DAVID BENÍTEZ MOJICA, LEONEL MONROY GUZMÁN
HENRY ARLEY TAQUEZ QUENGUAN (COMPILADORES)

Resolución de problemas de matemáticas con medios digitales

Editorial Universidad Icesi

Resolución de problemas de matemáticas con medios digitales

David Benítez Mojica
Leonel Monroy Guzmán
Henry Arley Taquez Quenguan
Compiladores

Editorial Universidad Icesi

Resolución de problemas de matemáticas con medios digitales
© David Benítez Mojica, Leonel Monroy Guzmán, Henry Arley Taquez Quenguan (compiladores), y varios autores.

Cali. Universidad Icesi, 2025
pp. 144; 17x23cm
Incluye referencias bibliográficas
ISBN: ISBN 978-628-7814-04-2
DOI: https://doi.org/10.18046/EUI/ee.3.2025

Palabras Clave: 1. Aprendizaje de las matemáticas. 2. Resolución de problemas. 3. Enseñanza mediada por tecnología. 4. Medios digitales.

Clasificación Dewey 510

© Universidad Icesi
Facultad de Ciencias Humanas
Primera edición /

Rector
Esteban Piedrahita Uribe

Director Académico
José Hernando Bahamón Lozano

Coordinador Editorial
Adolfo A. Abadía

Diseño de Portada y Diagramación
Paula Andrea Cubillos Gómez

Revisor de Estilo
Paola Vargas Heredia

Imagen de portada
Elaborada con inteligencia artificial generativa

Editorial Universidad Icesi
Calle 18 No. 122-135 (Pance), Cali – Colombia
Teléfono: +57 (2) 555 2334
E-mail: editorial@icesi.edu.co
http://www.icesi.edu.co/editorial

Publicado en Colombia – *Published in Colombia*

La publicación de este libro se aprobó luego de superar un proceso de evaluación doble ciego por dos pares expertos.

Índice

Prefacio

El libro *Resolución de problemas de matemáticas con medios digitales*, está compuesto por cinco capítulos: (i) los cuatro primeros capítulos son los estados del arte de cuatro tesis ya sustentadas y aprobadas, en la línea de resolución de problemas de matemáticas con medios digitales, los cuales son resultado del proyecto de investigación titulado: *Competência de observar profissionalmente a prática docente: atividades educativas inovadoras para a prática docente (competencia para observar profesionalmente la práctica docente: actividades educativas innovadoras para la práctica docente)* con número de identificación 303456/2021-3. Este proyecto es financiado por el Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico de Brasil (CNPq) (Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Brasil). (ii) El capítulo V del presente libro es resultado del proyecto: *Creencias y Concepciones de profesores de Educación Media sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, con número 05333 de la convocatoria interna 134-2021 financiado por la Universidad del Valle.

El primer capítulo destaca la resolución de problemas como un elemento esencial en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que no solo permite aplicar conceptos en contextos variados, sino que también favorece el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático. Esta estrategia pedagógica promueve una participación activa del estudiante, lo que fomenta un aprendizaje más profundo y significativo. Se hace hincapié en la necesidad de cambiar las prácticas educativas tradicionales que priorizan la memorización de procedimientos, para dar paso a un enfoque centrado en la formulación y resolución de problemas, permitiendo a los estudiantes enfrentarse a situaciones reales y contextualizadas. Este cambio busca empoderar a los estudiantes, fomentando una relación más profunda con las matemáticas.

El capítulo también hace un recorrido histórico sobre las investigaciones en la enseñanza de las matemáticas en las últimas décadas. Se observa cómo los enfoques tradicionales, centrados en la instrucción directa y la memorización, han dado paso a modelos que priorizan la autonomía del estudiante y el trabajo colaborativo. En lugar de ver las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos, se promueve un enfoque que las presenta como una disciplina dinámica, abierta a la exploración y la creatividad, conectada con los desafíos del mundo real. Este cambio ha transformado la forma en que las matemáticas se enseñan y se aprenden, haciendo de ellas una herramienta útil para la vida cotidiana.

Un punto destacado en el capítulo I es el impacto de las tecnologías en la resolución de problemas matemáticos. Se describe el uso de herramientas como los Sistemas de Cálculo Algebraico (CAS) y los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), las plataformas colaborativos, los software de procesamiento estadístico, los simuladores y modeladores, las aplicaciones para trabajar la Gamificación y la Inteligencia Artificial, las cuales facilitan la visualización de problemas complejos, la identificación de patrones y la construcción de conjeturas. Estas herramientas enriquecen el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes experimentar con soluciones y contraejemplos de manera interactiva. Además, promueven la creatividad, la experimentación y el trabajo colaborativo, habilidades esenciales en un mundo digitalizado. La tecnología, por lo tanto, no solo facilita la comprensión de conceptos matemáticos abstractos, sino que también potencia las competencias digitales de los estudiantes.

El capítulo II aborda la enseñanza del álgebra lineal, un área clave pero desafiante en la educación superior. Se destacan los altos índices de reprobación en esta materia debido a la abstracción de conceptos como el espacio vectorial y la dependencia lineal, y las estrategias pedagógicas ineficaces. Se presentan tres enfoques pedagógicos principales: geométrico, aritmético-analítico y analítico-estructural. El uso de herramientas digitales como los CAS y los DGS ha transformado el aprendizaje de esta asignatura, reduciendo la carga de cálculos manuales y permitiendo que los estudiantes se enfoquen en conceptos más avanzados. Estas tecnologías permiten explorar las matemáticas de manera más interactiva y visual, lo que facilita la comprensión de conceptos fundamentales y mejora las competencias tecnológicas.

El capítulo III se centra en la resolución de problemas de probabilidad utilizando medios digitales, destacando cómo las creencias de los estudiantes influyen en su razonamiento. Se observa que las creencias erróneas pueden actuar como barreras cognitivas, dificultando la resolución efectiva de problemas de probabilidad. El uso de herramientas digitales como los CAS y los DGS facilita la enseñanza de la probabilidad, ofreciendo representaciones visuales que ayudan a los estudiantes a comprender mejor los conceptos abstractos y a identificar patrones. Además, estas herramientas fomentan el desarrollo de habilidades tecnológicas esenciales y promueven un enfoque más exploratorio y basado en la observación.

El capítulo IV examina los procesos cognitivos involucrados en la generación de conjeturas geométricas en entornos de geometría dinámica (DGE). Se analiza cómo estos entornos permiten a los estudiantes manipular objetos geométricos de manera interactiva, favoreciendo el proceso de exploración y deducción. La capacidad de los DGE para proporcionar representaciones dinámicas de figuras geométricas facilita la visualización de patrones y la construcción de conjeturas fundamentadas en la experimentación. Además, se destaca la importancia de integrar la teoría cognitiva en el estudio de estos procesos, ya que la interacción entre la visualización dinámica y el razonamiento formal abre nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría.

El capítulo V explora las creencias y concepciones de los profesores sobre la mediación de recursos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas. Se revela una brecha entre lo que los docentes consideran que deberían hacer (según las directrices curriculares) y lo que realmente hacen en la práctica. Algunos docentes siguen métodos tradicionales que no aprovechan plenamente el potencial de las herramientas pedagógicas, mientras que otros intentan adaptarse a enfoques innovadores pero enfrentan obstáculos como la falta de formación continua y la presión por cumplir con los estándares curriculares. Este capítulo subraya la importancia de comprender las creencias y concepciones de los docentes para diseñar intervenciones formativas que apoyen el desarrollo profesional y la integración efectiva de recursos pedagógicos innovadores en la enseñanza de las matemáticas.

David Benítez Mojica

01

La importancia de Resolución de Problemas de Matemáticas con la mediación de Tecnologías Digitales

David Benítez Mojica
david.benitez@correounivalle.edu.co

Henry Arley Taquez Quenguan
hataquez@icesi.edu.co

Introducción

Desde las dos últimas décadas del siglo XX hasta la fecha, se ha considerado la resolución de problemas como elemento primordial en el aprendizaje de las matemáticas. Desde mediados de los años ochenta del siglo XX, con los trabajos de Schoenfeld (1985), vuelven a adquirir vigencia las ideas de Polya (1965) sobre el papel de la heurística en la resolución de problemas.

Por otro lado, el uso de la tecnología, en actividades de aprendizaje, tiene ya una historia de más de 40 años. Sin embargo, su incorporación sistemática a los sistemas escolares ha sido mucho más reciente y aún más lo han sido los estudios y evaluaciones, que dan cuenta de los resultados de ese proceso. Desde esta perspectiva, es pertinente emprender trabajos de investigación que documenten los efectos que genera el empleo de la tecnología en la resolución de problemas de matemáticas.

En recientes reformas curriculares del programa de matemáticas, en el ámbito preuniversitario, se indican tres aspectos centrales para la investigación que se reporta en el presente documento:

a. Se identifica la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas. (Schoenfeld, 1992; Alarcón et al., 1994; Santos, 1997; Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), 1998; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; Boletín Oficial del Estado (BOE), 3 de julio de 2003).

Aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, hacer conjeturas y formular contraejemplos.

b. Se indica que uno de los temas importantes en el currículo de matemáticas, es el estudio de fenómenos que involucran cambio o variación y que implican el uso de la modelación. (Hitt, 1997; MEN, 1999; NCTM, 2000; MEN, 2004; Camacho y Santos, 2004; Santos y Barrera, 2005, Benítez, 2006; Villa eta al., 2018; Borba, 2023; Santos, 2024).

c. Se destaca la importancia del empleo de la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes. (Laborde, 1995, 2000, 2001; Balacheff y Kaput, 1996; MEN, 1999; Goldenberg, 2000; Santos, 2000; NCTM, 2000; Alarcón et al., 2001; Moreno, 2002a; Benítez, 2006; UNESCO, 2013; MEN, 2014; OCDE, 2015; Moreno, L. y Santos, L.M., 2016; OCDE, 2015; Moreno, L. y Santos, L.M., 2016 Monroy, 2023; Fajardo, 2023; Bonelo, 2024).

En este ámbito, el NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un principio esencial que debe darle soporte a las propuestas curriculares:

> Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y computadoras, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas. Ofrecen imágenes visuales de Ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de los datos y hacen cálculos en forma eficiente y exacta. Ellas pueden apoyar las investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de las matemáticas, incluyendo números, medidas, geometría, estadística y álgebra. Cuando los estudiantes disponen de herramientas tecnológicas, se pueden concentrar en tomar decisiones, razonar y resolver problemas. (p. 24)

El uso de la tecnología, en el aprendizaje de las matemáticas, ofrece un panorama alentador. Sin embargo, los profesores de matemáticas y los investigadores en Educación Matemática deben tomar en consideración los cambios que introducen la presencia y la aplicación de la tecnología. Balacheff y Kaput (1996) señalan que esto ha generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen sobre una pantalla de computadora se pueden manipular (arrastrar, animar, transferir, colorear) de tal forma que se genera la sensación de una existencia casi material.

La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas

La resolución de problemas se ha destacado como elemento fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, durante las últimas tres décadas. A continuación, se plantean ideas que dan sustento a dicha afirmación:

a. La resolución de problemas ha sido considerada como el corazón de las matemáticas. En esta dirección Halmos (1980) apunta:

   > Yo creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, yo espero que como maestros, en el aula, en los seminarios y en los libros y artículos que escribamos, le daremos mayor énfasis y entrenaremos a nuestros estudiantes para que sean mejores propositores[1] y resolutores[2] de problemas que nosotros. (p. 524).

b. En diferentes reformas curriculares del programa de matemáticas, a nivel preuniversitario, se destaca la resolución de problemas como un aspecto relevante, en el aprendizaje de esta disciplina. (Schoenfeld, 1992; Santos, 1997; Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998; NCTM, 2000; Alarcón et al., 2001; BOE, 3 de julio de 2003; Niss, 2002; Törner *et al.*, 2007; Toh *et al.*, 2023; Niss y Højgaard, 2024; Santos, 2024).

Por otra parte, aprender matemáticas, mediante la resolución de problemas, es una orientación preponderante en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000). Al respecto, resalta la importancia que tiene el diseño de problemas, en diferentes contextos, que puedan despertar el interés

1. La palabra propositor se entenderá como: persona que propone un problema de matemáticas

2. La palabra resolutor significa: persona que resuelve un problema de matemáticas.

de los estudiantes; al mismo tiempo, que ayuden a comprender las nociones básicas y a promover procesos de resolución de problemas, que involucren el uso de distintas representaciones y la formulación de conjeturas, entre otras. Cabe resaltar que tal propuesta sirve de fundamento para el desarrollo de otros diseños curriculares en varios países y como fuente inspiradora de muchas investigaciones.

Los ministerios de educación, de diversos países, han formulado recomendaciones que avalan estas directrices. El programa de matemáticas de secundaria, que viene aplicándose en México desde 1994, propone una enseñanza fundamentada en la resolución de problemas. Acerca de dicho enfoque, Alarcón *et al.* (1994) indican:

> Un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertos procedimientos. Por el contrario, es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permitan generar y comunicar conjeturas. (p.12)

Esta cita recoge, en gran medida, la filosofía del currículo mexicano para el nivel de secundaria: critica las prácticas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fundamentadas, exclusivamente, en la memorización y la mecanización, y propone al maestro opciones de trabajo en el aula, que contemplan el desarrollo de aspectos medulares del pensamiento matemático, como la comunicación y la formulación de conjeturas.

Además del manejo de recursos básicos, como definiciones y teoremas, la reforma de 1993 propone la adquisición de procesos medulares del pensamiento matemático, entre los que se encuentran la generación y la comunicación de conjeturas. En esta dirección, la SEP (2001) plantea:

> La reforma de 1993 estableció como orientación central la necesidad de concentrar el currículo y los materiales en la adquisición de habilidades intelectuales básicas y conocimientos fundamentales, que constituyen el fundamento de todo aprendizaje posterior y la introducción de nuevas formas de trabajo en el aula que favorecen el aprendizaje participativo y la comprensión en los contenidos. (p. 114)

El Ministerio de Educación Nacional en Colombia (MEN 1998) ha elaborado los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, los cuales constituyen un material para los maestros de educación básica y media (equivalente a los niveles de primaria, secundaria y preparatoria en México). El documento es una guía de los procesos de transformación curricular que vive ese país: se propone una Educación Matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales; que no solo hagan énfasis en el aprendizaje de conceptos, teoremas y algoritmos, sino que le den valor real a los procesos generales del pensamiento, tales como la comunicación, la modelación, la comparación y desarrollo de procedimientos, el planteamiento y la resolución de problemas. Sobre esto último afirma "para lograr las metas propuestas sobre la resolución de problemas, los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobar sus ideas" (MEN, 1998, p. 77).

Esta idea hace explícita una concepción del aprendizaje de las matemáticas como un proceso activo, resultado de una compleja red de relaciones e interacciones de los estudiantes entre sí y con el profesor. Se fomenta la participación, la libre expresión y la discusión entre los asistentes al aula, alejando de manera paralela las viejas creencias que marginaban la participación de los estudiantes y la relegaban a un papel pasivo.

La NCTM (2000) presentó el documento *Principles and Standards for School Mathematics*, que comprende seis estándares de contenido, (números y operaciones; patrones, funciones y álgebra; geometría y sentido espacial; medición, análisis de datos; estadística y probabilidad) y cinco estándares que describen los procesos matemáticos del quehacer de la disciplina, (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones), los cuales deben ser desarrollados por los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje. Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) tienen la intención de construir un fundamento para los procesos de instrucción, en el aula de matemáticas, donde se refleja el quehacer de la disciplina. Para ello, resulta indispensable reflexionar sobre las siguientes preguntas: ¿Qué características debe tener la instrucción matemática para propiciar experiencias que incidan en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué contenidos y procesos matemáticos deben aprender?

La NCTM (2000) afirma que la habilidad para resolver problemas, no solo es un propósito para el aprendizaje de las matemáticas, sino también es el medio principal de conseguirlo. También asevera que el currículo desde la primaria hasta la preparatoria, debe permitir para que todos los estudiantes:

> Los problemas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas
> - Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos
> - Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas
> - Controlar el proceso de resolución de problemas y reflexionar sobre él. (p. 57)

Desde esta perspectiva, se concibe la resolución de problemas como una parte integral del currículo y no como un segmento aislado. Dicho en otros términos, el estándar de resolución de problemas es el hilo conductor e integrador de los estándares de contenido y de procesos matemáticos.

Las recientes reformas al currículo español hacen énfasis en que la resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual integrada en todas las facetas del proceso de aprendizaje de las matemáticas (BOE, 3 de julio de 2003).

Sobre el quehacer matemático en la experiencia escolar

La resolución de problemas ofrece una alternativa que permite visualizar, bajo un enfoque dinámico, el proceso de aprendizaje. Asimismo, se cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos y procedimientos que el estudiante deba aprender de memoria. Desde este enfoque, los alumnos están en plena actividad: hacen preguntas, transforman el problema, debaten, conjeturan y formulan contraejemplos.

Al respecto, Schoenfeld (1992) discute el papel de la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático, afirmando:

> Para aprender matemáticas se deben conocer las reglas del lenguaje de las Matemáticas; es importante para lograr la motivación, que los estudiantes vayan más allá de la expresión de tales reglas. Esta transformación sugiere cambios en el contenido curricular y en el estilo de instrucción que involucran: buscar soluciones, no sólo memorizar procedimientos; explorar modelos, no sólo memorizar fórmulas; formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios. (p. 335)

Los participantes en el estudio que nos ocupa, tuvieron experiencias de aprendizaje que incluían actividades propias del quehacer matemático. Para darle sustento a este enunciado se presentan las siguientes ideas:

a. Es posible propiciar un ambiente de instrucción, donde los estudiantes desarrollen aspectos esenciales relacionados con el quehacer de la disciplina (Estrada, 1998; Goldenberg y Cuoco, 1997; Benítez, 2006).

b. Cuando se reflexiona sobre la pregunta: ¿Qué significa pensar matemáticamente?, surgen algunas creencias acerca de esta disciplina; posiblemente salgan a flote las experiencias como estudiantes, como profesores y como investigadores.

Al respecto, Polya (1966) asegura:

> Las matemáticas tienen muchos aspectos. Para muchos estudiantes las matemáticas las pueden ver como un conjunto de reglas rígidas, algunas de las cuales se aprenden de memoria antes de los exámenes finales, y todas ellas se pueden olvidar después. Para algunos maestros las matemáticas son un sistema riguroso de pruebas que, no obstante, hay que abstenerse de presentarlas en clase, presentando, en cambio, alguna ilustración del teorema. Para el matemático activamente interesado en la investigación las matemáticas pueden parecer un rompecabezas: usted tiene que intuir un teorema matemático antes de probarlo, intuir la idea la prueba antes de realizarla en detalle. (p. 464)

c. Paralelamente, pueden surgir preguntas como: ¿Cuáles son las actividades sobresalientes que desempeña un matemático en el ejercicio de su profesión? ¿Cuáles de estas actividades están presentes en el ejercicio de la matemática escolar?

Con la misma óptica, Santos (2003a) escribe:

> Una meta fundamental del aprendizaje de las matemáticas es que durante sus experiencias los estudiantes desarrollen una disposición y apreciación para participar en actividades propias del quehacer matemático. En este contexto, es importante que aprendan a resolver y formular problemas en los que puedan aplicar estrategias y representaciones diversas, que les permitan examinar soluciones y relaciones desde diferentes ángulos. (p. 316)

En el mismo tenor, (Goldenberg y Cuoco 1997; Goldenberg, 1996; Cuoco, et, al., 1996 ; Dick y Hollebrands, 2011 ; Schoenfeld, 2022) indican que cada curso o experiencia académica, en la escuela, se debe utilizar como oportunidad para ayudar a los estudiantes a desarrollar lo que denominan hábitos generales del pensamiento matemático. Añaden que los estudiantes deben ser constructores de patrones, experimentadores, comunicadores de ideas, capaces de visualizar una idea matemática y constructores de conjeturas.

La NCTM (2000) recomienda que el razonamiento y demostración sean una parte del plan de estudios de las matemáticas, en todos los niveles, desde el preescolar hasta el grado 12. En detalle, se precisa que los estudiantes deben tener la capacidad de:

- reconocer el razonamiento y la prueba como los aspectos fundamentales de las matemáticas;
- formular e investigar conjeturas matemáticas;
- desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones;
- seleccionar y usar varios tipos de razonamiento y de métodos de demostración. (p. 61)

Evolución de las investigaciones en el campo de la Resolución de problemas

El desarrollo que ha tenido el área de investigación en la resolución de problemas, ha sido objeto de diversos estudios (Lester y Kehle, 2003; Santos y Barrera, 2005; Santos, 2023; Santos, 2024). En la siguiente tabla se puede ver un resumen de las tendencias de investigación a lo largo del tiempo, así como los temas centrales de interés y la metodología aplicada por los autores:

Tabla 1.

Tendencias de investigación en resolución de problemas

Años	Énfasis de la investigación en la resolución de problemas	Metodología de la investigación
1970-1982	Identificación de características de resolutores exitosos, el entrenamiento de heurísticas.	Análisis estadístico de regresión, "experimentos de enseñanza".
1978-1985	Comparación del desempeño de resolutores exitosos y no exitosos (expertos vs. novatos); entrenamiento en estrategias	Estudio de casos, análisis de protocolos.
1982-1990	Metacognición; relación de afectos y creencias en la resolución de problemas; entrenamiento en estrategias metacognitivas.	Estudio de casos, análisis de protocolos.

Años	Énfasis de la investigación en la resolución de problemas	Metodología de la investigación
1990-1995	Influencia social, resolución de problemas en contexto (problemas situados).	Métodos Etnográficos.
1995-2000	Descripción de uso de múltiples representaciones en la resolución de problemas.	Estudio de casos, análisis de protocolos.
2000-2005	Influencia de la modelación en el desarrollo de herramientas conceptuales usadas en la solución de familias de problemas.	Estudio de casos, análisis de protocolos.
2006-2010	Uso de estrategias heurísticas y estructuración de problemas.	análisis de casos, observación de aulas, y entrevistas con estudiantes y profesores
2011-2015	Integración de herramientas digitales y resolución de problemas abiertos	Diseños experimentales y estudios mixtos para evaluar el impacto de tecnologías digitales y problemas no rutinarios
2016-2020	Pensamiento crítico y razonamiento lógico en contextos interdisciplinarios.	Enfoques cuantitativos con uso de análisis estadístico y estudios de diseño participativo con profesores para construir materiales
2021-2024	Resolución de problemas apoyada por inteligencia artificial y aprendizaje adaptativo	Estudios longitudinales y análisis de datos masivos (Big Data) para comprender patrones de aprendizaje y personalizar experiencias

Fuente: Elaboración Propia

Santos y Barrera (2005) deliberan sobre las actividades o problemas que ayudan a explorar, promover y documentar acerca del aprendizaje de los estudiantes. Estos autores presentan un resumen de las características asociadas con tres perspectivas de investigación, a saber: la resolución de problemas, las representaciones y la modelación:

Tabla 2.

Características asociadas a tres perspectivas de investigación

Perspectivas	Características	Tipo de actividades	Procesos de aprendizaje	Entornos de aprendizaje	Evaluación
Resolución de problemas	Relación directa entre las prácticas matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes. El pensamiento matemático involucra la formulación de preguntas, conjeturas, relaciones y uso de distintos tipos de argumento.	Actividades no rutinarias que pueden ser desarrolladas durante el tiempo de clase, en tareas para la casa y proyectos.	Dimensiones en la resolución de problemas: Dominio de conocimientos, Estrategias cognitivas. Estrategias metacognitivas y el sistema de creencias.	El salón de clases es un microcosmo matemático. El salón de clases de matemáticas contiene una comunidad de pequeños grupos que participan y discuten y el instructor es un moderador.	Solución de problemas no rutinarios. Las competencias matemáticas de los estudiantes involucran: conjeturar, representar, formular preguntas, comunicar.
Representaciones	Distinción entre los objetos matemáticos y sus representaciones. El pensamiento matemático es expresado a través de sistemas semióticos de representación.	Actividades que involucran el uso de múltiples representaciones.	Tránsito de una representación a otra. Operaciones en cada registro.	El entorno de resolución de problemas promueve la construcción de representaciones de ideas matemáticas y sus conexiones.	Observar que el estudiante elabora conexiones entre los registros. Reconocer que un mismo objeto puede tener diferentes representaciones.
Modelos - Modelación	Las matemáticas son un sistema de relaciones usadas para entender y construir sentido de diferentes problemas.	Las actividades se construyen en diferentes contextos.	El aprendizaje involucra la construcción de modelos conceptuales.	El ambiente de aprendizaje se desarrolla alrededor de la construcción de modelos.	Desarrollar herramientas conceptuales que son usadas en la solución de familias de problemas.

