2Cov\,(2X,Y)$$
$$4Var\,(X) + Var\,(Y) + 2\,(2)\left(\sqrt{Var\,(X)}\,\sqrt{Var\,(Y)}\,\rho\,(X,Y)\right)$$
$$(4)\,(144) + (64) + (2)\,(2)\left(12 * 8 * {}^{1}\!/_{4}\right) = 736$$