Para ilustrar las conexiones entre estas tres perspectivas, Santos y Barrera (2002) trabajan un problema situado en un contexto hipotético donde el modelo del fenómeno se examina usando representaciones múltiples, distintos recursos matemáticos y estrategias heurísticas.

Lester y Kehle (2003) señalan que la investigación, en torno a la resolución de problemas, está lejos de concluir, pues poco se sabe sobre el aprendizaje en ambientes matemáticamente propicios. Se sugiere, en consecuencia, que este tópico debe ser un punto importante dentro de las agendas de investigación.

Atendiendo dicha orientación, De Olaizola y Santos (2004) investigan acerca del desempeño de los estudiantes con respecto a problemas sin solución, esto es, situaciones problemáticas en donde deben reconocer que no es posible hacer o encontrar lo que se les pide y en las cuales deben construir relaciones generales.

Santos y Barrera (2005) preguntan si el uso de la tecnología, en la resolución de problemas, demanda una reorganización de los principios, para explicar el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos. Los mismos autores, reconocen que el uso de diferentes herramientas puede ofrecer distintas posibilidades de interacción, con las actividades matemáticas. Desde este punto de vista, es necesario realizar estudios de investigación que generen nuevos conocimientos, sobre el proceso de resolución de problemas de matemáticas, apoyados con tecnología.

La presente investigación se propone encontrar las características del proceso de solución de problemas, diseñados en diferentes contextos, cuando el resolutor puede hacer uso del lápiz y el papel y de las herramientas tecnológicas.

La importancia de problematizar el estudio de las matemáticas

Un interés prioritario, dentro del estudio, ha sido construir un ambiente de aula donde se problematice el estudio de las matemáticas. Al respecto, Santos (1998) escribe:

> La responsabilidad del maestro consiste en desarrollar en el salón de clases una comunidad donde se problematice el estudio de las matemáticas. En esta comunidad la actividad central es la discusión de los métodos que puedan ayudar a resolver los problemas identificados. El analizar la pertinencia de los métodos y evaluar su potencial particular o general son actividades que ayudan a construir y a mantener una comunidad social en el salón de clases. (p. 434)

De acuerdo con el anterior enunciado, la discusión de las actividades se dio en varios niveles: uno individual y otro colectivo; en este último se socializan las experiencias de cada estudiante, los recursos y las estrategias usadas y la efectividad de los mismos.

El uso de la tecnología en la resolución de problemas de matemáticas

El mundo de hoy se distingue por la difusión y la apropiación de la tecnología en todos los ámbitos de la vida, así como por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas, que imponen un extraordinario dinamismo a la sociedad. En la actual era computacional, los estudiantes acceden con relativa facilidad al uso de las computadoras.

Para atender los nuevos requerimientos, los investigadores en Educación Matemática deben proponer y desarrollar proyectos de investigación donde se documenten las potencialidades y los riesgos del uso de la tecnología, en la resolución de problemas de matemáticas. La aplicación de la tecnología como herramienta para la resolución de problemas, es una característica sobresaliente del estudio que se reporta en el presente documento. El uso de estas herramientas puede coadyuvar al aprendizaje de las matemáticas.

Al igual que en la resolución de problemas, las reformas a los programas de matemáticas contemplan el uso de la tecnología en el aula. Al respecto, Alarcón, *et al.* (2001b) recomiendan:

> La calculadora es una potente herramienta de cálculo que se utiliza con mucha frecuencia fuera de la escuela, y que puede ser usada por el profesor como un ambiente para plantear diversas actividades y problemas. Por ejemplo, el profesor puede plantear problemas interesantes y juegos con algunas restricciones, para que los estudiantes reflexionen sobre las operaciones básicas y exploren propiedades de los números. En otros casos la calculadora favorece que los estudiantes se centren en los procesos de resolución de un problema más que en los cálculos mismos; descubran patrones en sucesiones numéricas; verifiquen sus resultados de manera inmediata. En otras palabras, la calculadora puede ser utilizada para retroalimentar el aprendizaje, profundizar algunas nociones y desarrollar ciertas habilidades. (p. 20)

Esta sugerencia constituye una apertura en el uso de la tecnología dentro del aula de matemáticas, asociada con la tendencia de resolución de problemas. Asimismo, propone usar las herramientas tecnológicas para abrir nuevas posibilidades de aprendizaje y no como un simple tutorial, en donde el alumno se encuentre con situaciones que no le permitan explorar problemas.

Por otra parte, la modificación de los programas de estudio de matemáticas en Colombia contempla el uso de las nuevas tecnologías, afirmando que "el computador hace posible que fórmulas, tablas de números y gráficas se enlacen rápidamente. Cambiar una representación y ver los cambios en las otras, ayuda a los estudiantes a comprender las relaciones entre ellas" (MEN, 1999, p. 35).

Esta renovación curricular impulsada por el MEN (1999) plantea la idea de que la tecnología amplía el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas, que enriquecen y transforman el currículo. El empleo de la tecnología es un aspecto importante en la instrucción matemática (NCTM, 2000). Con ese propósito, escribe el Principio Tecnológico, el cual afirma: "la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan y ayuda al aprendizaje de los estudiantes" (p. 30).

El Principio Tecnológico es un eje central del presente estudio. Por otra parte, en la reciente reforma al currículo español se hace énfasis en que la calculadora, y ciertos programas informáticos, son recursos de primer orden en la investigación y el análisis de propiedades numéricas y gráficas, por lo cual debe potenciarse su empleo (BOE, 3 de julio de 2003).

Por tal motivo la investigación que se reporta en el presente documento incorpora el uso de tres programas de *software*: Cabri, Excel y Calculadora TI-92 Plus. El uso de distintas herramientas puede coadyuvar a que los estudiantes visualicen e identifiquen propiedades y relaciones que tradicionalmente aparecen en diferentes áreas de las matemáticas, como el cálculo, la geometría y la aritmética. Cada herramienta tiene sus propias potencialidades: Cabri puede auxiliar en los acercamientos geométricos de la solución de un problema; la fortaleza de Excel radica en la manipulación numérica de datos, mientras que la calculadora TI-92 Plus permite la manipulación simbólica y gráfica de la información. La discusión de un problema usando distintas herramientas tecnológicas brinda diferentes opciones para enriquecer la solución.

También el acceso a distintas herramientas de apoyo, en la solución de un problema, facilita al estudiante hacer un análisis sobre las potencialidades que ofrece cada una y tomar la decisión de cuál utilizar.

El uso de Software de Geometría Dinámica

Los softwares de geometría dinámica (DGS, por sus siglas en inglés) son herramientas educativas diseñadas para explorar y comprender conceptos y propiedades matemáticas, a través de construcciones interactivas y manipulaciones visuales en tiempo real. Su implementación en el aula ha sido ampliamente estudiada, destacando beneficios como el fortalecimiento de las habilidades de visualización, la construcción de conjeturas, y el desarrollo de razonamientos deductivos.

a. Cabri. En la década de los años 80 y 90 del siglo pasado e inicios del presente siglo, el Software denominado Cabri (Baulac, Bellemain y Laborde, 1988) jugó un papel muy importante en la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y en la investigación educativa. La utilización sistemática de este *software*, les permite a los estudiantes construir, explorar, visualizar y manipular en forma directa las figuras geométricas. Un seguimiento de los cambios que se producen en la transformación de los objetos geométricos, puede conducir a la búsqueda de patrones y a la construcción de conjeturas. Marrades y Gutiérrez (2000), señalan:

> Los *software* de geometría dinámica ayudan a crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar, observar la permanencia de las propiedades matemáticas, y verificar las conjeturas mucho más fácilmente que en otros ambientes computacionales y que en el entorno de lápiz y papel. (p. 95)

El empleo de Cabri permite a los alumnos la transformación de las figuras en tiempo real, de modo que después de hacer una construcción es posible mover libremente ciertos componentes de un dibujo y observar cómo se van transformando otros. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el *software* mantiene todas las relaciones que fueron especificadas, como atributos esenciales de la construcción original.

b. GeoGebra es un un micromundo computaciónal de la familia de los software dinámicos de matemáticas diseñado para el aprendizaje y enseñanza de diferentes áreas de esta disciplina, como geometría, álgebra, cálculo, estadística y análisis. Combina herramientas numéricas, gráficas, algebraicas y de cálculo simbólico en una sola plataforma interactiva, lo que lo convierte en un recurso ampliamente utilizado por estudiantes, docentes e investigadores Algunas características tomadas en cuenta para sugerir el uso de GeoGebra en la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación y la investigación en Educación Matemática, son los siguientes:

a. Contiene una interfaz amigable , la cual tiene diferentes vistas: Hoja de cálculo, Vista grafica en 2D y 3D, procesamiento estadístico y de probabilidad, Vista CAS, Vista Algebraica.
b. Permite el abordaje de líneas de contenido y desarrollo de habilidades centrales del pensamiento matemático desde el pre-escolar , hasta el posgrado.
c. El *software* dinámico permite estudiar la deformación continua de una construcción geométrica, o el lugar geométrico de un cierto objeto, mientras que otros se transforman de una manera continua.
d. El *software* puede ayudar a los estudiantes a explorar y a construir conjeturas.
e. Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos, para ayudar a encontrar relaciones.
f. Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación.
g. Facilita el empleo de diferentes registros de representación (gráficos, tabulares y algebraicos).
h. La aproximación geométrica puede ser importante para relacionar la solución de un problema, con diferentes líneas de contenido de la geometría (triángulos, sistema de coordenadas cartesianas, ecuación de una recta, triángulos semejantes, cónicas, la ecuación cuadrática y el teorema de Pitágoras), con temas de Cálculo (variación, máximos y mínimos, tendencias, razón de cambio, etc.).
i. Los DGS como GeoGebra permiten a los estudiantes manipular objetos geométricos como puntos, líneas y figuras, lo que fomenta la comprensión de conceptos abstractos a través de experiencias tangibles.
j. Facilitan la experimentación y validación de hipótesis geométricas, lo que estimula el pensamiento crítico y la argumentación matemática
k. Enseñanza colaborativa: Estas herramientas fomentan interacciones en el aula, promoviendo el aprendizaje colectivo y la discusión de soluciones a problemas geométricos.

El de las hojas de cálculo

El profesor tiene la alternativa de trabajar con la hoja electrónica de cálculo (Excel) o la vista hoja de cálculo de Geogebra para propiciar situaciones problemáticas, interesantes para los estudiantes. Por ejemplo, se pueden elaborar tablas y gráficas para realizar un tratamiento de la información útil para modelar situaciones problemáticas, construidas en diversos contextos.

Excel sirve de apoyo en la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con las siguientes consideraciones:

a. Es posible designar cantidades específicas o parámetros para que puedan variarse fácilmente y de esta manera estudiar su efecto. Veamos, es posible hacer un diseño para el estudio de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$; modificar los coeficientes a, b y c y analizar qué efecto produce tal variación sobre la gráfica. También se puede estudiar la concavidad y los cortes con los ejes de coordenadas.

b. Permite el empleo de fórmulas, para relacionar valores que hay en distintas columnas.

c. La hoja electrónica de cálculo se puede entender como una matriz. Cada posición específica de la matriz representaría una variable de la situación o del problema estudiado. De esta manera, es posible contribuir en el desarrollo del pensamiento funcional y variacional.

En actividades donde se emplee Excel, los alumnos pueden entender que para calcular el siguiente término en una sucesión, se usa el término inmediatamente anterior; esto ayudaría a que comprendieran la noción de recursividad.

Un aspecto más a resaltar es que el Excel ayuda a generar tablas relativamente extensas de datos, lo cual abre la posibilidad de hacer gráficas y explorar tendencias. La discusión de problemas, con ayuda de la hoja electrónica de cálculo, puede servir de plataforma para que el estudiante trabaje sobre algunas ideas centrales del Cálculo como las tendencias, las aproximaciones sucesivas y el límite. Asimismo, dicho *software* ayuda a:

a. Organizar datos (ordenar, categorizar, generalizar, comparar y resaltar los elementos clave).

b. Identificar e interpretar un conjunto de datos, el máximo y mínimo, variable independiente, variable dependiente.

c. Resolver problemas que involucren cambio o variación.

d. Utilizar representaciones numéricas, gráficas y algebraicas de los elementos que intervienen en un problema.

e. Buscar patrones.

f. Estimular la exploración para responder a preguntas del tipo "qué pasaría si...", donde se cambian las condiciones iniciales del problema.

g. Examinar tendencias desde el punto de vista gráfico y numérico.

El uso de los software tipo CAS

Los software CAS (Computer Algebra System) son programas que facilitan los cálculos simbólicos y numéricos y permiten obtener representaciones dinámicas de objetos matemáticos (Camacho y Afonso, 2007). Este tipo de software ayuda a los estudiantes a evitar la memorización de fórmulas, pero necesitan tiempo para consolidar su comprensión conceptual y analizar cómo se relacionan las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas entre sí.

Algunos softwares CAS son:

a. **MATHEMATICA:** es un software de álgebra computacional y lenguaje de programación que se utiliza para resolver problemas en áreas científicas, de ingeniería, matemáticas y computacionales.

b. **MAPLE:** es un software orientado al análisis, exploración, visualización y resolución de problemas en campos como las matemáticas, la estadística, la ingeniería y las ciencias.

c. **Wolfram Alpha:** es un motor de búsqueda en línea que ofrece respuestas a preguntas y cálculos matemáticos.

d. **Matrix Calculator:** es una calculadora en línea enfocada en la resolución de ecuaciones matriciales con soluciones paso a paso.

En síntesis, el uso de diferentes *softwares* en la solución de problemas tiene varias ventajas:

- Respalda las exploraciones de los estudiantes en diferentes áreas de las matemáticas, utilizando recursos y procedimientos de geometría, cálculo, álgebra y aritmética.
- Permite visualizar las soluciones algebraicas e interpretarlas para tomar decisiones sobre el ajuste del modelo matemático con la situación problemática.
- Admite hacer simulaciones; es decir, plantearse la pregunta ¿y qué tal si...?
- Facilita el abordaje de problemas reales o realistas, y sirve como herramienta en el proceso de construcción y evaluación de un modelo matemático.

Software de Procesamiento Estadístico

Los software de procesamiento estadístico son herramientas informáticas diseñadas para recopilar, analizar, interpretar y visualizar datos estadísticos de manera eficiente y precisa. Estas herramientas son esenciales en diversos campos como la investigación, la economía, la educación, la salud y la ingeniería, ya que permiten tomar decisiones basadas en datos y respaldadas por evidencia. Gracias a sus capacidades avanzadas, los software estadísticos facilitan el manejo de grandes volúmenes de datos, permitiendo realizar análisis desde los niveles más básicos hasta los más complejos, como modelado predictivo, pruebas de hipótesis y minería de datos. El uso de software estadístico es crucial en una era donde el volumen de datos crece exponencialmente. Estas herramientas no solo permiten extraer información valiosa de los datos, sino también identificar patrones, realizar pronósticos y tomar decisiones informadas en tiempo real. Elegir el software adecuado dependerá de las necesidades específicas de cada usuario, su nivel de experiencia y el tipo de análisis requerido.

Alguna ventajas que tiene el uso de software de procesamiento estadístico son los siguientes:

- Eficiencia: Automatizan cálculos complejos, reduciendo el tiempo necesario para procesar grandes cantidades de datos.
- Precisión: Disminuyen errores humanos al realizar análisis estadísticos gracias a su diseño riguroso y validado.
- Visualización: Generan gráficos, tablas y reportes que facilitan la comprensión de los datos y los resultados obtenidos.
- Versatilidad: Soportan múltiples técnicas y métodos estadísticos, incluyendo análisis multivariante, series de tiempo y regresiones.
- Reproducibilidad: Permiten guardar scripts o rutinas para replicar análisis en distintos conjuntos de datos, fomentando la transparencia y consistencia en los resultados.
- Interoperabilidad: Muchos de estos programas permiten integrarse con otros software o sistemas, facilitando el intercambio de datos y el análisis en equipos multidisciplinarios.

Algunas aplicaciones de procesamiento estadístico son las siguientes:

a. **SPSS** (Statistical Package for the Social Sciences): Software ampliamente utilizado en ciencias sociales, psicología y educación. Es ideal para realizar análisis descriptivo, inferencial y modelos predictivos. Su interfaz amigable combina menús desplegables y opciones de programación para usuarios avanzados. Permite trabajar con grandes volúmenes de datos y generar gráficos de alta calidad.

b. **R:** Lenguaje de programación de código abierto especializado en estadística y probabilidad. Es una herramienta poderosa que soporta un sinnúmero de bibliotecas para realizar análisis avanzados, como machine learning, minería de datos y simulación. Además, permite generar visualizaciones altamente personalizables y de calidad profesional.

c. **STATA:** Popular en economía, epidemiología y ciencias sociales. Combina el análisis estadístico, la gestión de datos y la generación de gráficos en una sola plataforma. Su lenguaje de comandos es intuitivo y permite realizar desde operaciones simples hasta análisis complejos, como modelos de regresión multinivel y análisis de panel.

d. **SAS** (Statistical Analysis System): Un conjunto robusto de herramientas para análisis avanzado, minería de datos y generación de reportes empresariales. Es ideal para grandes organizaciones debido a su capacidad de procesamiento masivo y escalabilidad. Incluye módulos para análisis predictivo, análisis de riesgo y simulaciones.

e. **Excel:** Aunque no es un software especializado, es ampliamente utilizado debido a su accesibilidad. Ofrece herramientas básicas de análisis estadístico, como tablas dinámicas, funciones estadísticas y generación de gráficos, siendo ideal para usuarios principiantes o análisis simples. Asimismo, se pueden hacer simulaciones de un gran número de eventos probabilísticos, con enormes ventajas para el aprendizaje de esta disciplina.

f. **Minitab:** Diseñado principalmente para la mejora de procesos y la gestión de calidad. Es popular en industrias que aplican metodologías como Seis Sigma. Su interfaz es muy intuitiva, lo que facilita el análisis estadístico básico y avanzado, incluyendo análisis de varianza (ANOVA), regresiones y control estadístico de calidad.

g. **Tableau:** Aunque se centra más en la visualización de datos, incluye herramientas estadísticas integradas. Es ideal para explorar datos de forma interactiva y crear dashboards visuales que ayuden a comunicar hallazgos clave.

h. **JMP:** Software desarrollado por SAS, orientado a la exploración de datos y la estadística aplicada. Es conocido por su facilidad para realizar análisis gráficos interactivos y su capacidad de modelado predictivo.

Simuladores y Modeladores Matemáticos

Los simuladores y modeladores matemáticos son entornos dinámicos que modelan un concepto, relación, sistema o fenómeno matemático y permiten a los usuarios interactuar con el modelo dentro de ese entorno (Findley, Whitacre y Hensberry, 2017). El marco de posicionamiento de los simuladores Complementar, Mejorar e Impulsar (SED, por las siglas en inglés de Supplement, Enhance, Drive) clasifica a los simuladores en relación a su uso en una lección de aprendizaje (Findley, Whitacre y Hensberry, 2017).

- Complementar (Supplement): el simulador actúa como herramienta para hacer la lección más precisa o eficiente sin alterar su contenido ni tareas. Se utiliza para verificar resultados de actividades tradicionales, como graficar líneas tras cálculos hechos en papel.

- Mejorar (Enhance): el simulador enriquece las lecciones al integrar funciones exclusivas, como dinámicas visuales que fomentan la comprensión, sin modificar el objetivo central. Sirve como apoyo para reforzar conceptos mediante interacción guiada.
- Impulsar (Drive): el simulador transforma la lección al permitir exploraciones autónomas y expandir contenidos. Facilita el aprendizaje significativo a través de descubrimientos, generalizaciones y discusiones basadas en sus características dinámicas.

Algunos simuladores y modeladores matemáticos son:

a. **MATLAB:** es un entorno de programación y software de cálculo numérico utilizado en ingeniería, matemáticas, física y otras disciplinas científicas. Diseñado específicamente para trabajar con matrices y datos numéricos ofrece herramientas avanzadas para análisis, visualización y simulación. Se utiliza a menudo en libros de texto como herramienta didáctica para matemáticas, ciencias e ingeniería de nivel universitario.

b. **Pyton:** es un lenguaje de programación que se utiliza para crear programas en áreas como el desarrollo de software, la ciencia de datos, el aprendizaje automático y el análisis de datos. Se caracteriza por ser fácil de aprender y tener una sintaxis sencilla que imita el lenguaje natural. Cuenta con librerías como NumPy y Matplotlib.

c. **NumPy:** es una biblioteca para el cálculo numérico y científico en Python. Proporciona soporte para la creación y manipulación de arreglos multidimensionales y ofrece una amplia gama de funciones matemáticas de alto rendimiento; esenciales para el análisis de datos, la simulación y el modelado científico.

d. **Matplotlib:** es una biblioteca de visualización de datos en Python que permite crear gráficos 2D y 3D de alta calidad de forma sencilla y personalizable. Es utilizada en análisis de datos, investigación científica, ingeniería y educación debido a su flexibilidad y capacidad para generar representaciones visuales claras y efectivas.

e. **Laboratorio virtual PhET:** es una plataforma interactiva desarrollada por la Universidad de Colorado Boulder que ofrece simulaciones gratuitas para la enseñanza y aprendizaje de ciencias, matemáticas y otros temas relacionados. Su objetivo es proporcionar experiencias prácticas que permitan explorar conceptos teóricos de manera visual, intuitiva y divertida.

Plataformas Colaborativas

Las plataformas colaborativas para el aprendizaje son entornos digitales diseñados para facilitar la interacción, el intercambio de ideas y el trabajo en equipo entre estudiantes y docentes (Veloz, Moreno y Bonilla, 2022). Integran herramientas como foros, chats, documentos compartidos y videoconferencias, lo que promueve la construcción colectiva del conocimiento. En el ámbito de las matemáticas, estas plataformas favorecen la resolución conjunta de problemas, el análisis colaborativo de conceptos y el desarrollo de habilidades críticas al permitir a los estudiantes discutir y compartir estrategias de resolución (Angulo, 2021).

Algunas plataformas colaborativas son:

a. **Moodle:** es una plataforma de gestión de aprendizaje de código abierto, diseñada para crear y administrar cursos en línea. Se utiliza en instituciones educativas y organizaciones para facilitar la enseñanza y el aprendizaje a través de herramientas interactivas.

b. **Google Classroom:** es una plataforma de gestión de aprendizaje en línea gratuita desarrollada por Google para facilitar la creación, distribución y evaluación de tareas en un entorno educativo. Está integrada con otros servicios de Google, como Google Drive, Google Docs y Gmail, lo que permite a los docentes y estudiantes colaborar de manera integrada y organizada.

c. **Khan Academy:** es una plataforma educativa en línea gratuita que ofrece recursos para el aprendizaje en diversas áreas del conocimiento, como: matemáticas, ciencias, programación, economía, historia, arte y humanidades. Facilita el seguimiento del progreso, permite aprender a ritmo propio y ofrece herramientas personalizadas para reforzar conceptos.

d. **Edmodo:** es una plataforma de aprendizaje en línea diseñada para facilitar la comunicación y colaboración entre estudiantes, docentes y padres. Funciona como un espacio virtual donde los docentes pueden compartir materiales, asignar tareas, realizar evaluaciones y brindar retroalimentación. Los estudiantes pueden interactuar, entregar trabajos y recibir orientación, mientras que los padres pueden seguir el progreso de sus hijos.

e. **Plataforma de Colombia Aprende:** es la plataforma educativa oficial del Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Esta red de conocimiento está diseñada para mejorar el acceso a recursos educativos digitales y apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje formales e informales en el país. La plataforma está dirigida a estudiantes, docentes y familias, y tiene como propósito fomentar el uso de las tecnologías digitales en el ámbito educativo.

f. **Plataforma de GeoGebra:** es una plataforma interactiva que permite a los docentes crear actividades matemáticas personalizadas y monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real. Los estudiantes pueden trabajar en ejercicios de álgebra, geometría, cálculo, estadística, entre otros, colaborar entre sí y recibir retroalimentación instantánea. La herramienta fomenta el aprendizaje activo y colaborativo, tanto en el aula como de manera remota.

Aplicaciones para la gamificación

La gamificación es un proceso que consiste en aplicar dinámicas propias del juego en entornos educativos para motivar la interacción y la participación del estudiante en el proceso de aprendizaje (Fernández, 2015). Gamificar no significa jugar, por el contrario, implica emplear elementos del juego en contextos no lúdicos para lograr determinados objetivos o metas de enseñanza (Rodríguez y Mas y Rubí, 2024). La gamificación puede mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el área de las matemáticas si las aplicaciones empleadas siguen principios cognitivos apropiados y cuentan con el acompañamiento del docente durante el proceso (Holguín, Holguín y García, 2020).

Algunas aplicaciones para la gamificación son:

a. **Kahoot:** es una plataforma de aprendizaje basada en juegos que permite a los docentes crear cuestionarios interactivos, encuestas y juegos de preguntas y respuestas. Los estudiantes participan en tiempo real desde sus dispositivos móviles o computadoras, respondiendo preguntas y compitiendo por puntos. Kahoot! utiliza dinámicas de juego como la velocidad y el puntaje para fomentar la motivación y el aprendizaje activo, haciendo el proceso educativo más divertido y dinámico.

b. **Socrative:** es una herramienta de evaluación interactiva que permite a los docentes crear cuestionarios, encuestas y actividades en tiempo real para medir el progreso de los estudiantes. Los estudiantes responden desde sus dispositivos y los resultados se muestran instantáneamente, lo que facilita la retroalimentación inmediata. Socrative incluye opciones como cuestionarios de opción múltiple, verdadero o falso y preguntas abiertas, y permite organizar a los estudiantes en equipos para fomentar la colaboración. Es útil tanto para evaluaciones formativas como sumativas en entornos educativos.

c. **Quizizz:** es una plataforma educativa que permite crear y jugar cuestionarios interactivos en tiempo real. Los docentes pueden diseñar cuestionarios personalizados con preguntas de opción múltiple, verdadero o falso, y más, para evaluar el conocimiento de los estudiantes. A diferencia de otras plataformas, Quizizz permite a los estudiantes responder a su propio ritmo, lo que fomenta la autonomía. Los resultados se presentan de manera divertida y competitiva, aumentando la motivación de los estudiantes. Además, los docentes pueden realizar un seguimiento detallado del progreso de cada estudiante.

d. **Prodigy Math Game:** es una plataforma educativa basada en un juego de rol interactivo que ayuda a los estudiantes a practicar y mejorar sus habilidades matemáticas. Está diseñada para estudiantes de primaria y secundaria, y combina la resolución de problemas matemáticos con aventuras en un mundo virtual. Los estudiantes resuelven problemas matemáticos para avanzar en el juego, ganar puntos y desbloquear recompensas.

La Inteligencia Artificial (IA)

La IA apoya el aprendizaje de las matemáticas al ofrecer herramientas personalizadas que se adaptan al ritmo y nivel del estudiante. A través de sistemas de tutoría inteligente la IAG proporciona retroalimentación instantánea, identifica áreas de dificultad y sugiere actividades específicas para mejorar el rendimiento (Mollick y Mollick, 2023). Además, la IA facilita la creación de ejercicios interactivos y la automatización de evaluaciones, lo que permite a los docentes monitorear el progreso de los estudiantes y ajustar el contenido, de acuerdo con los resultados de aprendizaje planteados. La integración de las herramientas de IA cambia la manera en que se enseña y aprenden las matemáticas, porque el estudiante puede contar con tener un aprendizaje adaptativo, lo que equivale a tener un tutor disponible las 24 horas que explica paso a paso los procesos de resolución de problemas matemáticos y los conceptos, teniendo en cuenta sus fortalezas y áreas de mejora (Quiroz, 2023).

Se describen posibles usos de la IA en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

- Creación de ejercicios personalizados: los docentes proporcionan un tema matemático y la IA genera automáticamente una serie de ejercicios adaptados al nivel y estilo de aprendizaje de cada estudiante. Esto permite a los docentes ahorrar tiempo en la creación de materiales personalizados.
- Generación de explicaciones detalladas: los estudiantes resuelven un problema matemático y la IA ofrece una explicación detallada, desglosando cada paso del proceso y adaptando el nivel de complejidad según la respuesta del estudiante, lo cual, facilita la comprensión de los conceptos.
- Generación de retroalimentación instantánea: durante una actividad de matemáticas la IA evalúa las respuestas de los estudiantes y proporciona retroalimentación instantánea, incluyendo ejemplos adicionales o explicaciones alternativas según el tipo de error cometido.
- Análisis de patrones de aprendizaje: la IA analiza las respuestas de los estudiantes en múltiples ejercicios y genera informes que destacan las fortalezas y áreas de mejora de cada estudiante, ayudando a los docentes a identificar patrones de aprendizaje y adaptar su enseñanza.
- Simulación de problemas matemáticos complejos: los estudiantes interactúan con problemas matemáticos avanzados generados por la IA, que simula diferentes escenarios o variaciones de un problema, lo que permite a los estudiantes explorar múltiples soluciones y enfoques en tiempo real.

Algunas herramientas de IA para la enseñanza de las matemáticas, según (Quiroz, 2023; Estrada, 2024):

a. **ADIMAT:** es una plataforma educativa diseñada para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ofrece recursos educativos digitales adaptativos que se ajustan al nivel de conocimiento y ritmo de aprendizaje del estudiante. Utiliza la IA para personalizar el contenido, brindar ejercicios, problemas y actividades que se alinean con los objetivos curriculares y las necesidades formativas del estudiantado.

b. **CameraMath:** es una aplicación educativa diseñada para ser un apoyo tanto para docentes como estudiantes en las matemáticas. Utiliza el reconocimiento óptico de caracteres (OCR) para leer y dar solución paso a paso a los problemas matemáticos fotografiados por los usuarios. Además de ofrecer la respuesta correcta, la plataforma enseña el proceso de resolución.

c. **MATHia:** esta herramienta en línea proporciona una experiencia de aprendizaje personalizada para cada estudiante; se adapta a su ritmo y nivel de habilidad individual. Esta herramienta se destaca por su enfoque de aprendizaje basado en competencias, por tanto, promueve la comprensión de conceptos matemáticos con ejercicios prácticos e interactivos.

d. **Maple Calculator:** es una calculadora en línea que resuelve problemas matemáticos de cualquier nivel, desde básicos hasta complejos, utilizando IA. Ofrece diversas funciones avanzadas y gráficos para explicar detalladamente el proceso y la solución del problema.

e. **ChatGPT:** es un modelo de inteligencia artificial desarrollado por OpenAI, diseñado para generar respuestas en lenguaje natural. En el aprendizaje de las matemáticas puede ayudar a crear material didáctico, resolver problemas, proporcionar explicaciones paso a paso, clarificar conceptos y ofrecer retroalimentación instantánea, adaptándose a diferentes niveles de competencia.

Reflexiones Finales

Este capítulo ha destacado la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, señalándola como un eje fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. La resolución de problemas no solo se concibe como una técnica pedagógica, sino como un medio para fomentar el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático en diversas situaciones, lo que refuerza la relevancia de este enfoque en el proceso educativo.

Se ha abordado también la necesidad de replantear el quehacer matemático en la experiencia escolar, enfatizando que las prácticas educativas deben evolucionar hacia metodologías en las que los estudiantes no se limiten a repetir procedimientos de rutina y definiciones de memoria, sino que se involucren activamente en el desarrollo de procesos como particularizar, representar, explorar con lápiz y papel y con tecnologías digitales, hacer preguntas, encontrar patrones, formular conjeturas y contraejemplos. Este cambio de paradigma se orienta hacia un aprendizaje más significativo y competencial, donde el conocimiento se construye a través de experiencias concretas que desafían a los estudiantes a pensar y actuar como matemáticos.

El capítulo también ha realizado un análisis sobre la evolución de las investigaciones en este campo, subrayando los estudios que han contribuido a una mejor comprensión de las estrategias que los estudiantes emplean al resolver problemas. Estas investigaciones han permitido una transición desde los enfoques tradicionales hacia modelos que promueven el aprendizaje autónomo y colaborativo, favoreciendo una mayor independencia y participación activa de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje.

Se ha puesto de relieve la importancia de problematizar el estudio de las matemáticas, presentando esta disciplina como un campo de exploración y cuestionamiento, en lugar de un conjunto de reglas fijas o ejercicios rutinarios. Este enfoque fomenta el desarrollo de una mentalidad crítica y creativa en los estudiantes, alentándolos a plantear preguntas y explorar soluciones innovadoras, lo que enriquece su proceso formativo.

Finalmente, se ha subrayado el papel de la tecnología en la resolución de problemas matemáticos. Herramientas digitales como el *software* de geometría dinámica, las calculadoras gráficas y las plataformas interactivas no solo dinamizan el aprendizaje, sino que también amplían las oportunidades para la visualización, la experimentación y la colaboración. Estas tecnologías permiten a los estudiantes identificar patrones, formular conjeturas y construir contraejemplos, promoviendo un enfoque más experimental e innovador en el estudio de las matemáticas.

La integración de la resolución de problemas y las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas ofrece una vía prometedora para transformar la educación, permitiendo a los estudiantes desarrollar competencias clave de manera activa y significativa.

Referencias

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Educación Secundaria.* Secretaría de Educación Pública.

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R. (2001). *Libro para el maestro. Educación Secundaria*. Secretaría de Educación Pública.

Angulo Vilca, P. E. (2021). El aprendizaje colaborativo virtual para la enseñanza de la matemática. Domino de las Ciencias, 7(1), 253-267.

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 469–501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barrera, F. y Santos, M. (2002). Cualidades y procesos Matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Usos de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 166-185).

Baulac, Y., Bellemain, F. et Laborde, J. M. (1988). *Cabri - Géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie*. Cedic.

Ben-Cahim, Loppan, G y Hovan, R. (1989). The roll of visualization in the mathematics currículum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1).

Benitez, D. (2006) *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnologías computacionales*. Tesis Doctoral. Cinvestav-México.

Boletín Oficial del Estado No 158 (3 de julio de 2003). *Currículo de Matemáticas en la ESO.*

Bonelo, Y. (2024). *Operaciones visuales y estructuras de control asociadas a la construcción de conjeturas geométricas mediante el Uso de Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio de Caso de Educadores Matemáticos en Formación.* Tesis Doctoral). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Camacho, M. y Santos, M. (2004). Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases: argumentando la inexistencia de soluciones. *Educación Matemática, 16*(1), 5-27.

Borba, M., Souto, D., & Cunha, J. (2023). Humans-with-Media: Twenty-Five Years of a Theoretical Construct in Mathematics Education. In *Handbook of digital resources in Mathematics Education.*

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375–402.

Camacho Machín, M. y Afonso Martín, M. C. (2007). CAS (Computer Algebra Systems) y software de geometría dinámica. Un ejemplo de aplicación. FPIEM: Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, (8), 9-27.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375–402.

De Guzmán, M. (1994). *Para pensar mejor*. Ediciones Pirámide.

De Olaizola, I., Santos, M. (2004). Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases: argumentando la inexistencia de soluciones. *Educación Matemática*, *16*(1), 5-27.

Dick, T. P., & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making*. National Council of Teachers of Mathematics, NCTM: Reston, VA. ISBN 978-0-87353-641-7.

Dorner, G., Ferrard, J. y Lemberg, (2000). *Visual Mathematics, Illustrated by the Ti-92 and the Ti-89*. Springuer.

Estrada, J. (1998). *La formulación o reformulación de problemas como una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas*. [Tesis de Doctorado no publicada, CINVESTAV- IPN, México]. Departamento de Matemática Educativa.

Estrada Tangarife, L. E. (2024). El impacto de la inteligencia artificial en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica secundaria: una revisión crítica [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.

Fajardo, A. (2023). Mediación de Herramientas Digitales en las Creencias de los Estudiantes sobre el concepto de Probabilidad y su Incidencia en la Resolución de Problemas. Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle.

Fernández, I. (2015). Juego serio: gamificación y aprendizaje. *Comunicación y pedagogía: Nuevas tecnologías y recursos didácticos*, (281), 43-48.

Findley, K., Whitacre, I., & Hensberry, K. (2017). Integrating Interactive Simulations into the Mathematics Classroom: Supplementing, Enhancing, or Driving?.

In E. Galindo & J. Newton, (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1297-1304). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Goldenberg, P. (2000). *Thinking (and talking) about technology in math classrooms*. Education Development Center, Inc.

Goldenberg, E. P. (1996). Habits of mind as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, *178*(1), 13-34.

Goldenberg, E. y Couco, A. (1997). Habits of Mind: An Organizing Principle for the Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 375-402.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87*, 519-524.

Hitt, F. (1997). La modelación matemática con el apoyo de la calculadora graficadora TI-92. En F. Hitt, V. Hernández y M. Villalba (Eds.), *Memorias del VIII Seminario Nacional Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática* (pp. 303-313).

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana de Matemáticas*, *X*(2), 213-223.

Holguín García, F. Y., Holguín Rangel, E. G. y García Mera, N. A. (2020). Gamificación en la enseñanza de las matemáticas: una revisión sistemática. *Telos: revista de estudios interdisciplinarios en ciencias sociales*, *22*(1), 62-75.

Laborde, C. (1995). Designing Task for Learning Geometry and Computer - Based Environment. En L. Burton y B. Jaworsky (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching. A bridge between teaching and learning, Chartwel-Bratt, Sweden.*

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 151-161.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri- Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 283-317.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning* *mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41-69). Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K. y Kehle, P. (2003). From Problem Solving to Modeling: The Evolution of ThinkingAbout Research on Complex Mathematical Activity. En R. Lesh H. y. (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational studies in Mathematics*, *44*(1-2), 87-125.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente.* Labor.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores.

Mollick, Ethan R. and Mollick, Lilach, Using AI to Implement Effective Teaching Strategies in Classrooms: Five Strategies, Including Prompts (March 17, 2023). The Wharton School Research Paper, Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=4391243 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4391243

Monroy, L. (2023). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer año de ingenieria en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales (Tesis Doctoral). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Moreno, L. (2002a). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 87-92).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Niss, M., & Højgaard, T. (2024). *Mathematical Competencies in Mathematics Education: Past, Present and Future*. Springer, Cham. Mathematics Education Library.

Pea (1985). Cognitive technologies for Mathematics education. En A. Schoenfield (Ed.), *Cognitive science and Mathematics education* (pp. 69-122). Lawrence Erlbaum Associates.

Polya, G. (1965). ¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas? Editorial Trillas.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos.

Quiroz Rosas, V. (2023). Aplicaciones de Inteligencia Artificial Aliadas en la Enseñanza de las Matemáticas. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7(4), https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i4.8070

Rodríguez, G. y Mas y Rubí, Y. (2024). Gamificación como estrategia para la enseñanza de la matemática. *Perspectivas*, *12*(23), 63-79.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: Tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM Mathematics Education, 56*(2), 211–222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

Santos-Trigo, M. (2023). Trends and Developments of Mathematical Problem-Solving Research to Update and Support the Use of Digital Technologies in Post-confinement Learning Spaces. In: Toh, T.L., Santos-Trigo, M., Chua, P.H., Abdullah, N.A., Zhang, D. (eds) Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2

Santos, M. y Barrera, M. F. (2005). Delving into conceptual Frameworks: Problem Solving Representations, and Models and Modeling Perspectives. En G. M. Lloyd, J. L. Wilson y S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Santos, M. (2000). *Student's approaches to the use of technology in mathematical problem solving*. Paper presented at the working group Representation and Mathematics Visualization.

Santos, M. (2003a). Hacia una instrucción que promueva los procesos de pensamiento matemático. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa. Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 314-332). Fondo de Cultura Económica.

Santos, M. (2003b). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Venezolana de Matemáticas*, *X*(2), 195-211.

Santos, M. (1998). Problematizar el estudio de las matemáticas: Un aspecto esencial en la organización del currículo y en el aprendizaje de los estudiantes. En F. Hitt, (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370).

Schoenfeld, A. H. (2022). *Why Is It So Hard to Learn and Teach Mathematics?* In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 1–35). Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_10-1.

SEP (2001). *Plan Educativo 2001-2006.* México.

Veloz Segura, V. T., Moreno del Pozo, G. F. y Bonilla Roldán, M. (2022). El uso de herramientas colaborativas en la educación virtual dentro del proceso enseñanza-aprendizaje en estudiantes de bachillerato. Killkana sociales: Revista de Investigación Científica, 6(3), 33-46.

Villa-Ochoa, J., González-Goméz, D., & Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 25-34.

02

Desafíos y Enfoques Innovadores en la Enseñanza del Álgebra Lineal: Una Perspectiva Didáctica y Tecnológica

Leonel Monroy Guzmán
leonel.monroy@correounivalle.edu.co

Introducción

El álgebra lineal resulta una fuente de frustración tanto para profesores como estudiantes. Los profesores pueden sentirse frustrados al intentar explicar conceptos abstractos como espacio vectorial, rango, base, dimensión, dependencia e independencia lineal, y no logran hacerse entender por sus estudiantes. A pesar de que esta asignatura se puede pensar como una de las más sencillas al abordar uno de los problemas más elementales de las matemáticas, la variación lineal, la complejidad de los conceptos puede dificultar su enseñanza. Por otro lado, los estudiantes pueden experimentar frustración al intentar comprender la idea de que todo espacio de dimensión n es isomorfo con R^n, a pesar de ser capaces de operar matrices y resolver sistemas lineales no cuadrados con cierta facilidad. Además, el álgebra lineal es una asignatura obligatoria en muchos planes universitarios, técnicos y tecnológicos, esto genera altos índices de estudiantes reprobados semestre tras semestre, lo que es motivo de preocupación institucional. Este no solo es un fenómeno local, sino que es común en gran parte de las universidades alrededor del mundo (Monroy Guzmán, 2011).

André Revuz (1914-2008), matemático francés, creador de los Institutos de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas IREM, en el prefacio del texto *Sobre la Enseñanza del álgebra Lineal*, manifestó:

> Una preconcepción común entre los matemáticos es que, para enseñar bien las matemáticas, todo lo que se necesita es conocer bien el tema. La enseñanza del álgebra lineal proporciona un sorprendente contraejemplo. La teoría está bien desarrollada, quienes la enseñan la conocen personalmente muy bien ... pero los estudiantes no la entienden. La preconcepción contraria, sostenida por pedagogos que creen que con una pedagogía apropiada se puede enseñar cualquier cosa, es igual de desastrosa. (Dorier, 2000b, p. xv)

Antecedentes Históricos

Históricamente los principales conceptos del álgebra lineal se desarrollan en una continua interacción entre los enfoques Geométrico y Algebraico (Dorier, 2000a). Por más de 20 siglos, la geometría, gracias a la Geometría Euclidiana, presta a las matemáticas no sólo un campo de imaginación, sino de validación de resultados.

Formas de Razonamiento en el álgebra lineal

En Dorier (2000a) se presenta un análisis histórico epistemológico del concepto de espacio vectorial, de este trabajo, Sierpinska (2000) abstrae lo que denomina Formas de Razonamiento, asociadas al lenguaje, que se usan de manera predominante en la resolución de problemas del álgebra lineal. Las Formas de Razonamiento se presentaron en la historia y se manifiestan en las aulas donde se reconstruyen los principales conceptos del álgebra lineal. Sierpinska las denominó Sintético-Geométrico (SG), Aritmético-Analítico (AA) y Analítico-Estructural (AE); según Sierpinska, esta clasificación obedece a la naturaleza misma del álgebra lineal en tanto guardan estrecha relación con los lenguajes que debe usar o privilegiar quien se enfrenta a resolver un problema relacionado con el álgebra lineal.

El desarrollo histórico del concepto de vector deja una traza que permite verlo en su estado inicial en la geometría, como segmento, pasando luego a su calidad de segmento dirigido. En su proceso evolutivo o metamorfosis, se presenta como un objeto "aritmetizado" desde la geometría analítica. Finalmente, y en un ambiente de naturaleza analítica, como el de los espacios normados de dimensión infinita, emerge el concepto de Espacio Vectorial y con él, la desaritmetización de los vectores.

Antecedentes de Investigación

La investigación en el ámbito de la Educación Matemática, sobre el álgebra lineal, según Stewart, Andrews-Larson y Zandieh (2019), se puede clasificar en tres temáticas: (1) En cuanto a la enseñanza: el enfoque geométrico y el enfoque formal o axiomático; (2) Investigación sobre la comprensión de los estudiantes alrededor de conceptos del álgebra lineal considerados claves; (3) El papel de la tecnología en la instrucción y la innovación.

En cuanto a la enseñanza: el enfoque geométrico y el enfoque formal o axiomático

Harel (2019) señala que, en cuanto al uso del enfoque geométrico en la enseñanza del álgebra lineal, se pueden determinar dos posiciones, un tanto contradictorias; por un lado, quienes argumentan que con el uso de la geometría los estudiantes aprenden mejor las nuevas ideas del álgebra lineal, por otro lado, algunos investigadores que cuestionan la eficiencia del enfoque geométrico en la enseñanza del álgebra lineal. Harel (2019), a partir del análisis de seis libros de texto, con gran circulación a nivel mundial, plantea lo que denominó variantes del enfoque geométrico, con el objetivo de describirlas e intentar establecer posibles dificultades y beneficios. Aclara inicialmente que la idea de enfoque geométrico depende de si se trata de la idea de geometría del estudiante o del profesor, finalmente presenta un total de ocho variantes: generalización, reducción, aplicación, representación metafórica, representación literal, investigación autónoma, terminología basada en el espacio y geometría dinámica.

Un ejemplo de la variante *generalización* se presenta cuando el estudiante asume como paralelos o colineales a los vectores, sin importar su naturaleza, que forman un conjunto linealmente independiente de dos vectores, o dicho en otros términos, dos polinomios linealmente independientes son colineales. La variante *reducción* consiste en ejemplificar en el plano o el espacio conceptos generales como: combinación lineal, conjunto generado, subespacio o teoremas como el de complemento ortogonal entre el espacio fila y el espacio nulo de una matriz. La variante *solicitud* hace referencia a la geometría como aplicación; como es el caso de las formas cuadráticas. La variante *de representación literal* consiste en interpretar en lenguaje simbólico las ideas geométricas relativas al álgebra lineal y viceversa; la potencial fluidez cognitiva que brinda esta variante se privilegiará en los diseños de intervención que se emplearán en esta investigación, una tarea importante será identificar cómo se transforma esta variante con el uso coordinado por sistemas de cálculo algebraico CAS (por sus siglas en inglés) y sistemas de geometría dinámica (por sus siglas en inglés DGS). Se presenta un ejemplo tomando como punto de partida el problema planteado en (Harel, 2019, p. 1035):

¿Existe solución para el sistema $Ax = b$, dado cualquier vector b? Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Una manera de emplear la variante *representación literal* requiere que el resolutor encuentre la equivalencia entre el enunciado anterior y algún interrogante con enfoque geométrico, como: ¿cualquier vector b del espacio es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A?, ¿cualquier vector b del espacio es generado por los vectores columna de la matriz A?, ¿cualquier vector b del espacio pertenece al espacio columna de la matriz A? O simplemente, ¿las columnas de A generan todo R^3? Para responder cualquiera de estos interrogantes, incluyendo el original, se puede plantear la matriz ampliada (aumentada) (b) y escalonar para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & b_1 \\ 0 & 14 & -10 & 4b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2b_1 - b_2 + 2b_3}{2} \end{array}\right)$$

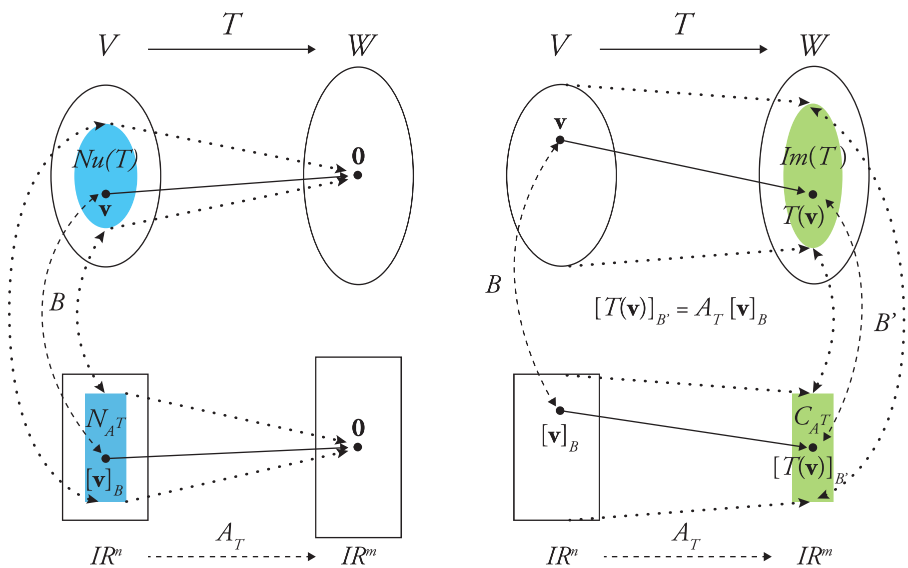
De esta forma escalonada, el resolutor puede concluir que el plano: $2x - y + 2z$ es el espacio columna de la matriz A; es en esta afirmación donde finalmente emerge la variante *representación literal*.

En general, los ejemplos de las variantes hasta ahora representan un beneficio limitado a R^2 o R^3; lo que podría representar una fuente de dificultad para espacios de diferente naturaleza como los conformados por polinomios o matrices (Harel, 2017).

La variante *Representación metafórica* hace referencia a una especie de síntesis gráfica de un conjunto de ideas conectadas, que puede ser tan amplio como el que se muestra a continuación:

Figura 1.

Ejemplo de la variante representación metafórica del enfoque geométrico.



Nota: Tomado de *Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas* (Martínez y Sanabria, 2014, p. 313).

La variante *investigación autónoma* hace referencia al enfoque geométrico desde la perspectiva del profesor o investigador que plantea una intervención en el aula centrada en el plano y el espacio. Harel (2019) menciona que solo conoce tres intentos de investigación con esta orientación. Esta investigación pretende sentar las bases de un diseño de intervención con esta variante como principio.

La variante *terminología basada en el espacio* hace referencia a las denominaciones empleadas para un número importante de conceptos e ideas generales, como es el caso de: combinación lineal, dependencia lineal, espacio vectorial, proyección, complemento ortogonal, vector de coordenadas, entre otros. Harel (2019) cita una decena de artículos que reportan las dificultades, para los estudiantes, provenientes de la terminología empleada. La variante *geometría dinámica* la califica como emergente y citando algunos artículos de amplia difusión, destaca su potencial para convertirse en un verdadero aliado para la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal. En Sierpinska (2000) se realiza un experimento de enseñanza del álgebra lineal con el apoyo del programa de geometría dinámica Cabri®[3], con el propósito de familiarizar a los estudiantes con algunos conceptos básicos del álgebra lineal, privilegiando su naturaleza geométrica a través del propicio ambiente ofrecido por Cabri®, con la intención de retardar su manipulación a través de sus representaciones de carácter aritmético o algebraico. A pesar de la estrategia, los estudiantes no lograron el objetivo de aprendizaje trazado por los investigadores: entender la definición axiomática del concepto de Transformación Lineal. Según Sierpinska, la frustración se da por dos razones principales: las altas pretensiones del objetivo por parte del profesor investigador y la tendencia de los estudiantes de enfrentar las actividades propuestas aplicando alguna regla sin filtro alguno. La práctica por parte de los estudiantes llevó al grupo de Sierpinska a considerarla un obstáculo que denominó *pensamiento práctico* que, aunque necesario, si se privilegia en contraposición del *pensamiento teórico*, trae como consecuencia que los estudiantes no comprendan los conceptos del álgebra lineal que se ponen en juego en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal en general.

El enfoque formal de la enseñanza se caracteriza principalmente porque le asigna un peso importante a la demostración, entre las metas a alcanzar, según Sierpinska (2000), estos ideales esperados por los diseñadores de un curso o actividades de álgebra lineal se convierten en fuente de frustración, principalmente,

3. Software comercial de geometría dinámica, ver (www.cabri.com).

por la madurez académica alcanzada por los estudiantes a la hora de tomar este curso. En forma más específica Stewart y Thomas (2019), manifiestan que esperar que los estudiantes, al final de un primer curso de álgebra lineal, alcancen los conocimientos matemáticos y metamatemáticos que se juntan en cada paso de una demostración, resulta poco realista. Según Stewart y Thomas (2019) para un amplio porcentaje de los estudiantes, los métodos de demostración son desconocidos; para ellos existen dos tipos de demostración: las que prueban y las que explican. Sobre las primeras queda la sensación de que no tienen sentido para ellos, pero asumen que son verdad y, en algunos casos, deciden memorizarlas para estar listos a la hora de la evaluación. Las pruebas que explican, las encuentran valiosas porque les ayuda con la comprensión y convicción personal.

Comprensión de los estudiantes de algunos Conceptos Claves del álgebra lineal

En el artículo de revisión (Stewart et al., 2019), se eligieron 54 artículos relativos al álgebra lineal, de las 20 principales revistas de educación matemática en inglés; de los cuales el 67% se centró en la comprensión de los estudiantes de algún contenido o franja de contenidos. El 50% de ellos se enfocó en la franja de contenido relacionada con la dependencia e independencia lineal y conjunto generado y generador, sorprende que, en los sistemas de ecuaciones lineales, un tema que resulta transversal en los cursos de álgebra lineal, se enfoque un porcentaje tan bajo de publicaciones, 5% aproximadamente.

El concepto de Espacio Vectorial ha sido catalogado como central para el álgebra lineal, Parraguez (2009), Stewart (2017) puesto que en él subyacen gran parte de los conceptos que forman su amplio cuerpo teórico: base, dimensión, conjunto generado y generador, rango, dependencia e independencia lineal y combinación lineal; de este último concepto, Monroy Guzmán (2011) dice al respecto:

> La síntesis de la idea básica del álgebra lineal, como disciplina de pensamiento matemático, se encuentra en reconocer que todos los elementos de un conjunto se puedan formar por la combinación lineal de un número finito de ellos (en el caso de los espacios de dimensión finita); esta idea se afirma cuando logramos separar la menor cantidad de objetos del conjunto con los que se puede lograr este sorprendente resultado. La evolución final se da cuando se establece la relación entre el conjunto inicial, el número de elementos del conjunto generador y R^n. (p. 12)

En (1.4) se realiza una síntesis de las principales problemáticas reportadas por los investigadores y como parte del trabajo final se analizaron, de manera crítica, los diseños de intervención que aparecen o se describen en la literatura escudriñada; los insumos obtenidos en esta etapa hacen parte de las hojas de trabajo que conforman el diseño de intervención de esta investigación. Por ejemplo, en Roa-Fuentes y Oktaç (2010) se presentan posibles fundamentos para el diseño de intervenciones en el aula, para el concepto de transformación lineal, a través de dos posibles rutas cognitivas que el estudiante pueda seguir; a este proceso se le llama Descomposición genética de saberes matemáticos y hace parte de la etapa de análisis teórico del enfoque de investigación APOE, ampliamente empleado en la investigación en educación matemática. La descomposición genética que presenta Roa-Fuentes y Oktaç (2010) se centra en la definición formal del concepto, marginando las representaciones geométricas y tomando como requisito una comprensión madura de los conceptos de función y espacio vectorial; lo que implica un presupuesto muy alto para considerarse una trayectoria viable o en el mejor de los casos lo limita a ser empleado para diseños orientados a cursos muy especializados. Según Roa-Fuentes, partiendo del concepto de función, ampliando la posibilidad de que el dominio y el codominio sean espacios vectoriales, un buen manejo de las ideas constitutivas de la combinación lineal y empleando conscientemente el cuantificador universal, se conforma una de las posibles rutas para que un estudiante construya el concepto de transformación lineal.

El Papel de la tecnología en la Instrucción y La innovación en la enseñanza del álgebra lineal

Uso de Herramientas digitales tipo CAS. La génesis de lo que hoy se denomina programas de Sistemas de Cálculo Algebraico (CAS por sus iniciales en inglés) se puede anclar en 1950, así como el uso de CAS en cursos de pregrado se da, en forma leve, en el año 1970. Para 1982, ya algunos investigadores en educación matemática se preguntaban de qué manera había que transformar los contenidos de cursos de matemáticas de primer año de pregrado, de tal forma que se diera espacio al uso de CAS (Hillel, 1993). Hillel ya mostraba cómo el uso de CAS puede hacer que el estudiante mitigue la carga de realizar cálculos rutinarios y así, enfocarse en otros aspectos más cercanos a los conceptos relacionados con el álgebra lineal, pero a su vez advierte que se tiene la inclinación de perder lo ganado, haciendo que el estudiante tenga que trabajar con matrices muy grandes, lo que trae como consecuencia que el estudiante cometa errores al ingresar los datos de la matriz.

El uso de CAS hace que los estudiantes puedan acceder a conceptos más complejos que estaban prácticamente ocultos en la enseñanza tradicional para todo tipo de estudiantes; ahora estos se vuelven accesibles (Jin, Bi y Zhao, 2011; Sacristán et al., 2010). Al respecto, Jin et al. (2011) señalan que el uso de un *software* que ayude con algunos algoritmos, hasta ahora implementados de manera obligada con papel y lápiz, requisito reconocido como inoficioso actualmente, permite poner al alcance de los estudiantes conceptos que, sin el uso de estos, no podrían asomarse en las aulas de clase. Al respecto, Lavicza (2010) resaltó que uno de los matemáticos que participó en su encuesta dijo:

> La enseñanza relacionada con CAS debería usarse para alentar a los estudiantes a explorar las matemáticas. Las matemáticas más sofisticadas ("de la vida real") se vuelven accesibles a través de CAS: por ejemplo, la programación lineal se puede enseñar en una clase introductoria de álgebra lineal. (Lavicza, 2010, p. 169)

Dogan-Dunlap (2010), en su trabajo, muestra que las formas de razonamiento que plantea Sierpinska (2000) aparecen en el análisis de las respuestas construidas por un grupo de 42 estudiantes, ante un grupo de actividades que diseñó alrededor de los conceptos de dependencia e independencia lineal, combinación lineal y las nociones de espacio y subespacio vectorial, para el caso del plano y el espacio, R^2 y R^3 respectivamente. Las actividades que propuso las dividió en dos grupos, con la diferencia de que en una primera actividad los estudiantes pueden usar dispositivos tecnológicos tipo CAS y en la segunda se incorpora, además, un programa tipo sistema de geometría dinámica DGS. Ninguno de los dos programas contaba con las dos vistas integradas de manera dinámica, es decir, en la forma que se presenta actualmente en programas como GeoGebra. Los autores afirmaron que el uso del DGS potenció en los estudiantes no solo el uso del método deductivo a partir de axiomas y otros, sino que potenció, en un gran porcentaje de estudiantes, la flexibilidad cognitiva (Dorier y Sierpinska, 2001); esto es, pasar de un modo de representación semiótica a otro a través de las formas de razonamiento mencionadas anteriormente. Dogan-Dunlap (2010) deja planteada también la idea de que se debe estudiar el efecto de las representaciones geométricas en el aprendizaje del álgebra lineal, señalando además que, el poder de las representaciones geométricas parece potenciar su influencia cuando se encuentran simultáneamente con las representaciones aritméticas y algebraicas; para estudiar este fenómeno se propuso en este trabajo que GeoGebra es una herramienta con las características deseadas.

Una característica importante del uso de CAS son sus efectos a largo plazo, el más sustancial es la empleabilidad que genera el hecho de responder a algunas demandas relativas al siglo XXI, en cuanto a competencias tecnológicas; Marshall, Buteau, Jarvis, y Lavicza (2012), al respecto señalan:

> Por lo tanto, esta conjetura de Lavicza de que la integración de CAS puede ser ayudada por las futuras necesidades de empleo de los estudiantes se ve reforzada por los hallazgos de la revisión de la literatura sobre habilidades transferibles relacionadas con CAS. (p. 431)

Más adelante, Cooley et al. (2014) presentan, desde el punto de vista de los estudiantes, lo importante que es la mediación de la tecnología, el trabajo en grupo y las aplicaciones a temas de interés, refiriéndose a aquellas que son aplicaciones de actualidad del álgebra lineal en temas relacionados con las ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, las denominadas áreas STEM, por sus siglas en inglés.

En el trabajo de Caridade, Encinas, Martín-Vaquero y Queiruga-Dios (2015), se aboga por el uso de CAS, argumentando que existen problemas muy interesantes en el álgebra lineal que se podían poner en juego siempre y cuando se tenga disponible este tipo de programas. Como se señaló en el documento de Marshall et al. (2012), uno de los obstáculos que esgrimían algunos profesores, estaba relacionado con la sintaxis de los programas CAS; ya para el 2015 según Caridade et al. (2015) el lenguaje se hacía más amable y de paso familiarizaba al estudiante con el lenguaje matemático formal.

La enseñanza del algoritmo que se empleaba para calcular la raíz cuadrada fue removida de las aulas de matemáticas, parece haber un acuerdo generalizado en que, basta con saber que se trata de otro número real del mismo tipo, en el caso de los reales positivos, con la particularidad de que su cuadrado resulta ser el número del cual es raíz. Este no es el caso de algoritmos tan tradicionales, que aún se resuelven preferiblemente a papel y lápiz, por ejemplo, aprender a factorizar polinomios cuadráticos y de otro orden. En el caso particular de los cursos de álgebra lineal, los algoritmos para resolver sistemas de ecuaciones lineales están altamente cargados de cálculos numéricos manuales, asunto que se corrobora revisando las secciones de ejemplos y ejercicios de la gran mayoría de los libros de texto del álgebra lineal (Lindner, 2003). Así como la enseñanza del algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número, otros tantos algoritmos deben ir cediendo espacio a las tecnologías para que estas realicen las tareas rutinarias, aceptando en cierta medida, que resulta innecesario saber calcularlas con papel y lápiz, y que, por el contrario, es más fructífero que el estudiante dé cuenta de los resultados ofrecidos por la herramienta. Por ejemplo, en el caso de la raíz cuadrada, debe responder a preguntas como: ¿qué relación existe entre un número y su raíz? y que en general, a partir del resultado y sus nociones, pueda verificar sus producciones con el mismo instrumento. En efecto, reconociendo las potencialidades que ofrecen los programas tipo CAS, se debe tratar de responder ¿qué algoritmos confiar a estos programas? y ¿cómo cambian los procesos demandados a los estudiantes? La encuesta internacional de Marshall et al. (2012) muestra que quienes usaban los programas tipo CAS, liberaban a sus estudiantes de las cargas computacionales permitiendo enfocarse en actividades más esenciales. En el caso del álgebra lineal, mientras un profesor resuelve un sistema por cualquiera de los métodos tradicionales, dedicando un porcentaje alto de sus clases a estos procesos algorítmicos, con los programas tipo CAS, se pueden resolver decenas de estos y enfocar la atención de los estudiantes en las nociones del álgebra lineal que subyace en las respuestas ofrecidas por el programa. Los programas tipo CAS han demostrado tener gran impacto en el campo de acción de la ingeniería; hoy día muchos problemas son resueltos gracias al ingenio humano potencializado por este tipo de herramientas; a esta fusión entre humano y máquina se le conoce como competencia computacional (Se, Ashwini B, Chandran, & Soman K.P, 2015).

Sistemas de Geometría Dinámica: "La nueva realidad de los Objetos Matemáticos". En Santos-Trigo (2020), las herramientas digitales de acción que se pueden emplear para representar, explorar y trabajar tareas matemáticas, se denominan Sistemas de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en inglés); como es el caso inicial de GRAPHER, Cabri® y actualmente GeoGebra. La abstracción situada es, según Noss y Hoyles (1996a), el principio fundamental de los DGS. Este tipo de abstracción se da, aunque no de manera exclusiva, gracias a las potencialidades que surgen al sumar las características de la herramienta, los conocimientos, motivaciones e interacciones de quien aprende y la intención de quien diseña la actividad a enfrentar; el trabajo con DGS demanda del estudiante el uso de comandos, construcciones geométricas, la sintaxis propia de las hojas de cálculo y en general un lenguaje que lo aproxima al uso de la terminología propia de las matemáticas. Noss y Hoyles presentan así una forma distinta, entre muchas otras ya existentes, de definir la abstracción como proceso o mecanismo que implica abstracción en la situación, no alejada (abs-tracción) de ella. La abstracción situada es entonces la forma "cómo los alumnos construyen significados matemáticos en la red de un entorno particular que, a su vez, da forma a la forma en que se expresan las ideas" (Noss y Hoyles, 1996a, p. 122); lo que califican como una especie de comunicación humano-máquina. En el caso particular del concepto de dependencia lineal, al respecto Aranda y Callejo (2010), afirman que:

> Los resultados muestran que el uso simultáneo del lenguaje analítico y geométrico, así como la interacción dinámica con estos sistemas de representación en un contexto tecnológico, pueden favorecer las generalizaciones necesarias para desarrollar los procesos de abstracción reflexiva que inciden en la elaboración del concepto de dependencia lineal. (p. 129)

Aranda y Callejo (2010) concluyen que plantear una trayectoria hipotética de aprendizaje en un medio de matemáticas dinámicas, potencia la adquisición de los conceptos de dependencia e independencia lineal. Con respecto a la conclusión anterior, se añade que, aunque se les llama Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), en realidad no son solo los objetos relativos a la geometría los que adquieren "vida". Las matemáticas tradicionales se venían acompañando de representaciones estáticas, pero gracias a programas como GeoGebra, estas parecen evolucionar en cuanto a su representación; Moreno-Armella y Hegedus (2013) describen lo que en este trabajo se llama el "nuevo realismo de los objetos matemáticos"; al respecto, uno de los autores afirmó que:

> En el caso de las computadoras, estos medios llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos. Permiten, además, generar una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas y traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud. (Moreno-Armella, 2002, p. 83)

El "nuevo realismo de los objetos matemáticos" no es un privilegio de los objetos de la geometría; las funciones, los vectores, las matrices, etc., adquieren dinamismo y realidad en estos entornos. Aguilar-Magallón (2018) afirma que el uso de DGS transforma algunas heurísticas en poderosas herramientas, lo que representa un hallazgo de lo que se plantea a partir de las ideas de Hegedus y Moreno-Armella (2009), Moreno-Armella y Hegedus (2013) y Noss y Hoyles

(1996b). Esto es, el símbolo que representa un objeto se enriquece; al respecto Moreno-Armella y Hegedus (2013) dice: "Podemos hablar de inscripciones matemáticas como las marcas externas de los símbolos, pero no podemos olvidar que símbolo y referencia son como caras de una moneda: cada una es la condición de existencia de la otra" (p. 101).

En consecuencia el objeto se transforma, al menos para el observador, pues es a través de los símbolos que podemos establecer las características del objeto matemático, características que antes no se habían revelado, por carencias del observador o del agente representante; estas representaciones que han cobrado "vida", léase, dinamismo en un DGS y su interacción con las representaciones tradicionales ya conocidas, hace que este "todo" se tenga que estudiar de manera holística, para documentar todas las potencialidades que brinda a aquellos que tienen oportunidad de interactuar con este evolucionado objeto.

Klasa (2010), desde su propia experiencia usando Cabri® y Maple, señala las múltiples posibilidades que brinda un DGS para mejorar la forma de trabajo de los estudiantes y su comprensión de los principales conceptos del álgebra lineal. Klasa (2010) afirma además que, en esta tarea, el *software* Cabri® le resulta más productivo que Maple, en cuanto que las representaciones dinámicas interactúan en simultánea con otras formas de representación. En esta misma dirección, Caglayan (2015) afirma que la posibilidad de representar situaciones problemas en diferentes contextos, es una de las potencialidades que brindan los DGS como GeoGebra. Los estudiantes pueden construir modelos que cumplen con las características exigidas por el problema; si estas resisten la "prueba del arrastre" se les llama *construcciones dinámicas*. Cuando construir modelos de las definiciones o problemas planteados se convierte en una estrategia recurrente, Aguilar-Magallón (2018) afirma que la competencia de proponer problemas evoluciona al presentarse al inicio del problema, durante el desarrollo del problema y después de solucionarlo.

Principales problemáticas señaladas: revisión de literatura

Gran parte de las problemáticas alrededor del álgebra lineal, que planteó en 1990 el *Grupo de Estudio del Currículo de álgebra Lineal* en Norte América, siguen aún vigentes (Carlson, Johnson, Lay, y Porter, 1993). Por un lado, ya para esa época era notable el creciente requerimiento del álgebra lineal en la formación de estudiantes en una, cada vez más amplia, lista de planes universitarios y tecnológicos; dos décadas después se reportaba que la enseñanza del álgebra lineal se impartía en forma casi generalizada en la educación terciaria (Oktaç y Trigueros, 2009). De otro lado, el Grupo de Estudio señalaba que los programas de álgebra lineal en las diferentes instituciones donde se ofrecía no respondían a las necesidades básicas de los estudiantes, ni a las demandas de formación provenientes de las directivas de los diferentes planes de donde estos eran usuarios. Las demandas se fundamentaban, principalmente, en el creciente número de aplicaciones del álgebra lineal, tendencia que continúa de manera sostenida. Se señalaba, por parte del Grupo de Estudio, la desconexión del curso con las aplicaciones, en lo que coinciden, más recientemente, con Caridade et al. (2015), Marshall et al. (2012) y el desconocimiento de los avances en tecnologías tipo CAS por parte de los instructores.

El uso de este tipo de *software* ya tenía, para ese momento, un recorrido de más de 20 años en la enseñanza de las matemáticas y aún no se notaba su influencia, ni aprovechamiento en la enseñanza del álgebra lineal (Carlson et al., 1993). Esta problemática sigue reportándose de manera recurrente en la literatura académica concerniente a la enseñanza del álgebra lineal.

Educación Tradicional: Énfasis Algorítmico

Ya en el prefacio de la obra de George Pólya (1945), se llama la atención sobre los énfasis tradicionales y equivocados de la enseñanza de las matemáticas en general: "Si se dedica su tiempo a ejercitar en sus alumnos operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, perderá la oportunidad de participar positivamente en su formación" (Polya, 1945, p. VI). Para lograr el efecto contrario en los estudiantes, Pólya afirma que, con el planteamiento de problemas adecuados a sus conocimientos y con la ayuda de preguntas estimulantes, se podría despertar en los alumnos el gusto por el pensamiento independiente.

De acuerdo con Schoenfeld (2016), los exámenes estandarizados de la época en que se publicó por primera vez este trabajo (1992), demuestran la omnipresencia de la práctica que se enfoca en el contenido, desde la cual se asume lo que sabe el estudiante en términos de los fragmentos de la materia que domina, desde esta perspectiva se asume el conocimiento del estudiante como la suma de estas partes:

> Una consecuencia de experimentar el currículo en pedazos pequeños es que los estudiantes aprenden que se les proporcionarán respuestas y métodos a los problemas; no se espera que los estudiantes descubran los métodos por sí mismos. Con el tiempo, la mayoría de los estudiantes llegan a aceptar su papel pasivo y a pensar en las matemáticas como "transmitidas" por expertos para que las memoricen (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; National Assessment of Educational Progress, 1983). Citados por (Schoenfeld, 2016).

En el informe que se menciona en la cita anterior, se documenta que cerca de un 50% de los estudiantes respondieron que aprender matemáticas consiste en memorizar y el 90% estuvo de acuerdo con que siempre hay una regla a seguir para resolver un problema.

Jin et al. (2011) describen lo que se llama en este documento la enseñanza tradicional del álgebra lineal, en lo que concierne a lo que se ha denominado la problemática del énfasis algorítmico de los cursos de álgebra lineal. Jin et al. (2011) manifestaban que, en general los textos guía, como se conoce al libro que el profesor u orientador del curso recomienda a los estudiantes para ceñirse a él, en la mayoría de los temas, privilegian los procesos algorítmicos y la memorización de técnicas; por ejemplo, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, caen en una serie de claves o trucos para reconocer cuándo un sistema tiene, una, infinitas o ninguna solución; el truco parece ser efectivo porque más adelante permitirá identificar en qué casos un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. Este tipo de prácticas, que hoy sobreviven en un porcentaje preocupante, se instalan en lo que Benítez Mojica (2006) señala como memorización de técnicas para resolver actividades rutinarias:

> Aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, hacer conjeturas y formular contra ejemplos. (Benítez Mojica, 2006, p. 6)

Desde principios del siglo XX, la psicología puso interés en cómo los individuos aprenden matemáticas; se ocuparon entonces de la importante misión de trazar principios para el diseño de tareas, mientras que los profesores de matemáticas se ocupaban de pensar y repensar cuál debía ser el contenido a enseñar. La investigación en cuanto a cómo enseñar las matemáticas, surge en la comunidad matemática, solo a partir del segundo lustro de la década de los sesenta (Kieran, Doorman, y Ohtani, 2015). El modelo de diseño de tareas resultante, basado en la repetición y emulación (Uicab y Oktaç, 2006), que por tanto tiempo pareció dar buenos resultados, es una práctica que permanece inmóvil entre los profesores y, aunque en el medio investigativo la evolución en la línea de diseño de tareas ya ha superado varias etapas, estos resultados aún no impactan la práctica. En el caso particular de los cursos tradicionales de álgebra lineal, los estudiantes aprenden un recetario: cómo escalonar una matriz, cómo identificar el tipo de solución, cómo usar el algoritmo de la matriz ampliada para encontrar la inversa de una matriz, cómo calcular los valores y vectores propios, cómo diagonalizar una matriz, entre otras.

En el trabajo reportado en Se et al. (2015), se plantea la alternativa del modelo de clase invertida para la enseñanza del álgebra lineal, sugiriendo que los profesores deben crear videos tutoriales con los temas que habitualmente intentan enseñar a través de exposiciones magistrales, práctica que califican como ineficaz pues, "Los alumnos pueden simplemente olvidar lo que se ha dicho 10 minutos atrás" (Se et al., 2015, p. 2); esto es lo que logran comprobar, reiteradamente, los profesores que creen que al conectar ideas dentro de sus largos discursos, simultáneamente sus estudiantes también lo lograrán. Por ejemplo, los conceptos de dependencia e independencia lineal, son de los más referidos en la investigación alrededor del álgebra lineal y con frecuencia, se reporta que son asociados por los estudiantes con un procedimiento algorítmico sin atribuirle el significado, lo que, en efecto, no permite reconocer el papel protagónico en la comprensión de otros conceptos estructurales del álgebra lineal, para los cuales resulta ser importante tener claro su valor conceptual (Aranda y Callejo, 2010); en este sentido, el profesor para "ayudar" a sus estudiantes recurre a frases como: "si el sistema homogéneo tiene única solución es linealmente independiente (LI) y en caso contrario es linealmente dependiente (LD)".

El énfasis en los algoritmos, que caracteriza la enseñanza que se ha denominado como tradicional, logra que el estudiante mecanice, mientras le son útiles, un buen número de técnicas, paso a paso y procesos, como los ya descritos, pero sin acompañarlos de la consistencia conceptual que los une; a este fenómeno lo describe Moreno-Armella (2021) como la desconexión de la *fluidez Instrumental* con la *fluidez conceptual*.

El problema de la falta de Conocimientos Previos

Dogan-Dunlap (2006) muestra, a través del análisis de algunas tareas propuestas a estudiantes, la problemática que posiblemente se debe a la falta de conocimientos previos en teoría de conjuntos. En diferentes momentos de un curso introductorio de álgebra lineal, es necesario poder interpretar la regla que define un conjunto para dar a conocer uno o más de sus elementos, y realizar algunas muestras para determinar, algunas veces por simple inspección, si un elemento pertenece o no a un conjunto y concluir, por ejemplo, que el conjunto no es un Subespacio Vectorial. Dogan-Dunlap (2006) afirma que el álgebra lineal usa un lenguaje propio de la teoría de conjuntos en tareas como, encontrar ejemplos particulares de elementos de un conjunto, escribir por comprensión un conjunto e identificar la diferencia entre subconjunto y pertenencia, entre otros. Concluye que los estudiantes que llegan a los cursos de álgebra lineal carecen de la comprensión de la mayoría de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Él mismo, unos años después, reporta nuevamente esta misma carencia y le adiciona la falta de conocimientos básicos de la geometría analítica, la carencia de conocimientos básicos de teoría de conjuntos lo señala también más recientemente Cárcamo Bahamonde, Fortuny Aymemí y Gómez y Urgellés (2017).

Problema del Formalismo

El obstáculo del formalismo, desde la mirada de Dorier (2002), consiste en el uso de los principales conceptos abordados en el álgebra lineal, pero sin una lógica clara a la hora de argumentar o dar una respuesta; la explicación del fenómeno, según lo relatado a través del documento, se debe a los objetivos esperados en el curso y al uso precoz del lenguaje técnico (Sierpinska, 2000). La idea de obstáculo del formalismo, también se le atribuye al considerable número de axiomas, teoremas y sobre todo de innumerables definiciones por cada sesión de clase del álgebra lineal (Bagley y Rabin, 2016). En este sentido, los estudiantes argumentan que la mayoría de los temas les demanda un nivel de abstracción más elevado, el cual desconocían hasta el momento y hace que sientan que el curso no tiene conexión con sus conocimientos previos ni con sus experiencias en las matemáticas (Dogan-Dunlap, 2010).

Sincretismo

La investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal ha señalado, reiteradamente, como una de las fuentes principales de dificultad, a la cantidad de conexiones lógicas que existen entre los principales conceptos del álgebra lineal, las cuales deben hacer los estudiantes en un tiempo récord. Basta revisar las secciones de libros de textos tradicionales dedicadas a los llamados teoremas de resumen:

Figura 2.

Teorema de resumen de dos libros de textos tradicionales.

Teorema 8.1.7 **Teorema de resumen (punto de vista 9)**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas las demás son ciertas):

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) Para cada vector $\mathbf{b}$ de dimensión n, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

xi) La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

xii) Cero *no* es un valor característico de A.

Nota: Imagen tomada de Stanley I. y *Grossman S.* (2012). Álgebra lineal (p. 557). Sexta edición. University of Montana. University College London.

Teorema 4.17 **El teorema fundamental de las matrices invertibles: versión 3**

Sea A una matriz de $n \times n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a. A es invertible.
b. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
c. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
d. La forma escalonada reducida por renglón de A es I_n.
e. A es un producto de matrices elementales.
f. $\operatorname{rank}(A) = n$
g. $\operatorname{nulidad}(A) = 0$
h. Los vectores columna de A son linealmente independientes.
i. Los vectores columna de A generan $\mathbb{R}^n$.
j. Los vectores columna de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.
k. Los vectores renglón de A son linealmente independientes.
l. Los vectores renglón de A generan $\mathbb{R}^n$.
m. Los vectores renglón de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.
n. $\det A \neq 0$
o. 0 no es un eigenvalor de A.

Nota: Imagen tomada de Poole, D. (2011). Álgebra Lineal. Una introducción moderna (p. 307). Tercera Edición. Cengage Learning Editores.

El problema del sincretismo es algo a lo que no se le puede hacer frente, como se muestra en el ejemplo anterior, hace parte de la naturaleza misma del álgebra lineal; sin embargo, Uicab y Oktaç (2006) señalan que muchos de los errores cometidos por los estudiantes se deben precisamente a la falta de conexiones entre los conceptos, también afirman que si los profesores o investigadores detectaran cuáles son aquellas conexiones que se deben privilegiar, se lograría una mejor comprensión.

Otras problemáticas reportadas

Una problemática importante reportada es la falta de conciencia por parte de los estudiantes con respecto a mecanismos de metacognición; dice Sierpinska (2000) que aun teniendo las posibilidades que brinda el *software* de geometría dinámica, en este caso Cabri®, los estudiantes no parecían preocupados por verificar sus afirmaciones, habiendo una oportunidad explicita brindada por las características de las herramientas empleadas.

Planteamiento del problema y Preguntas de investigación

La enseñanza tradicional, por un lado, fomenta en los estudiantes el Pensamiento Práctico mientras constriñe el Pensamiento Teórico en todas las formas de razonamiento. Por otro lado, los profesores, anclados en el viejo muelle que ofrece la reforma de las *Matemáticas Modernas*, se plantean objetivos que exigen a los estudiantes de ingeniería que alcancen la forma de razonamiento Analítico Estructural (AE), sin provocar previamente la flexibilidad entre las formas de razonamiento Sintético Geométrico (SG) y Analítico Aritmético (AA) que corresponde a las actividades cognitivas necesarias para alcanzarla (Sierpinska, 2000). Se hace necesario diseñar actividades de aprendizaje que fomenten la complementariedad de estos dos tipos de pensamiento, alrededor de las distintas formas de razonamiento del álgebra lineal. Un elemento que se tendrá en cuenta en el *diseño de Intervención*, que es transversal al desarrollo de este trabajo de investigación, como se mostrará con algún detalle en el Capítulo 4, es remover la carga de realizar cálculos aritméticos que, aun con la aparición de herramientas tecnológicas tipo CAS cada vez más potentes y versátiles, aparece como la demanda principal a los estudiantes a la hora de escalonar un sistema de ecuaciones o una matriz, hallar un determinante, encontrar una inversa, hallar los valores y vectores propios, entre otros. Devlin (2019) señala que realizar cálculos a mano tiene una tradición milenaria, pero que a partir de 1990 hacer y aprender matemáticas es y debería ser una experiencia muy distinta. Kaput y Roschelle (2013) advierten irónicamente, pero a la luz de evidencias innegables, que quizás lo único que vería familiar un viajero de 1900, en esta época, sería nuestro plan de estudio de matemáticas, en consecuencia, nos instan a aprovechar todas las oportunidades que ofrecen en general las herramientas digitales para democratizar el conocimiento, reorganizar el pensamiento matemático, nuestros planes de estudio y potenciar en estudiantes comunes, logros extraordinarios.

En la edificación progresiva del álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas, se infieren dos vertientes de desarrollo (Monroy Guzmán, 2011) la algebraica y la geométrica; los conceptos más relevantes del álgebra lineal no han evolucionado y emergido exclusivamente en la vertiente algebraica como puede sugerir su nombre ***Álgebra*** Lineal, como tampoco en la línea geométrica, como parece insinuar la noción de vector gracias a que hace parte del concepto central: Espacio ***Vectorial***. La historia muestra que los principales conceptos del álgebra lineal se han constituido gracias a una especie de dialéctica entre las maneras de concebir las matemáticas en estos dos polos históricos de desarrollo y que es después de alcanzar una flexibilidad entre las dos formas de razonamiento en estas líneas, que se logra el nivel de razonamiento Analítico-Estructural (AE).

El papel de la geometría como campo de imaginación y validación para el álgebra lineal se potencia por las herramientas digitales tipo DGS como el caso de GeoGebra (Bu y Hohenwarter, 2015; Caglayan, 2015; Dogan-Dunlap, 2010; Harel, 2019; Moreno-Armella y Hegedus, 2013, 2009; Turgut, 2019, 2021). El campo de imaginación y validación, como ya se mostró en el desarrollo histórico del álgebra lineal, requiere de su complemento, lo que correspondería a la forma de razonamiento Analítica-Aritmética que, en el moderno y real uso del álgebra lineal, demanda grandes volúmenes de operaciones; los cuales se deben trasladar, en principio por razones prácticas y didácticas a los evolucionados contextos de programas tipo CAS como por ejemplo Matlab, Matrix Calculator, entre otros (Aranda y Callejo, 2010; Klasa, 2010; Lindner, 2003).

Por tanto, se considera importante desarrollar una investigación basada en *el diseño instruccional* guiada por las siguientes preguntas:

Pregunta central de Investigación

¿Cuáles son las formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer año de Ingeniería, al resolver problemas del álgebra lineal con la mediación de herramientas digitales tipo DGS (GeoGebra) y CAS?

Preguntas auxiliares de Investigación

a. ¿Qué características emergen en las formas de razonamiento gracias al uso coordinado de medios digitales?
b. ¿Cuáles son las características del *Diseño de Intervención* que favorecen fluidez entre las diferentes formas de razonamiento?
c. ¿Cuáles son las nuevas demandas en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales (DGS y CAS)?

Justificación

El inicio de la investigación alrededor de la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal puede ubicarse en la última década del siglo pasado, con el trabajo compilado por Dorier en *On the Teaching of Linear Algebra* (2002). Las líneas de investigación iniciadas en este trabajo se mantienen vigentes y en algunos casos se han ramificado, lo que prueba la riqueza del álgebra lineal como campo de investigación de la educación matemática. En adelante se añadirán elementos que suman argumentos para llevar a cabo este trabajo de investigación y plantar con él las bases de un programa de investigación que mantenga los objetivos ya planteados.

El álgebra lineal y su creciente importancia en los programas de pregrado

La creciente cantidad de información que circula a través de los medios digitales ha dado lugar a una serie de problemas diversos y complejos relacionados con el manejo de grandes volúmenes de datos. Este contexto ha impulsado el álgebra lineal a expandir significativamente sus dominios, convirtiéndose en una rama de las matemáticas de gran relevancia. La razón detrás de esto radica, en cierta medida, en que la representación de esta información se realiza mediante elementos fundamentales del álgebra lineal, como vectores, matrices (arreglos de vectores) y tensores (arreglos de matrices).

El problema inherente a la transmisión de grandes volúmenes de información a través de la red destaca y pone de manifiesto los desafíos que han llevado al álgebra lineal a ocupar el papel protagónico que tiene en la actualidad. Amparado en gran medida por estas razones, el reconocido profesor del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), Gilbert Strang, en el prefacio de su aclamado libro *Linear Algebra and its Applications* (2006), afirma lo siguiente:

> Personalmente, creo que muchas más personas necesitan álgebra lineal que cálculo. ¡Isaac Newton podría no estar de acuerdo! Pero él no está enseñando matemáticas en el siglo XXI […] Ciertamente las leyes de la física están bien expresadas por ecuaciones diferenciales. Newton necesitaba cálculo, muy bien. Pero el alcance de la ciencia, la ingeniería y la administración (y la vida) es ahora mucho más amplio, y el álgebra lineal se ha movido a un lugar central. (p. iv)

Esta afirmación resalta la importancia y la relevancia que el álgebra lineal ha adquirido en diversos campos, superando incluso a disciplinas matemáticas tradicionales como el cálculo. Al respecto, Alan Tucker, profesor desde 1970 en la Universidad Estatal de New York Stony Brook, quien presidió por muchos años y en distintas épocas la Asociación Americana de Matemáticas (MAA), manifestó, en su trabajo *La Creciente importancia del álgebra lineal en los pregrados* (1993), que el álgebra lineal debería tener el mismo espacio de tiempo que el cálculo en los ciclos de formación básica. Situándose en el contexto local, en las universidades colombianas, el tiempo que se emplea para la enseñanza del álgebra lineal representa un poco menos de la tercera parte del empleado para la enseñanza del cálculo; si a esto se le agrega el tiempo que se toma para cursos de precálculo, la proporción sería aproximadamente de 1:4. En un sentido más general, refiriéndose a la enseñanza de las matemáticas, Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin, y Ohtani (2017) afirman que: "En nuestra opinión, las matemáticas merecen una atención especial. Esto es especialmente cierto debido a la forma en que la informatización afecta a las matemáticas y viceversa" (p. 106).

Un problema local sin explorar

En la Universidad del Valle, los cursos de matemáticas básicas para carreras de ingeniería tienen altas tasas de reprobación. Según Tenorio (2011), esto contribuye directamente a la deserción educativa. Para actualizar los datos de este estudio, se recopilaron las notas de álgebra lineal de 2010 a 2017. La Tabla 1 muestra dos columnas por programa de ingeniería: la columna izquierda indica el promedio anual y la columna derecha el número de estudiantes que completaron el curso. Por ejemplo, en 2012, 68 estudiantes de ingeniería eléctrica completaron el curso con un promedio de 2.4. Las calificaciones están en una escala de 1.0 a 5.0 y se requiere un mínimo de 3.0 para aprobar. La última fila muestra los promedios por programa de ingeniería. Por ejemplo, ingeniería de sistemas tuvo el promedio más bajo (2.5) durante los ocho años observados y 524 estudiantes completaron el curso de álgebra lineal. La última columna muestra los promedios y el número total de estudiantes que completaron el curso por año. Por ejemplo, el promedio mínimo (2.6) se registró en 2011, 2012 y 2015.

Tabla 1.

Promedio de notas por ingeniería, por año y generales.

	Agrícola		Civil		Alimentos		Materiales		Sistemas		Eléctrica		Electrónica		Industrial		Mecánica		Química		Sanitaria		Tipográfica		General	
2010	2,4	26	3,4	39	2,7	29	2,3	58	2,7	60	2,9	44	3,3	37	3,4	46	3,2	45	3	45	3,4	34	2,4	72	2,9	535
2011	2,6	46	2,6	53	2,1	45	2,7	80	2,4	88	2,6	82	2,8	70	2,4	94	2,8	56	2,6	54	2,6	60	2,4	84	2,6	812
2012	2	58	2,6	58	2,6	52	2,5	75	2,3	67	2,4	68	3,1	55	2,7	76	2,7	64	3,1	41	2,5	56	2,5	63	2,6	733
2013	2,6	55	3	48	2,6	56	2,9	61	2,2	61	2,5	59	2,7	63	2,8	60	2,8	53	3,3	45	2,6	61	2,6	69	2,7	691
2014	2,7	50	3,4	49	3	39	2,9	61	3,2	47	3	56	3,4	45	3,3	60	3,2	48	3,2	59	3,2	43	2,6	65	3,1	622
2015	2,8	53	3,1	41	2,4	59	2,8	63	2	80	2,7	65	2,7	49	2,8	58	2,5	45	3,1	51	2,2	53	2,8	58	2,6	675
2016	2,7	62	3,4	70	2,6	84	2,9	80	2,4	96	2,9	79	3,4	62	2,6	92	2,6	88	2,7	78	3	73	3,1	86	2,8	950
2017	3,3	32	3,5	30	3	34	3,3	38	3,7	25	3,4	32	3,9	30	3,3	40	3,7	30	4	20	3,3	38	2,6	34	3,4	383
	2,6	**382**	**3,1**	**388**	**2,6**	**398**	**2,8**	**516**	**2,5**	**524**	**2,7**	**485**	**3,1**	**411**	**2,8**	**526**	**2,9**	**429**	**3,0**	**393**	**2,8**	**418**	**2,6**	**531**	**2,8**	**5401**

Nota: datos entregados por Registro académico de la Universidad del Valle.

En términos generales, encontramos que los estudiantes de álgebra lineal, en los programas de ingeniería tienen un bajo rendimiento. Los promedios están por debajo del nivel de aprobación.

Tabla 2.

Tasas de reprobación de álgebra lineal en los últimos ocho años, de los doce programas de ingeniería de la Universidad del Valle en el período 2010 a 2017

	Agrícola		Civil		Alimentos		Materiales		Sistemas		Eléctrica		Electrónica		Industrial		Mecánica		Química		Sanitaria		Tipográfica		General	
2010	62 %	16	28 %	11	55 %	16	64 %	37	57 %	34	41 %	18	32 %	12	22 %	10	27 %	12	33 %	15	18 %	6	58 %	42	43 %	229
2011	48 %	22	60 %	32	71 %	32	48 %	38	66 %	58	50 %	41	53 %	37	61 %	57	54 %	30	63 %	34	57 %	34	62 %	52	58 %	467
2012	76 %	44	52 %	30	65 %	34	56 %	42	66 %	44	62 %	42	42 %	23	47 %	36	52 %	33	32 %	13	57 %	32	62 %	39	56 %	412
2013	64 %	35	40 %	19	57 %	32	38 %	23	66 %	40	54 %	32	51 %	32	50 %	30	51 %	27	29 %	13	54 %	33	51 %	35	51 %	351
2014	50 %	25	29 %	14	31 %	12	39 %	24	30 %	14	36 %	20	18 %	8	32 %	19	40 %	19	29 %	17	26 %	11	51 %	33	35 %	216
2015	45 %	24	41 %	17	59 %	35	46 %	29	80 %	64	48 %	31	51 %	25	47 %	27	53 %	24	31 %	16	74 %	39	41 %	24	53 %	355
2016	52 %	32	23 %	16	50 %	42	39 %	31	58 %	56	43 %	34	21 %	13	58 %	53	59 %	52	47 %	37	33 %	24	36 %	31	44 %	421
2017	38 %	12	23 %	7	29 %	10	34 %	13	20 %	5	31 %	10	10 %	3	30 %	12	13 %	4	10 %	2	24 %	9	53 %	18	27 %	105
	55 %	**210**	**38 %**	**146**	**54 %**	**213**	**46 %**	**237**	**60 %**	**315**	**47 %**	**228**	**37 %**	**153**	**46 %**	**244**	**47 %**	**201**	**37 %**	**147**	**45 %**	**188**	**52 %**	**274**	**47 %**	**2556**

Nota: datos entregados por Registro académico de la Universidad del Valle.

La Tabla 2 muestra que el promedio ponderado de estudiantes que reprobaron álgebra lineal durante el periodo observado es del 47%. Según Tenorio (2011), la tasa de reprobación en ese momento estaba entre el 30% y el 40%, lo que significa que ha aumentado en aproximadamente 10 puntos porcentuales. Esto representa un alto nivel de fracaso escolar. Cabe señalar que estas tablas solo tienen en cuenta a los estudiantes que completaron el curso y no incluyen a aquellos que cancelaron la materia antes de terminarla. Estos indicadores respaldan la justificación del proyecto.

Entre los estudiantes existe una desmotivación generalizada hacia el estudio de las matemáticas. Según investigaciones realizadas en el marco del programa "Universidad y Culturas", coordinado por Tenorio (2011), se ha observado una actitud negativa hacia esta materia. Además, los estudios indican que los estudiantes no poseen el capital cultural necesario para tener éxito en su formación y que la enseñanza de las matemáticas se basa en procedimientos rutinarios.

A pesar de los esfuerzos institucionales por proporcionar infraestructura y capacitar a los docentes en el uso de tecnologías en el aula, su impacto en la educación matemática sigue siendo limitado. Este proyecto busca promover el uso de herramientas digitales para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático en el curso de álgebra lineal. En particular, se alentará el uso coordinado y orientado de programas como GeoGebra, Matlab, Matrix Calculator y Mathematica para mejorar el razonamiento en este curso.

La Universidad del Valle adelanta una reforma curricular (Acuerdo No. 025 del Consejo superior de la Universidad del Valle, septiembre 25 de 2015) en todos sus programas. En particular, en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, se está ofreciendo apoyo a la reforma de los programas de matemáticas que esta unidad académica ofrece para toda la Universidad. Existe apertura para someter a discusión propuestas de innovación para la enseñanza de las matemáticas. En este escenario, la investigación educativa juega un papel importante para someter a prueba las actividades de aprendizaje y los nuevos enfoques sobre la enseñanza de las matemáticas en general y del álgebra lineal, en particular.

La importancia de las tecnologías digitales en la Educación Matemática

Como se señaló antes, hace más de 40 años autores e instituciones han venido destacando la importancia del empleo de las tecnologías digitales en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000; MEN, 2014; UNESCO, 2013; OCDE, 2015; Moreno, L. y Santos, L.M., 2016). Al revisar buena parte de la literatura con enfoque en resolución de problemas matemáticos con tecnologías digitales, se adoptó la idea de que las tecnologías digitales, por la forma en que han transformado la forma de comunicar, interactuar, pensar y en general de vivir y convivir de los seres humanos, se constituyen en una cualidad para generar conocimiento, tan importante como la oralidad y la escritura. Así como la escritura no desplazó la oralidad en su momento, sino que reordenaron la manera de pensar y producir conocimiento de los seres humanos con estos medios, es necesario explorar los roles de esta nueva cualidad: ¿cómo reacomoda las formas de construcción de conocimiento cuando se promueve su participación? (Borba y Villareal, 2005; Jacinto y Carreira, 2017; Villarreal y Borba, 2010). En el trabajo de Jacinto y Carreira (2017) se afirma que:

> Hoy tenemos fuertes evidencias de un cuerpo comprensible de investigación de que el uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas reformula y reorienta el pensamiento matemático: favorece los enfoques experimentales y exploratorios, promueve habilidades críticas y de indagación, permite una variedad de estrategias, desencadena la generación de conjeturas y apoya demostración matemática. Por otro lado, el desarrollo de una fluidez tecno-matemática abarca la exploración de las posibilidades de varias herramientas matemáticas digitales, y esto puede beneficiarse al conectar la tecnología y los problemas matemáticos no rutinarios. (p. 1135)

En el ámbito nacional y regional del Valle del Cauca, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), las secretarías de Educación y la Universidad del Valle han acatado las directrices generadas desde la investigación educativa, para implementar las tecnologías digitales en Educación Matemática. Gracias a estos esfuerzos, las Instituciones Educativas cuentan hoy con infraestructura y actualización parcial de los docentes en esta materia. Sin embargo, no es notorio el impacto que tienen estas iniciativas sobre los resultados de aprendizaje.

En el año 2014, la UNESCO realizó el Acuerdo de Mascate, elaborado mediante amplias consultas y aprobado en la Reunión Mundial sobre la

Educación para Todos (EPT) de 2014, que sirvió de fundamento para las metas de educación propuestas por el Grupo de Trabajo Abierto sobre los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). La UNESCO, en coorganización con la UNICEF, el Banco Mundial, la UNFPA, el PNUD, La ONU, mujeres y el ACNUR, realizaron en mayo de 2015 el evento denominado *Educación 2030*. En dicho evento, los ministros de educación, los jefes y miembros de delegaciones de los Estados participantes, los jefes de organismos y funcionarios de organizaciones multilaterales y bilaterales, los representantes de la sociedad civil, de la profesión docente, de los jóvenes y del sector privado, construyeron el documento denominado *Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4*. Específicamente esta declaración construye una plataforma de trabajo para cumplir el objetivo 4 del acuerdo de Mascate que dice lo siguiente: "Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos".

Este objetivo implica trabajar en las dimensiones de equidad, equitatividad y calidad. La calidad de la educación matemática depende de varias variables, entre ellas: el currículo, la evaluación, la infraestructura escolar, el presupuesto, los materiales, las actividades de aprendizaje, la formación de los profesores, entre otras. Esta última variable ha sido reconocida por diferentes investigadores e instituciones como la variable preponderante en la determinación de la Calidad de la Educación.

Referencias

Aguilar-Magallón, D. (2018). *La Formulación y Resolución de Problemas Matemáticos en un Ambiente que Promueve el Uso de Tecnologías Digitales*. CINVESTAV.

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(2), 129-158. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000200002&nrm=iso

Arboleda, L. (2012). La historia y la educación matemática en el "horizonte" conceptual de la pedagogía. *Quipu*, *14*, 13-32.

Bagley, S. y Rabin, J. M. (2016). Students' Use of Computational Thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 83-104. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0022-x

Benítez Mojica, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con uso de tecnologías*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Bu, L. y Hohenwarter, M. (2015). Modeling for Dynamic Mathematics. In X. Ge, D. Ifenthaler y J. M. Spector (Eds.), *Emerging Technologies for STEAM Education: Full STEAM Ahead* (pp. 355-379). https://doi.org/10.1007/978-3-319-02573-5_19

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 131-153. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.003

Cárcamo Bahamonde, A. D., Fortuny Aymemí, J. M. y Gómez i Urgellés, J. V. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 338-352. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

Caridade, C. M. R., Encinas, A. H., Martín-Vaquero, J. y Queiruga-Dios, A. (2015). CAS and real life problems to learn basic concepts in Linear Algebra course. *Computer Applications in Engineering Education*, *23*(4), 567-577. https://doi.org/10.1002/cae.21627

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C. y Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46. https://doi.org/10.2307/2686430

Cooley, L., Vidakovic, D., Martin, W. O., Dexter, S., Suzuki, J. y Loch, S. (2014). Modules as Learning Tools in Linear Algebra. *PRIMUS*, *24*(3), 257-278. https://doi.org/10.1080/10511970.2013.867293

Devlin, K. (2019). How Technology Has Changed What It Means to Think Mathematically. In M. Danesi (Ed.), *Interdisciplinary Perspectives on Math Cognition* (pp. 53-78). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22537-7_3

Dogan-Dunlap, H. (2006). Lack of set theory relevant prerequisite knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(4), 401-410. https://doi.org/10.1080/00207390600594853

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2141-2159. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.037

Dorier, J.-L. (2000a). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3-81). https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1

Dorier, J.-L. (Ed.). (2000b). *On the Teaching of Linear Algebra*. https://doi.org/https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/0-306-47224-4

Dorier, J.-L. (Ed.). (2002). *On the Teaching of Linear Algebra*. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4

Dorier, J.-L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In E. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht: Editores académicos de Kluwer.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study* (pp. 89-132). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L. y Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(S1), 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Harel, G. (2019). Varieties in the use of geometry in the teaching of linear algebra. *ZDM*, *51*(7), 1031-1042. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01015-7

Hegedus, S. J. y Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM*, *41*(4), 397-398. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0201-9

Hillel, J. (1993). Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. In C. Keitel y K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 18-47). Springer Berlin Heidelberg.

Jin, L., Bi, C. y Zhao, Y. (2011). Application of MATLAB Software for Linear Algebra. *2011 Third Pacific-Asia Conference on Circuits, Communications and System (PACCS)*, 1-3. https://doi.org/10.1109/PACCS.2011.5990256

Kaput, J. J. y Roschelle, J. (2013). The Mathematics of Change and Variation from a Millennial Perspective: New Content, New Context. In S. J. Hegedus y J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 13-26). https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_2

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2015). Frameworks and Principles for Task Design. In A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education: an ICMI study 22* (pp. 19-81). https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2100-2111. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.039

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *ZDM*, *42*(1), 105-119. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0225-1

Lindner, W. (2003). CAS-supported multiple representations in elementary linear algebra. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *35*(2), 36-42. https://doi.org/10.1007/BF02652770

Marshall, N., Buteau, C., Jarvis, D. H. y Lavicza, Z. (2012). Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study. *Computers & Education*, *58*(1), 423-434. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.020

Monroy Guzmán, L. A. (2011). *El Álgebra Lineal en el contexto histórico de las Matemáticas* (Universidad del Valle). Retrieved from https://tinyurl.com/wqubabm

Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. *Memorias Del Seminario Nacional*, 18.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. (2013). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. In S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 27-45). https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_3

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM*, *41*(4), 505-519. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0200-x

Noss, R. y Hoyles, C. (1996a). Webs and Situated Abstractions. In *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers* (pp. 105-133). https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8_5

Noss, R. y Hoyles, C. (1996b). *Windows on Mathematical Meanings*. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2009). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4–II), 373-385. http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-ii/499-201021d

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial*. Instituto Politécnico Nacional.

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., … Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning -- and Learning Trajectories -- of Mathematical Concepts. In C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study* (pp. 179-226). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_9

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 686-693). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Se, S., Ashwini B, Chandran, A. y Soman K.P. (2015). Computational thinking leads to computational learning: Flipped class room experiments in linear algebra. *2015 International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)*, 1-6. https://doi.org/10.1109/ICIIECS.2015.7193021

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stewart, S. (2017). School Algebra to Linear Algebra: Advancing Through the Worlds of Mathematical Thinking. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 219-233). https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_12

Stewart, S., Andrews-Larson, C. y Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, *51*(7), 1017-1030. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01104-1

Strang, G. (2006). *Linear Algebra and its Applications* (fourth; B. Thomson, Ed.). Belmont, CA.

Tenorio, M. C. (2011). Escolaridad generalizada: ¿inclusión social o pérdida de la identidad cultural? *Revista de Estudios Sociales*, *40*, 57-71. Retrieved from https://revistas.uniandes.edu.co/doi/pdf/10.7440/res40.2011.06

Tucker, A. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 3-9. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973500

Turgut, M. (2019). Sense-making regarding matrix representation of geometric transformations in $${{\mathbb{R}}^2}$$R2: a semiotic mediation perspective in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *51*(7), 1199-1214. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01032-0

Turgut, M. (2021). Reinventing Geometric Linear Transformations in a Dynamic Geometry Environment: Multimodal Analysis of Student Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10185-y

Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica: proyecto CONACYT 2002-C01-41726S. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *9*(3), 459-490.

03

Una aproximación al estado del arte sobre la relación entre creencias, resolución de problemas de probabilidad y el uso de la tecnología digital en el aula

Arnulfo Fajardo Valencia
arnulfo.fajardo@correounivalle.edu.co

Introducción

La investigación en didáctica ha reconocido la importancia del estudio de la probabilidad debido a su papel instrumental en las ciencias y a su incidencia en campos como la política, la economía y otras ramas del saber, además se destaca su utilidad en la cotidianidad, así como su influencia en el desarrollo del pensamiento crítico y la toma de decisiones (Gómez Torres, 2016; Saldanha y Liu, 2014; Sharma, 2012; Vásquez y Alsina, 2017; Sanabria y Núñez, 2017).

Sin embargo, a pesar de que se ha reconocido la importancia del aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad y su necesidad de ser incluida en los diseños curriculares y en la formación de maestros, como bien lo indican Barragues y Guisasola (2009) "la investigación didáctica viene señalando que los estudiantes tienen dificultades para lograr un aprendizaje con comprensión de los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar" (p.128).

Estas dificultades se observan cuando los estudiantes se enfrentan a problemas que implican conceptos de probabilidad. Algunos de ellos llegan a pensar que predecir resultados en situaciones de azar es totalmente imposible (Sánchez y Benítez, 1997). Otros tienden a relacionar los resultados de experimentos aleatorios con fenómenos físicos o atribuyen dichos resultados a poderes sobrenaturales y a la suerte (Amir y Williams, 1999; Sánchez y Benítez, 1997). También existen quienes sostienen la creencia de que los resultados de experimentos aleatorios están bajo el control de las personas que operan los dispositivos generadores de aleatoriedad (Nicolson, 2005).

Los desarrollos de investigación han mencionado como posibles causas de estas dificultades el poco conocimiento de los maestros en este campo (Batanero et al., 2016; Inzunza, 2014; Vásquez y Alsina, 2014). Estrada y Batanero (2015) consideran que "algunos profesores y estudiantes para profesor de educación primaria pueden sentirse inseguros al enseñar la probabilidad a los niños, por no haber recibido suficiente formación sobre didáctica de la probabilidad o no tener experiencia en su enseñanza" (p. 239). También se ha insistido en el poco espacio que brindan los libros de texto para fortalecer el pensamiento probabilístico, lo que se convierte en un obstáculo para su aprendizaje (Rodríguez-Alveal et al., 2018).

Por otra parte, estudios de investigación desde diferentes perspectivas teóricas y contextos culturales muestran que los estudiantes tienden a tener ciertas creencias sobre la probabilidad que impactan negativamente su aprendizaje (Ang y Shahrill, 2014; Sharma, 2016). Gal y Ginsburg (1994) sostienen que las dificultades con el aprendizaje de la probabilidad se deben a factores no cognitivos, entre los que se destacan las creencias inapropiadas, lo que obstaculiza la formación de intuiciones por parte de los estudiantes, para Groth et al. (2021) las creencias y los sistemas de creencias de los estudiantes "entran en conflicto con la práctica disciplinaria normativa; estos sistemas de creencias incluyen elementos como mitos, supersticiones, animismo y determinismo" (p. 242).

Los maestros e investigadores han desarrollado diversas estrategias para abordar las dificultades mencionadas, las cuales influyen significativamente en los procesos de resolución de problemas de probabilidad. Entre las estrategias más utilizadas en la última década, se destaca el uso de herramientas digitales especializadas en simulación probabilística, tales como Fhatom, Tinkerplost, GeoGebra, Probability Explorer, Excel y otros recursos que ofrece internet, los cuales han sido utilizados para indagar sobre los procesos de razonamiento de los estudiantes, y determinar si la enseñanza mediada por tecnología favorece el aprendizaje formal de la probabilidad y fomenta las habilidades para resolver problemas (Aizikovitsh-Udi y Radakovic, 2012; Ben-Zvi et al., 2012; Coutinho y Caberlim, 2015; Gürbüz y Birgin, 2012; Lee et al., 2010; Stack y Watson, 2013; Yáñez y Jaimes, 2013; Ruiz-Reyes et al., 2019).

Es importante resaltar que la investigación en didáctica de las matemáticas, reconoce la resolución de problemas como una actividad fundamental en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Schoenfeld, 1992; Trigo, 1997; Ministerio de Educación Nacional, 2003; NCTM, 2000; Benítez, 2006; English y Sriraman, 2010, Fajardo 2023), se considera que la resolución de problemas desempeña un papel central que dinamiza las matemáticas en todos sus campos incluido el estudio de la probabilidad.

A continuación, se exploran antecedentes teóricos derivados de investigaciones relacionadas con creencias, resolución de problemas y mediación de tecnología digital. El propósito es establecer conexiones entre estos elementos y analizar su influencia en el proceso de aprendizaje de conceptos fundamentales de probabilidad.

Acerca de las creencias de los estudiantes

La investigación sobre el papel de las creencias de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas ha venido en ascenso a partir de la década de los años ochenta, como respuesta a las dificultades que se evidenciaron después de abordar la resolución de problemas matemáticos solo desde la perspectiva de elementos de tipo cognitivo (Galende et al., 2019; Pongsakdi et al., 2019).

El estudio de las creencias ha sido reconocido en el campo investigativo como un componente del dominio afectivo, lo que se refleja en las múltiples publicaciones sobre el tema y en la difusión que se le ha dado en la literatura internacional. Un claro ejemplo ha sido la publicación de documentos tales como: (a) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Volume 1. *Knowledge, Beliefs, and Identity in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Portari et al., 2008); (b) *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner* (Li y Moschkovich, 2013), (c) *Views and Beliefs in Mathematics Education. The Role of Beliefs in the Classroom* (Rott et al., 2018).

La investigación reciente se ha preocupado por indagar e identificar qué creencias tienen los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas (Galende et al., 2019; Kele, 2018; Markovits y Forgasz, 2017; McDonough y Sullivan, 2014; Roesken et al., 2011; Tarmizi y Tarmizi, 2010). Prendergast et al. (2018), por ejemplo, reportan una investigación que busca identificar las creencias que tienen los estudiantes sobre la resolución de problemas de matemáticas; concluyen que los mayores están más convencidos que los más jóvenes de que no todos los problemas pueden resolverse mediante la aplicación de procedimientos de rutina; pudo observarse en el estudio algunas diferencias relacionadas con el género, manifiestas en que los estudiantes varones tenían creencias más positivas en relación con la resolución de problemas que consumen mucho tiempo y el vínculo entre el esfuerzo y una mayor capacidad para resolverlos. Proponen que a partir de la evaluación de las creencias de los estudiantes, se planifiquen e implementen intervenciones que permitan transformar gradualmente las representaciones ingenuas sobre la naturaleza de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos.

Vesga-Bravo y Escobar-Sánchez (2018) presentan un trabajo orientado a determinar si una propuesta pedagógica centrada en el marco teórico de la resolución de problemas tiene impacto sobre las creencias de un grupo de estudiantes de séptimo grado; se realizaron cinco actividades de resolución de problemas y un cuestionario con el fin de conocer las creencias de los estudiantes; después de realizar el análisis cuantitativo de los datos se concluyó que hubo mejores creencias después de la intervención solo en el factor referido a la velocidad de aprendizaje; los estudiantes fortalecieron sus creencias sobre la importancia de esforzarse y no rendirse si no se pueden resolver los problemas en un corto período de tiempo. Los investigadores proponen que para lograr intervenciones que modifiquen las creencias de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas es necesario considerar otros aspectos que hacen parte del contexto escolar.

Jäder et al. (2017) por su parte realizaron un estudio para explorar las creencias y el razonamiento de los estudiantes suecos de educación secundaria al resolver tareas no rutinarias. Después de recolectar datos a partir de sesiones de resolución de tareas obtenidas en grabaciones de video; soluciones escritas de los estudiantes y entrevistas, se analizaron por separado los elementos de razonamiento y creencias frente a la resolución de las tareas no rutinarias. Concluyeron que cuando los estudiantes trabajan en este tipo de tareas utilizan varios enfoques de razonamiento que incluyen el razonamiento imitativo y el razonamiento matemático creativo y están de acuerdo en que las tareas influyen en la manera en que los estudiantes razonan, lo que contradice estudios previos sobre las creencias de los estudiantes.

Francisco (2013) examinó las creencias sobre el aprendizaje matemático de cinco estudiantes de secundaria y su comportamiento frente a un problema de probabilidad desafiante. El estudio fue de tipo longitudinal y buscó inferir las creencias a partir de reflexiones de los estudiantes, por lo que se utilizaron entrevistas y tareas matemáticas. Los resultados demostraron que los estudiantes valoran el sentido del trabajo colaborativo, el aprendizaje por descubrimiento y hacen énfasis en que los procesos matemáticos como la justificación, las discusiones, las conexiones y la resolución de problemas para hacer y aprender matemáticas son muy importantes para los estudiantes. El estudio sugirió que diferentes experiencias conducen a diferentes creencias y es por esto que los profesores deben ayudar a los estudiantes a encontrar disposición y comportamientos positivos hacia la matemática.

Otra línea de interés de los investigadores en este campo ha sido la de explorar tipos de creencias especificas de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas; entre otras las creencias de autosuficiencia y autopercepción que tienen los estudiantes frente al conocimiento de las matemáticas (Bonne y Johnston, 2016; Kleitman y Gibson, 2011; Ozgen, 2013; Tirosh et al., 2013), así mismo las creencias epistemológicas que se relacionan con el rendimiento académico frente a las matemáticas (Henschel y Roick, 2017; Vizcaino Escobar y Manzano Mier, 2017), y las creencias científicas (Beghetto y Baxter, 2012).

En esta línea de investigación, Lindfors et al. (2019) presentan un estudio longitudinal, cuasi experimental, sobre las creencias que tienen los estudiantes entre los 7 y los 9 años en Nueva Zelanda sobre ellos mismos como aprendices de matemáticas, buscando identificar las relaciones entre la inteligencia de los estudiantes, la autosuficiencia matemática específica y el logro matemático. Se utilizaron como herramientas de toma de información un cuestionario diseñado a medir las creencias generales de dominio de los estudiantes sobre su capacidad para aumentar su inteligencia y creencias específicas de tareas sobre su capacidad matemática, y una prueba de rendimiento matemático. El estudio arrojó que los maestros, a partir de sus intervenciones en el aula, pueden fortalecer la confianza de los estudiantes sobre su capacidad de aprender y de paso aumentar su rendimiento académico. Por otra parte, los investigadores recomiendan que agregar elementos psicológicos al aprendizaje profesional del profesor de matemáticas podría redundar en beneficios para el estudiante en el aula de clase.

Alabau et al. (2020) han realizado una investigación con estudiantes de educación secundaria en la que buscan analizar los efectos del nivel académico y el género sobre las creencias epistemológicas y sobre la resolución de problemas de los estudiantes; y analizar en qué contribuyen tanto las creencias epistemológicas como el género sobre el desempeño en la resolución de problemas. A través del uso de cuestionarios de creencias sobre resolución de problemas, exámenes sobre problemas tomados de pruebas PISA 2003 y después de su respectivo análisis cuantitativo, se llegó a concluir que entre mayor es el nivel académico de los estudiantes, más sofisticadas son las creencias sobre la resolución de problemas; por otra parte se observó que el género de los estudiantes tiene una influencia significativa sobre las creencias epistemológicas pero no sobre la resolución de problemas. Los autores consideran que los estudiantes deben mejorar frente a las creencias de resolución de problemas, pero que esto solo será posible a través de una concepción didáctica donde el eje del currículo sea resolver problemas, resaltan el valor de las creencias epistemológicas en el aprendizaje de las matemáticas como un elemento que puede afectar la motivación, las emociones y la ansiedad ante los problemas.

Otros investigadores se han procupado por identificar procesos de intervención que permitan transformar las creencias de los estudiantes para facilitar el aprendizaje de las matemáticas (Jankvist, 2015; Wang et al., 2019). Por ejemplo Stylianides y Stylianides (2014) reportan una investigación en donde se busca dar respuesta a la pregunta ¿es posible desarrollar intervenciones de corta duración en las aulas de matemáticas que tengan un impacto en las creencias específicas de resolución de problemas de los estudiantes? Basando su marco teórico en la noción de memoria episódica de Tulving y las creencias de autosuficiencia de Bandura; se diseñó un problema que se aplicó a los estudiantes, se tomaron videos de la implementación y se realizaron observaciones de campo; la investigación concluyó que las intervenciones de corta duración en el aula pueden impactar positivamente aspectos afectivos y cognitivos de los estudiantes, es decir que pueden incidir en la transformación de las creencias de los estudiantes frente a la resolución de problemas.

Otra línea del estudio de las creencias que también ha despertado interés en los investigadores es la que vincula las creencias con diferentes elementos del dominio afectivo de las matemáticas y su relación con el éxito o el fracaso en el aprendizaje (Cerda et al., 2016; Di Martino y Zan, 2011; Molera Botella, 2012; Niepel et al., 2018; Martínez-Padrón, 2013; Pitsia et al., 2017). En esta línea de trabajo, Pongsakdi et al. (2019) investigaron sobre el papel que tienen las creencias y las variables motivacionales en la mejora de la resolución de problemas de palabras con contenidos matemáticos, el estudio se llevó a cabo con estudiantes de cuarto y sexto grado de escuelas primarias. Los elementos utilizados en la recolección de información fueron una prueba de resolución de problemas de palabras; un cuestionario de motivación y otro de creencias sobre resolución de problemas de palabras con contenidos matemáticos. El estudio concluyó que el programa de enriquecimiento de palabras (WPE) impacta positivamente tanto el desempeño de los estudiantes, como sus creencias acerca de la naturaleza de la resolución de problemas con contenidos matemáticos.

Burrus y Moore (2016) examinaron qué tan importantes son las creencias y las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes cursantes de tercero y cuarto año de secundaria. Para ello aplicaron una encuesta en línea, denominada American College Test (ACT) cuyos puntajes fueron relacionados con las calificaciones obtenidas en los cursos de matemáticas que habían tomado previamente. Los investigadores concluyeron que efectivamente las creencias y las actitudes hacia las matemáticas de ese grupo de estudiantes son predictores de su motivación y comportamiento con respecto al logro en matemáticas; así mismo, se pudo concluir que esas actitudes y creencias se pueden alterar con intervenciones simples que tengan como objetivo cambiar los conceptos erróneos de los estudiantes. Este tipo de intervenciones inciden sobre el comportamiento y los resultados educativos del estudiante.

Creencias de los estudiantes de secundaria frente a conceptos asociados a la probabilidad

Diferentes estudios en educación matemática se han centrado en identificar las creencias y los sistemas de creencias de los estudiantes y su relación con el desarrollo del razonamiento probabilístico (Konold, 1991; Fischbein y Schnarch, 1997; Sánchez y Benítez, 1997; Amir y Williams, 1999; Watson et al., 2004; Sharma, 2006; Rubel, 2007) y dentro de esta disciplina se han identificado cuatro perspectivas desde donde se ha abordado la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, ellas son: "actitudes y creencias, con potencial de influencia cultural sobre ellas; la necesidad de comprender y apreciar el espacio muestral como subyacente al cálculo de probabilidades; la ley de los grandes números; y dos temas secundarios avanzados, problemas binomiales y condicionales" (Watson, 2014, p. 720).

A pesar de la importancia de estos estudios, la investigación ha sido escasa en los últimos 10 años, conservándose aún algunos direccionamientos como los propuestos por Amir y Williams (1999), quienes plantean que el lenguaje, las creencias y la experiencia son elementos culturales que influyen en el conocimiento de los niños sobre la probabilidad, siendo las creencias el componente de mayor incidencia en el desarrollo del pensamiento probabilístico. Asimismo, Konold (1991) argumenta que una de las principales razones por las que es difícil la enseñanza de la probabilidad radica en que los estudiantes traen al aula una variedad de creencias sobre el azar.

Los investigadores coinciden en que creencias como la suerte (Watson et al., 2004), la intervención divina (Sharma, 2006), el control humano sobre los objetos generadores de aleatoriedad (Ang y Shahrill, 2014; Nicolson, 2005) están presentes en el razonamiento de algunos estudiantes al abordar situaciones en las que intervienen eventos aleatorios, o al tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. En este sentido "una serie de estudios de investigación desde diferentes perspectivas teóricas y contextos culturales muestran que los estudiantes tienden a tener ciertas creencias sobre la probabilidad que impactan negativamente su aprendizaje" (Sharma, 2016, p. 130). Frente a esta problemática, se considera que el conocimiento de las creencias de los estudiantes, por parte de los maestros, es un elemento central para comprender sus razonamientos y posiblemente ayudar a los estudiantes en el mejoramiento de sus procesos de aprendizaje (Erazo y Aldana, 2015; Fajardo y Benítez, 2020; McDonough y Sullivan, 2014; Prendergast et al., 2018).

Acerca de la resolución de problemas

La resolución de problemas es una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Benítez, 2006; English y Sriraman, 2010; MEN, 1998; NCTM, 2000; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2014; Schoenfeld, 1992), destacando Halmos (2018) que el corazón de las matemáticas son los problemas y su resolución va más allá de lo meramente cognitivo, lo que obliga a considerar otros factores como los de ámbito metacognitivo, social y afectivo (Martínez-Padrón, 2021). Dicha importancia se ha visto reflejada en múltiples documentos yendo desde comunicaciones breves hasta memorias y libros de investigadores de gran reconocimiento en el campo. Algunas de las publicaciones son: *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985), *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics* (Jurdak, 2016), *Problem Solving in Mathematics Education ICME-13 Topical Surveys* (Liljedahl et al., 2016) y la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Santos-Trigo, 2019).

Los trabajos de George Pólya y su libro *Cómo plantear y resolver problemas* (*How to Solve It*, el original en inglés), publicado en 1945, son considerados iniciadores de la investigación sistemática sobre la resolución de problemas de matemática (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2019). A partir de este trabajo seminal, English y Gainsburg (2015) identifican dos enfoques: el primero es cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas de matemática y el segundo es definir cuál es el propósito de esta resolución en el aula de clase.

Desde la línea de cómo enseñar a los estudiantes a resolver problemas, en la última década se han reportado algunas investigaciones que continúa tomando como referente los pasos propuestos en el modelo de Pólya (Eisenmann et al., 2015; Lee, 2016; Tjoe, 2019), siguiendo, al menos, algunas de las etapas propuestas: entender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás o examinar la solución obtenida, centrando su atención en el mejoramiento de los estudiantes para enfrentarse a cualquier problema, a través de una lista de pasos y algunas estrategias de solución preestablecidas.

Hensberry y Jacobbe (2012) intentan aumentar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al hacerles seguir las fases de Pólya y llevar un diario del proceso. Sostienen que este tipo de experiencias puede conducir a estrategias de solución más ricas y, a aumentar la capacidad para resolver problemas. Tjoe (2019) centra su estudio en "mirar hacia atrás", planteando que realizar el análisis retrospectivo de cómo se resolvió un problema, permite identificar otros métodos de solución del mismo problema, advierte que la práctica de "mirar hacia atrás" no se ha integrado de manera efectiva en la instrucción en el aula por lo que propone considerar otros estudios que examinen un marco pedagógico que integre la necesidad de resolver problemas utilizando diferentes métodos de solución. Albarracín y Gorgorió (2014) se centran en "diseñar un plan", estudio enfocado en los planes y esquemas destinados a resolver problemas diseñados por estudiantes, abordando problemas de Fermi, los cuales involucran grandes números. Concluyen que los estudiantes son capaces de crear esquemas que incluyen estrategias matemáticas adecuadas para resolver los problemas presentados.

Considerando que "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata" (Pólya, 1962, p. 177), entonces, para darle solución se debe activar un proceso de búsqueda de conocimientos y de heurísticas que puedan resultar de utilidad para lograr el objetivo.

Aunque los aportes de Pólya siguen siendo valiosos para el desarrollo del campo de la resolución de problemas con contenidos matemáticos, "la investigación ha indicado que enseñar a los estudiantes a usar estrategias generales de resolución de problemas y heurísticas tiene poco efecto en que los estudiantes sean mejores solucionadores de problemas" (Lester y Cai, 2016), esta idea es compartida por algunos investigadores destacados como Schoenfeld (1992), English y Gainsburg (2015) y Bingolbali y Bingolbali (2019). La investigación posterior a los trabajos de Pólya, ha mostrado el camino para nuevas perspectivas en la resolución de problemas, que apuntan a definir cuál es el propósito de la resolución de problemas en el aula de clase.

Otros investigadores han realizado estudios aproximándose más al enfoque de Alan Schoenfeld, reconociendo que sus propuestas tienen fuertes raíces en los argumentos de Pólya; sin embargo, están de acuerdo en que cuando se quiere trabajar utilizando la resolución de problemas, como una estrategia didáctica, es necesario tener en cuenta otros aspectos que van más allá del uso de heurísticas.

Schoenfeld (1985) establece cuatro categorías para enfocar la resolución de problemas, a saber: los recursos, estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Los recursos centrados en los conocimientos específicos de matemáticas con los que cuenta un estudiante y que pueden ser utilizados al abordar la resolución de un problema; las estrategias cognitivas definidas como las maneras y técnicas implementadas para encontrar caminos de solución a un problema; las estrategias metacognitivas, compuestas por actividades de control asumidas por los individuos para monitorear y autoevaluar la resolución de un problema, tienen el propósito de no solo entender el enunciado del problema, revisar los recursos y los caminos de solución seleccionados, sino monitorear los cálculos, revisar si lo encontrado es solución de problema y si existen alternativas de solución. Las creencias, entendidas como todo lo que una persona piensa acerca de las matemáticas, o de una parte de ella, determinan la forma como un individuo selecciona recursos y estrategias para resolver un problema.

La literatura evidencia, también, el impulso que se ha dado en la última década a la propuesta de enseñar matemáticas a través del método de resolver problemas. Este método se apoya en el problema como el punto de partida para el aprendizaje y el proceso de resolución se convierte en el camino que permite la construcción del conocimiento matemático.

Para Onuchic (1999) la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas difiere de los enfoques que privilegian las reglas sobre el “cómo”, abandonando de cierta manera el dominio de los procedimientos algorítmicos o la adquisición de conocimientos a través de la rutina o el ejercicio mental. Dentro de este marco, se han realizado estudios de investigación enfocados en la educación básica (primaria y secundaria) que dejan claro la vigencia de la resolución de problemas y la preocupación por identificar elementos didácticos que puedan fortalecer a los estudiantes en el desarrollo de habilidades para plantear, definir y solucionar problemas (Jones e Inglis, 2015; S. Lee, 2016; Sumirattana et al., 2017; Yuanita et al., 2018).

En esta línea Bingolbali y Bingolbali (2019) reportan una investigación que explora cómo se aborda la resolución de problemas desde dos libros de texto de matemáticas de grado sexto, los cuales se analizan desde tres enfoques de enseñanza: "para, sobre y mediante" la resolución de problemas. El estudio muestra que ninguno de los libros fue guiado por un enfoque específico de los planteados para la enseñanza y concluyeron que siendo el libro de texto un elemento esencial de guía para algunos maestros, se corre el riesgo de que estos no sigan ningún enfoque de resolución de problemas en la práctica, lo que podría afectar la calidad de la instrucción sobre el tema. Yuanita et al. (2018) buscan identificar el papel de la representación matemática como mediador entre las creencias y la resolución de problemas en estudiantes de secundaria, utilizando el enfoque de la educación matemática realista como un marco para resolver y proponer problemas que se basan en rutinas diarias y situaciones suficientemente conocidas por los estudiantes. Los resultados del estudio muestran que el uso de este enfoque aumenta la confianza de los estudiantes al abordar la solución de problemas de aritmética y motiva a los estudiantes para proponer sus propias ideas frente a situaciones o experiencias de la vida real.

Sobre la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad

Los procesos de resolución de problema facilitan la comprensión de los conceptos y potencian el desarrollo del pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992); como afirman Penalva et al. (2010) esta situación no es diferente para el caso del dominio de la probabilidad, por ejemplo, Batanero (2005) sostiene que, desde hace algunos años la investigación sobre la enseñanza y la resolución de problemas es una de las líneas centrales de la investigación sobre didáctica de la probabilidad.

Algunos investigadores se han centrado en analizar la capacidad que tienen los estudiantes como resolutores y en identificar las posibles dificultades que presentan en los proceso de solución, al igual que en indagar sobre estrategias que posibiliten el mejoramiento de sus competencias al abordar problemas que involucren conceptos asociados con la probabilidad (Alonso-Castaño et al., 2019; Awuah y Ogbonnaya, 2020; Beitzel et al., 2011; Huerta y Arnau, 2013; Penalva et al., 2010; Zahner y Corter, 2010).

Raya (2020), por ejemplo, describe algunas estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de probabilidad, haciendo énfasis en que estas estrategias rara vez son estudiadas a profundidad. La investigación concluye que las estrategias usadas para abordar problemas de probabilidad varían según la capacidad que tenga cada individuo de comprender la información y del conocimiento que posea cada persona al enfrentar situaciones de probabilidad.

Obersteiner et al. (2015) realizan un estudio sobre cómo los estudiantes utilizan el razonamiento combinatorio en la resolución de problemas; informan que los estudiantes a menudo comienzan en el nivel más alto sin una comprensión relacional y, de lo contrario, cometen fácilmente errores al intentar ir de un nivel inferior a uno más alto. Afirma que algunos estudiantes esperan resultados más rápidos utilizando fórmulas, sin embargo, quienes muestran una mayor comprensión de los conceptos obtienen mejores resultados. Por su parte, Awuah y Ogbonnaya (2020) presentan un estudio en esta línea que busca identificar qué tan competentes son los estudiantes para resolver problemas de probabilidad. Utilizando tablas de contingencia y diagramas de árbol, observaron que, aunque los estudiantes podían dibujar algunos diagramas, no podían interpretar el diagrama ni utilizarlo adecuadamente en la solución de problemas; se observó que esta dificultad es fruto de que los estudiantes no tengan una comprensión completa de las leyes y principios de la probabilidad.

Otros investigadores se han preocupado por identificar cómo incide la resolución de problemas en la comprensión conceptual de elementos de la probabilidad (Busadee y Laosinchai, 2013; Martin y Theis, 2012; Coenen et al., 2018; Heyvaert et al., 2018). En esta línea se destaca el trabajo de Martin et al. (2018), en donde se abordan problemas de probabilidad como una tarea matemática que le permite al estudiante el desarrollo de nuevos conocimientos a partir de la comprensión de los conceptos involucrados en los problemas planteados. En el estudio, se discuten argumentos de gran relevancia tales como la importancia del trabajo colaborativo en la solución de problemas de probabilidad, la importancia de establecer una conexión entre los enfoques teórico y experimental para apoyar el pensamiento probabilístico de los estudiantes y algunos elementos que permiten identificar la probabilidad, como una de las ramas de las matemáticas con una connotación menos negativa que otras.

Investigaciones han documentado el uso de recursos utilizados en el aula, entre otros el apoyo que brindan los libros de texto a los maestros, desde los enfoques de resolución de problemas que se plantea en ellos (Lonjedo et al., 2012; Sanchez-Acevedo, 2017).

Por otra parte, la investigación sobre la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad en los últimos años se ha centrado principalmente en problemas que involucran el análisis combinatorio (Busadee y Laosinchai, 2013; Coenen et al., 2018; Zahner y Corter, 2010), así como en problemas de probabilidad condicional (Huerta y Bresó, 2013; Lonjedo et al., 2012; Zahner y Corter, 2010) y en menor escala al uso de representaciones gráficas en la resolución de problemas (Awuah y Ogbonnaya, 2020; Obersteiner et al., 2015).

Acerca de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

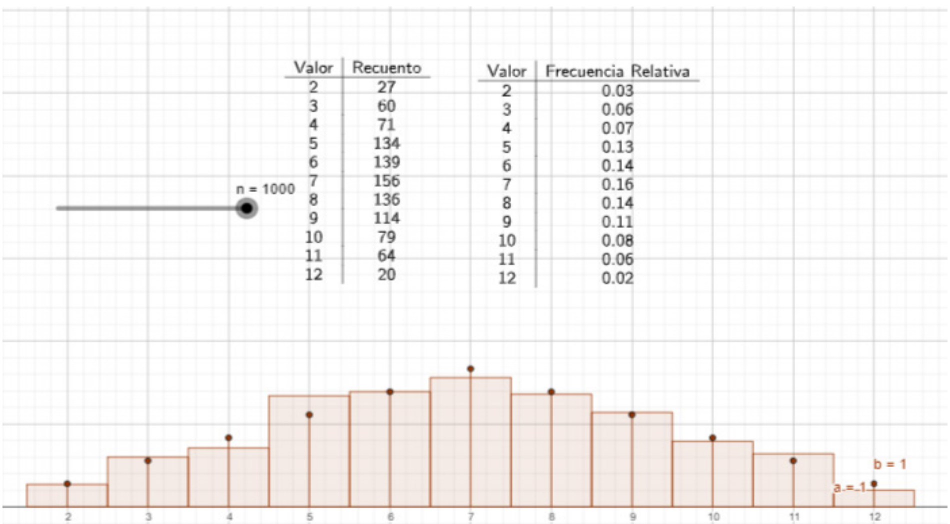
La investigación sobre el impacto de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas se ha multiplicado considerablemente (Ball et al., 2018; Drijvers et al., 2016; Drijvers, Kieran, et al., 2010), un grupo significativo de investigadores ha realizado estudios que sustentan la importancia que puede tener el uso apropiado de las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Artigue, 2010; Kuzle, 2013; Santos-Trigo et al., 2016).

Heid (2018) considera que la incorporación de tecnología digital específica de matemáticas en la instrucción de los estudiantes puede cambiar las representaciones que ven, la actividad matemática en la que participan y el contenido matemático que aprenden. En este sentido, se ha planteado que el uso de *software* dinámico como GeoGebra y Cabri, así como algunas aplicaciones de internet, propician múltiples representaciones y visualizaciones, favoreciendo la comprensión de los conceptos matemáticos (Goos, 2014; Manuel Santos-Trigo et al., 2016; Santos-Trigo y Machín, 2013). Otros argumentan que hacer uso de herramientas digitales al resolver problemas no rutinarios de matemáticas fomentan la creatividad de los estudiantes (Goos, 2010). Santos-Trigo y Machín, (2013) afirman que la tecnología digital brinda distintas posibilidades para que los estudiantes representen, exploren y resuelvan tareas matemáticas, y Leung (2011) considera que la tecnología es una herramienta pedagógica que puede enriquecer la capacidad cognitiva de los estudiantes.

Específicamente en el área de probabilidad, algunos investigadores consideran que las herramientas que brinda la tecnología permite generar una gran cantidad de información, además de producir de manera rápida diferentes tipos de representaciones y la ventaja de realizar cálculos con facilidad, lo que redunda en que los estudiantes puedan dedicar más tiempo a la comprensión de los conceptos (Batanero et al., 2016; Borovcnik y Kapadia, 2010; Parzysz, 2018). Un ejemplo que respalda estos planteamientos puede observarse en la Figura 1. En donde se presenta una simulación realizada con GeoGebra en la que se observan 1000 lanzamientos de un par de dados, los resultados de la suma de los dados, así como sus frecuencias absolutas y relativas.

Figura 1.

Simulación en GeoGebra para 1000 lanzamientos de dos dados



Como lo argumentan Pratt y Kazak (2018) "la investigación continúa sugiriendo que ciertos tipos de tecnología, utilizados en situaciones cuidadosamente diseñadas, pueden ofrecer oportunidades para el aprendizaje probabilístico que van más allá de las disponibles en la experiencia diaria" (p. 211).

Prodromou (2012) sostiene que la tecnología digital que ayuda en la manipulación y representación de datos, facilita a los estudiantes realizar inferencias, sin depender exclusivamente de la comprensión clásica de la probabilidad, en este sentido, la investigación viene enfatizando en que la probabilidad debe enseñarse a partir del análisis de fenómenos del mundo real, por lo que, tanto la modelación como la simulación de estos fenómenos se han convertido en un objeto de estudio central en el campo (Batanero et al., 2016).

Gürbüz y Birgin (2012) han investigado sobre cuáles son los efectos de la enseñanza asistida por computador (CAT) para remediar conceptos erróneos que los estudiantes tienen sobre la probabilidad. Utilizando herramientas digitales como el *software* Macromedia Dreamweaver, Flash MX 2004, el lenguaje Java y el editor NetBeans, con el fin de crear sus propias animaciones y simulaciones enfocadas en comparaciones de probabilidad y los conceptos de equiprobabilidad y representatividad, concluyeron que la CAT favorece el aprendizaje de la probabilidad y la transformación de los conceptos erróneos, ya que permite al estudiante participar en la construcción de su propio conocimiento, asociar su aprendizaje con la vida real e incrementar su motivación por el aprendizaje.

Yáñez y Jaimes (2013) presentan un trabajo en el que indagan sobre los procesos de razonamiento probabilístico de los estudiantes, respecto a la ley de los grandes números. Se apoyaron en el uso de simulaciones generadas en el *software* Probability Explorer, asumiendo que la simulación computacional de la probabilidad permite superar algunos sesgos y malas concepciones de los estudiantes. Al respecto, concluyen que para que los estudiantes comprendan los conceptos de variabilidad en el corto plazo y estabilidad de las frecuencias relativas deben realizarse actividades bidireccionales que involucren el espacio muestral y los resultados obtenidos.

English y Watson (2016) informan sobre una investigación en donde estudiantes de educación primaria experimentan sobre los conceptos de variación y expectativa a partir del lanzamiento de monedas, utilizando en algunas ocasiones simulaciones con el apoyo del *software* TinkerPlots. Entre los hallazgos reportan que los estudiantes desarrollaron una mejor comprensión de la relación entre frecuencia relativa y probabilidad teórica, así como sus respectivas asociaciones entre variación y expectativas. En general, los estudiantes mostraron mejores niveles de comprensión frente a la probabilidad.

Reflexiones finales

Como se evidencia en la literatura presentada, al explorar las creencias de los estudiantes, el objetivo primordial se centra en desarrollar estrategias que potencien la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas estrategias tienen como propósito principal ayudar a los estudiantes a superar las creencias menos favorables relacionadas con la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, el aumento de la investigación en torno al empleo de *software* dinámico en la resolución de problemas ha permitido una mejor comprensión de las conexiones entre las representaciones, habilitando la capacidad de brindar retroalimentación acerca de las acciones de los estudiantes y ofreciendo una variedad de enfoques. Por estas razones, se considera que el uso de *software* dinámico es beneficioso para el aprendizaje de las matemáticas.

Desde esta perspectiva, el uso de tecnología digital adquiere una mayor relevancia cuando se trata de abordar la resolución de problemas. Además, su efectividad se ve potenciada por el estímulo y el interés que los dispositivos electrónicos despiertan en los jóvenes, lo que puede contribuir a modificar algunas creencias arraigadas en dominios específicos de las matemáticas, como es el caso particular de la probabilidad.

Referencias

Aizikovitsh-Udi, E. y Radakovic, N. (2012). Teaching Probability by Using Geogebra Dynamic Tool and Implementing Critical Thinking Skills. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *46*(Galotti 1989), 4943-4947. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.364

Alabau, J., Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2020). Relación entre creencias sobre resolución de problemas, creencias epistemológicas, nivel académico, sexo y desempeño en resolución de problemas: un estudio en educación secundaria. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, *17*, 103-115.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 79-96.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). La heurística en la creación y resolución de enunciados de problemas de probabilidad. *Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Amir, G. S. & Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1), 85–107. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)00018-8

Ang, L. H., y Shahrill, M. (2014). Identifying Students' Specific Misconceptions in Learning Probability. *International Journal of Probability and Statistics*, *3*(2), 23-29. https://doi.org/10.5923/j.ijps.20140302.01

Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies Michèle Artigue Abstract. In Hoyles, C.; Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (2010th ed., pp. 463-475). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

Awuah, F. K. y Ogbonnaya, U. I. (2020). Grade 12 students' proficiency in solving probability problems involving contingency tables and tree diagrams. *International Journal of Instruction*, *13*(2), 819-834. https://doi.org/10.29333/iji.2020.13255a

Ball, L., Drijvers, P., Paulus H. M., Ladel, S., Siller, H.-S., Tabach, M. y Vale, C. (n.d.). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: tools, topics and trends*.

Ball, L., Ladel, S. y Siller, H. (2018). *Introduction*. 1-7. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4

Batanero Bernabeu, M. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Beghetto, R. A. y Baxter, J. A. (2012). Exploring student beliefs and understanding in elementary science and mathematics. *Journal of Research in Science Teaching*, *49*(7), 942-960. https://doi.org/10.1002/tea.21018

Beitzel, B. D., Staley, R. K. y DuBois, N. F. (2011). The (in)effectiveness of visual representations as an aid to solving probability word problems. *Effective Education*, *3*(1), 11-22. https://doi.org/10.1080/19415532.2011.604256

Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas con apoyo de la tecnología computacional* [Tesis Doctoral]. Cinvestav. México.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K. y Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *44*(7), 913-925. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3

Bingolbali, F. y Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *31*, 1-21.

Bonne, L. y Johnston, M. (2016). Students' beliefs about themselves as mathematics learners. *Thinking Skills and Creativity*, *20*, 17-28. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2016.02.001

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally Manfred Borovcnik and Ramesh Kapadia. *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education*, *April*, 41-48.

Burrus, J. y Moore, R. (2016). The incremental validity of beliefs and attitudes for predicting mathematics achievement. *Learning and Individual Differences*, *50*, 246-251. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.08.019

Busadee, N. y Laosinchai, P. (2013). Authentic Problems in High School Probability Lesson: Putting Research into Practice. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *93*, 2043-2047. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.162

Cerda, G., Ruiz, R. O., Casas, J. A., del Rey, R. y Pérez, C. (2016). Predisposición desfavorable hacia el aprendizaje de las Matemáticas: Una propuesta para su medición. *Estudios Pedagógicos*, *42*(1), 53-63. https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000100004

Coenen, T., Hof, F. y Verhoef, N. (2018). *Combinatorial Reasoning to Solve Problems*. 69-79. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_5

Coutinho, S. y Caberlim, L. (2015). Simulação computacional para a aprendizagem de probabilidade. In M. A. S. (Ed.), *Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE)* (M.A. Sorto, Issue July).

Di Martino, P. y Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(4), 471-482. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y. y Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4_1

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A. y Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In *New ICMI Study Series* (Vol. 13). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. y Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 535-562. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2

English, L. D. y Gainsburg, J. (2015). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition*, 313-335. https://doi.org/10.4324/9780203448946

English, L. D. y Watson, J. M. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(1), 28-62. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0028

English, L. y Sriraman, B. (2010). Theories of Mathematics Education. In L. English & B. Sriraman (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (Springer-V, pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2

Erazo, J. D. y Aldana, E. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*, *11*(1), 163-169.

Fajardo, A. y Benítez, D. (2020). influencia de las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas en educación matemática. *Revista de Educación Matemática*, *35*(3).

Fischbein, E. y Schnarch, D. (2016). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions Published by: National Council of Teachers of Mathematics Linked references are available on JSTOR for this article: The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based -M. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Francisco, J. M. (2013). The mathematical beliefs and behavior of high school students: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 481-493. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.012

Galende, N., Rojo, V. y Arrivillaga, A. (2019). Teaching-Learning Mathematics. *Journal of Psychological and Educational Research*, *27*(2), 88-110.

Goos, M. (2010). Using technology to support effective mathematics teaching and learning: What counts? *Research Conference*, 67-70.

Goos, M. (2014). The Mathematics Teacher in the Digital Era. *The Mathematics Teacher in the Digital Era*, *2*, 139-161. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1

Gürbüz, R. y Birgin, O. (2012). The effect of computer-assisted teaching on remedying misconceptions: The case of the subject "probability." *Computers and Education*, *58*(3), 931-941. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.11.005

Heid, M. K. (2018). *Digital Tools in Lower Secondary School Mathematics Education: A Review of Qualitative Research on Mathematics Learning of Lower Secondary School Students*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_10

Hensberry, K. K. R. y Jacobbe, T. (2012). The effects of Polya's heuristic and diary writing on children's problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(1), 59-85. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0034-7

Henschel, S. y Roick, T. (2017). Relationships of mathematics performance, control and value beliefs with cognitive and affective math anxiety. *Learning and Individual Differences*, *55*, 97-107. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.009

Heyvaert, M., Deleye, M., Saenen, L., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2018). How do high school students solve probability problems? A mixed methods study on probabilistic reasoning. *International Journal of Research and Method in Education*, *41*(2), 184-206. https://doi.org/10.1080/1743727X.2017.1279138

Huerta, P. y Bresó, A. (2013). *Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación*, 1-8.

Jäder, J., Sidenvall, J. y Sumpter, L. (2017). Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 759-776. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3

Jankvist, U. T. (2015). Changing students' images of "mathematics as a discipline." *Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 41-56. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.02.002

Jones, I. y Inglis, M. (2015). The problem of assessing problem solving: can comparative judgement help? *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 337-355. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9607-1

Jurdak, M. (2016). Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics. In *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08204-2

Kele, A. (2018). Factors impacting on students' beliefs and attitudes toward learning mathematics: Some findings from the Solomon Islands. *Waikato Journal of Education*, *18*(1), 85-92. https://doi.org/10.15663/wje.v23i1

Kleitman, S. y Gibson, J. (2011). Metacognitive beliefs, self-confidence and primary learning environment of sixth grade students. *Learning and Individual Differences*, *21*(6), 728-735. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2011.08.003

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 139-156. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_7

Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 20-40.

Lee, H. S., Angotti, R. L. y Tarr, J. E. (2010). Making Comparisons Between Observed Data and Expectied Outcomes: Students' Informal Hypothesis Testing with Probability Simulation Tools. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 68-96.

Lee, S. Y. (2016). Students' Use of "Look Back" Strategies in Multiple Solution Methods. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 701-717. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9599-9

Lester, F. y Cai, J. (2016). Posing and Solving Mathematical Problems. *Posing and Solving Mathematical Problems*, 117-135. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 325-336. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2

Li, Y., & Moschkovich, J. N. (2013). *Proficiency and beliefs in learning and teaching mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-299-0

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Lindfors, M., Winberg, M. y Bodin, M. (2019). The Role of Students' Scientific Epistemic Beliefs in Computer-Simulated Problem Solving. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *63*(1), 124-144. https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1324907

Lonjedo, M., Huerta, P. y Carles, M. (2012). Conditional Probability Problems in textbooks, an example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *153*, 319-337.

Markovits, Z. y Forgasz, H. (2017). "Mathematics is like a lion": Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 49-64. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9759-2

Martin, V., Oliveira, I. y Theis, L. (2018). *Teaching Probability in Junior High School Through Problem Solving: Construction and Analysis of a Probabilistic Problem*, 325-338. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92390-1_31

Martin, V. y Theis, L. (2012). La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène : le cas d'une élève à risque du primaire. *Nouveaux Cahiers de La Recherche En Éducation*, *14*(1), 49-69. https://doi.org/10.7202/1008843ar

Martínez-Padrón, O. (2021). El afecto en la resolución de problemas de matemática. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, *5*(1), 86-100.

Martínez-Padrón, O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, *17*(57), 234-244.

McDonough, A. y Sullivan, P. (2014). Seeking insights into young children's beliefs about mathematics and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(3), 279-296. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9565-z

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.

Molera Botella, J. (2012). ¿Existe relación en la Educación Primaria entre los factores afectivos en las Matemáticas y el rendimiento académico? *ESE: Estudios Sobre Educación*, *23*(23), 141-155.

NCTM. (2000). *Principles, N. C. T. M. (2000). Standards for school mathematics*. Reston,VA: National Council of teachers of mathematics.

Nicolson, C. (2005). Is chance fair? A student's thoughts on probability. *Teach Kids Math*, *12*(2), 83-89.

Niepel, C., Burrus, J., Greiff, S., Lipnevich, A. A., Brenneman, M. W. y Roberts, R. D. (2018). Students' beliefs and attitudes toward mathematics across time: A longitudinal examination of the theory of planned behavior. *Learning and Individual Differences*, *63*(February), 24-33. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.010

Obersteiner, A., Bernhard, M. y Reiss, K. (2015). Primary school children's strategies in solving contingency table problems: the role of intuition and inhibition. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(5), 825-836. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0681-8

Onuchic, L. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*.

Ozgen, K. (2013). An Analysis of High School Students' Mathematical Literacy Self-efficacy Beliefs in Relation to Their Learning Styles. *Asia-Pacific Education Researcher*, *22*(1), 91-100. https://doi.org/10.1007/s40299-012-0030-4

Parzysz, B. (2018). Solving Probabilistic Problems with Technologies in Middle and High School: The French Case. In *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 387-397). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9

Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A.-I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática*, *22*(3), 23-54.

Pitsia, V., Biggart, A. y Karakolidis, A. (2017). The role of students' self-beliefs, motivation and attitudes in predicting mathematics achievementA multilevel analysis of the Programme for International Student Assessment data. *Learning and Individual Differences*, *55*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.014

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery: On Understanding. Learning.*

Pongsakdi, N., Laakkonen, E., Laine, T., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M. y Lehtinen, E. (2019). The Role of Beliefs and Motivational Variables in Enhancing Word Problem Solving. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *63*(2), 179-197. https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1336475

Portari, D., Chapman, O. y Sullivan, P. (2008). *The Handbook of mathematics teacher education: Volume 1: knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Brill, Ed.).

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193-227). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Prendergast, M., Breen, C., Bray, A., Faulkner, F., Carroll, B., Quinn, D. y Carr, M. (2018). Investigating secondary students' beliefs about mathematical problem-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(8), 1203-1218. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1440325

Prodromou, T. (2012). *The Classicist and the Frequentist Approach to Probability within a TinkerPlots 2 Combinatorial Problem*. *2*.

Raya, R. (2020). *The Strategy of High School Students in Solving Probability Problems*. *5*(8).

Roesken, B., Hannula, M. S. y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(4), 497-506. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8

Rott, B., Törner, G. y Möller, J. P. A. (2018). Views and Beliefs in Mathematics Education. In *Views and Beliefs in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01273-1

Rubel, L. H. (2007). Probabilistic Reasoning on Coin Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 531-556. https://doi.org/10.2307/30034964

Sánchez, E. y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al pensamiento probabilista de los alumnos. *Actas de La Undécima Reunión de Matemática Educativa. Relme*, 157-161.

Sanchez-Acevedo, N. A. (2017). Análisis de problemas en Estadística y Probabilidad en libros de texto de segundo año de Educación Secundaria. *Revista Científica*, *3*(30), 167. https://doi.org/10.14483/23448350.12289

Santos-Trigo, M. (2019). Problem Solving in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 129-135). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_129

Santos-Trigo, M. y Machín, M. C. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 279-302.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 827-842. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0

Santos-Trigo, M. y Reyes-Martínez, I. (2014). The Coordinated Use of Digital Technologies in Learning Environments. *Communications in Computer and Information Science*, *446 CCIS*, 61-71. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10671-7_6

Santos-Trigo, M. y Reyes-Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 182-201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint) Alan H. Schoenfeld, The University of California, 1*. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sharma, S. (2006). *Personal Experiences and Beliefs in Early Probabilistic Reasoning: Implications for Research*, *1*(1), 177-184.

Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal*, *15*(2), 126-144.

Stack, S. y Watson, J. (2013). *Imagination and Metacognition*, *69*(4), 23-31.

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*(1), 8-29. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.005

Sumirattana, S., Makanong, A. y Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, *38*(3), 307-315. https://doi.org/10.1016/j.kjss.2016.06.001

Tarmizi, R. A. y Tarmizi, M. A. A. (2010). Analysis of mathematical beliefs of Malaysian secondary school students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 4702-4706. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.753

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M. y Barkai, R. (2013). Exploring young children's self-efficacy beliefs related to mathematical and nonmathematical tasks performed in kindergarten: Abused and neglected children and their peers. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 309-322. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9458-y

Tjoe, H. (2019). *"Looking Back" to Solve Differently: Familiarity, Fluency, and Flexibility* (Liljedah, P.; & M. Santos-Trigo, Ed., pp. 3-20). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_1

Vesga-Bravo, G. J. y Escobar-Sánchez, R. E. (2018). Trabajo en solución de problemas matemáticos y su efecto sobre las creencias de estudiantes de básica secundaria. *Revista De Investigación, Desarrollo E Innovación*, *9*(1), 103-114. https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n1.2018.8270

Vizcaino Escobar, A. E. y Manzano Mier, M. (2017). Análisis de las relaciones entre creencias epistemológicas sobre la matemática y rendimiento académico. *Psychology, Society and Education*, *9*(1), 105-119. https://doi.org/10.25115/psye.v9i1.469

Wang, G., Zhang, S. y Cai, J. (2019). Chinese high school students' mathematics-related beliefs and their perceived mathematics achievement: A focus on teachers' praise. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(7). https://doi.org/10.29333/ejmste/105875

Watson, J. M. (2014). *Section IV Commentary: The perspective of Mathematics Education*. 709-720. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_37

Watson, J. M., Caney, A. y Kelly, B. A. (2004). Beliefs about Chance in the Middle Years: Longitudinal Change. *In Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 581-588.

Yáñez, G. y Jaimes, É. (2013). Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números. *Integración: Temas de Matemáticas*, *31*(1), 69-86.

Yuanita, P., Zulnaidi, H. y Zakaria, E. (2018). The effectiveness of Realistic Mathematics Education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving. *PLoS ONE*, *13*(9), 1-21. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0204847

Zahner, D. y Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 177-204. https://doi.org/10.1080/10986061003654240

04

Revisión de un enfoque cognitivo para la construcción de conjeturas geométricas mediante Ambientes de Geometría Dinámica

Yonathan Bonelo Ayala
yonathan.bonelo@correounivalle.edu.co

Introducción

Un desafío importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es estudiar la transición de una explicación / argumento empírico (incluida la elaboración de conjeturas) a una prueba matemática aceptable. En la investigación de Dynamic Geometry Environment (DGE) se ha trabajado mucho para estudiar cómo se puede usar el modo de arrastre para facilitar los procesos de generación de conjeturas de los estudiantes, pero todavía hay una brecha en la investigación sobre el proceso de razonamiento de los estudiantes para proporcionar una explicación o demostración matemática sobre lo que descubren empíricamente. Es por ello crucial ahora centrar un interés en el que se detalle del proceso, las operaciones cognitivas y elementos de control que se vinculan y emergen de la actividad del estudiante cuando este resuelve un problema de geometría y se involucra en exploraciones dentro de un sistema de geometría dinámica (DGE).

Interés de investigación

Esta propuesta de investigación ha sido presupuestada con elementos teóricos desarrollados por Duval (1995, 1998, 2004, 2005) describiendo explícitamente las aprehensiones que emergen cuando se trabaja con figuras geométricas, y el tipo de modificaciones y operaciones cognitivas que dan cuenta de las aprehensiones previstas. También se ha referenciado la existencia de elementos que permiten caracterizar operaciones cognitivas que se pueden promover a través de estructuras de control (Marmolejo Avenia, 2014; Marmolejo Avenia et al., 2017; Marmolejo Avenia y Vega Restrepo, 2012; Marmolejo et al., 2020). Nuestro objetivo principal es investigar más a fondo las operaciones cognitivas y estructuras de control que ocurren durante la generación de conjeturas en la resolución de problemas en un (DGE). Tales operaciones y estructuras están asociadas a la visualización que permiten las figuras y a la geometría dinámica que ofrece el medio computacional.

Es importante reconocer un aumento en el interés de la visualización en la enseñanza de las matemáticas, el uso sostenido de herramientas computacionales como los computadores gráficos y *software* dinámicos, permitieron establecer en las comunidades de aprendizaje una mejor tendencia en investigación por el papel que determina esta actividad cognitiva en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

El Problema

La educación matemática en Colombia hoy por hoy enfrenta grandes desafíos en atención a diversas problemáticas de orden académico y curricular en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Tales cuestionamientos han impulsado en cierta medida la necesidad de reformar, o más bien, de lograr construir una propuesta curricular capaz de soportar un cambio de ruta.

Uno de los fines de la educación matemática es precisamente lograr un nivel de desarrollo enmarcado en el ser "matemáticamente competente" en el que se requieren ambientes de aprendizaje nutridos de situaciones que posibiliten avanzar a niveles cada vez más complejos (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

En el caso puntual de la Educación Matemática escolar, la estructura curricular fija unas metas básicas y formula estrategias para lograr un acercamiento a ellas, contemplando aspectos que se definen desde los Lineamientos Curriculares, como los procesos generales: razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Estos procesos se relacionan con Pensamientos, tales como; pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, los cuales giran alrededor de Sistemas Numéricos, como los geométricos, de medida, de datos, algebraicos y analíticos.

Tal estructura invita a pensar y a plantearse que aprender matemáticas desde los primeros años de escolaridad va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias (Benitez, 2006). Es entender las matemáticas no como los resultados de una actividad, sino como la actividad misma; no como un producto, sino como un proceso complejo que alberga tanto los resultados y las técnicas, los interrogantes, las conjeturas y los métodos que en una época dada permiten que un proceso determinado se transforme en un objeto matemático (Recalde, 2017).

¿Qué se desea responder?

En términos generales esta propuesta atiende una problemática que puede verse de distintos focos, en particular desde la **Didáctica de las matemáticas**, en el que se vinculan aspectos desde lo cognitivo y lo instrumental, de esta manera se plantea la siguiente pregunta que abarca de manera general un interés y una preocupación: ¿Qué estrategias cognitivas subyacen en un proceso de conjeturación en estudiantes de licenciatura en matemáticas de primer año, al resolver problemas que vinculan líneas y puntos notables de figuras planas dado un ambiente de geometría dinámica?

De esta manera se espera responder caracterizando de manera detallada y situada un proceso de conjeturación, dados los focos de interés en el que subyacen teorías que han trasegado en aspectos cognitivos e instrumentales que emergen de procesos de conjeturación dado ambientes de geometría dinámica.

Es por ello que propiciar en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, hacer conjeturas, establecer estrategias de resolución y formular contraejemplos se convierte en un buen pretexto por el cual abogar, discutir y reflexionar en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Más aun cuando el interés se centra en el registro de las figuras geométricas y el proceso de conjeturación desde un punto de vista cognitivo y computacional.

¿Cómo se va a considerar?

El presente Proyecto de investigación se ubica en la línea de formación en tecnología de la información y la comunicación en Educación Matemática con un enfoque acentuado en la resolución de problemas y en la existencia de elementos que permiten caracterizar operaciones cognitivas que se pueden promover a través de estructuras de control (Marmolejo Avenia, 2014). Desde esta perspectiva este trabajo de investigación documentará y rastreará los efectos que genera el uso de los DGE en un campo como la educación matemática, en particular en geometría y detallando procesos de conjeturación que vinculan operaciones cognitivas subyacentes a elementos de control visual.

De esta manera se pretende contextualizar nuestro estudio dentro de la literatura, que describe la forma en que está situado dentro de los estudios de conjeturación geométrica y en particular cómo un ambiente de geometría dinámica (DGE) podría contribuir a la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje en este campo. La fenomenología del *software* como los objetos, las operaciones (trasformaciones geométricas) y las relaciones (paralelismo, perpendicularidad y pertenencia) son rasgos característicos del DGE, pero es necesario y fundamental en la caracterización de un proceso de conjeturación, vincular las operaciones cognitivas que emergen cuando un estudiante resuelve un problema en un DGE aunado a estructuras de control en la formulación y desarrollo de un problema.

De otra manera, pero en consonancia con lo anterior, poder garantizar la formación en uso educativo de las tecnologías computacionales en especial los ambientes de geometría dinámica (DGE) en los programas académicos en las licenciaturas y propender por una educación de calidad, se debe atender por la alta cualificación de los futuros docentes en las construcciones de mejores Prácticas Educativas que involucren la reflexión, la integración, la evaluación, la exploración a los nuevos retos de una sociedad cada vez más digital.

¿Por qué es un problema?

Se atiende como un problema el hecho de no considerar en los procesos centrales de pensamiento matemático un aspecto que se atiende desde la Didáctica de la matemática, el aspecto cognitivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los procesos cognitivos que emergen y más aún cuando se vinculan escenarios distintos a los usuales, como es el caso de la tecnología digital, el caso de los ambientes de geometría dinámica (DGE).

Si bien es cierto que hoy por hoy en las distintas instituciones educativas de la región del Valle del Cauca, en especial la ciudad de Cali, se enfatiza en ambientes de aprendizaje distintos a los usuales, en los cuales se promueve el uso de tecnología computacional en las actividades de aula, y aunque no es nuevo hablar de ello, ya que por mucho más de 20 años su incorporación ha sido gradual en los sistemas escolares, se ha requerido de un formalismo que conlleve a una sistematización de experiencias y resultados comprobados que den cuenta de este proceso. Es por ello que, desde esta perspectiva, emprender trabajos de investigación que documenten y rastreen los efectos que genera el uso de la tecnología en un campo como la educación matemática, es de vital atención.

La resolución de problemas en la investigación en educación matemática ha sentado un precedente importante en el proceso de construcción de conjeturas en particular en geometría dinámica (Santos, 2023). El contexto de resolución de problemas, en particular con el uso de ambientes de geometría dinámica, permite desarrollar modelos matemáticos en el que emergen uso de descripciones, explicaciones y de diversos sistemas de representación (Santos y Benitez, 2006).

La investigación especializada ha contribuido en el detalle de pseudomodelos en la identificación y respaldo de conjeturas matemáticas a través del uso del *software* dinámico (Benitez, 2006) y modelos para la generación de conjeturas en DGE (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010) en el cual presentan un modelo que describe un proceso de generación de conjeturas que inicialmente fue desarrollado por Ferdinando Arzarello, Chiara Micheletti y Federica Olivero (1998)que describe procesos cognitivos que ocurren durante la fase de generación de conjeturas en la resolución de problemas. Por otra parte, Leung et al. (2013) presentan un modelo cognitivo que permite moverse en un dominio epistemológico en cuanto al entorno de geometría dinámica DGE y lo estático de la axiomática euclidiana en la descripción de procesos cognitivos e identificación de invariantes.

Sobre la base de estos hallazgos y su gran incidencia como herramienta de investigación en la Didáctica de las matemáticas (DM), este estudio se centrará en la construcción y seguimiento de conjeturas geométricas en un DGE bajo un modelo preliminar "Modelo de programación de construcciones" (Santos & Benitez, 2006) que describe una manera gradual en particular de caracterizar el proceso de conjeturación para posteriormente desembocar en la conjetura, que implica inducir una propiedad geométrica específica e intentar mantenerla a través del uso condicionado de la herramienta de arrastre caracterizando la siguiente secuencia instruccional: (i) identificar visualmente la conjetura; (ii) examinar si la conjetura pertenece a una familia de objetos isomorfos (prueba de arrastre); (iii) construir una macro que reproduzca la construcción y verificar si la conjetura se mantuvo en objetos generados por la macro; (iv) cuantificar y verificar propiedades de objetos matemáticos para detectar patrones; y (v) presentar argumentos formales para probar la conjetura emergente.

Dado que esta investigación presupuesta vincula ambientes de geometría dinámica en la descripción de un proceso de conjeturación en la manipulación de figuras geométricas triangulares, se detallará todo este proceso a la luz de las operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística (Duval, 1998) y las estrategias de control como el conjunto de elementos que permiten expresar los medios necesarios para tomar decisiones, promover juicios y decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto (Balacheff y Gaudin, 2010); lo cual permitirá mostrar en esta investigación que en el proceso de conjeturación en un DGE, las operaciones cognitivas y estrategias de control que emergen en su desarrollo, bajo este modelo previo de programación, aportarán metodológicamente como herramienta de investigación en la didáctica de las matemáticas.

Será indispensable vincular las operaciones cognitivas emergentes en el desarrollo de un proceso de conjeturación con las estructuras de control visual, puesto que permiten entender cómo un estudiante se enfrenta a un problema, a una pregunta en un DGE, el qué, por qué y para qué hizo lo que hizo, cuál es la estrategia cognitiva que emerge en el ir y venir de la resolución del problema o la pregunta dada o simplemente en los interrogantes que se entretejen cuando se intenta dar solución a un interrogante mayor, qué actividades cognitivas subyacentes de la actividad geométrica coadyuvan en el proceso de conjeturación en un DGE.

¿Qué sucede si no se resuelve?

Por tal razón y en consecuencia a lo mencionado anteriormente, el no abordar en la investigación de procesos de conjeturación en geometría dado un DGE, aspectos cognitivos en relación al cómo aprenden y desarrollan su capacidad de aprender, limitará en gran manera una caracterización amplia y detallada de las distintas fases o instancias del desarrollo intelectual humano cuando este resuelve un problema en matemáticas dado un ambiente computacional, además limitará una mirada cognitiva desde lo fenomenológico de un DGE cuando se está trabajando con una figura geométrica y lo que permite y emerge en su tratamiento figural. Incluso son pocos los trabajos de investigación que han fijado su mirada desde focos cognitivos por el estudio detallado de los procesos de conjeturación en un DGE.

Antecedentes

La tesis doctoral del profesor David Benítez Mojica, *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnologías*, dentro de sus conclusiones plantea que el uso de la tecnología en la resolución de problemas ayudó a amplificar el dominio de recursos matemáticos que poseía el alumno, generando la oportunidad de emprender acciones en las que el estudiante tuvo dificultad para realizarlas con lápiz y papel y que esta dimensión amplificadora del uso de la tecnología ayudó a los estudiantes a que tuvieran un dominio expresivo mayor que el mostrado en la solución de problemas con lápiz y papel, también pudieron tener acceso a un rango más amplio de problemas complejos.

También reflexiona acerca del tipo de estrategias que utilizan los estudiantes para controlar, extender y refinar conceptos matemáticos. Una conclusión fue que dentro de las estrategias meta-cognitivas el uso de la tecnología posibilitó ampliar las estrategias de control en la resolución de problemas, puesto que el uso de la calculadora coadyuvó a realizar los cálculos y a dar indicios sobre la validez del modelo y el empleo del entorno Cabri (DGE) para hacer trazos que les permitieron ver lugares geométricos y detallar el rol esencial en el proceso, así como la prueba del arrastre para acotar dominios geométricos de una determinada propiedad.

En términos generales, se puede concluir que el uso de ambientes de geometría dinámica ofreció a los estudiantes distintas posibilidades de interacción con las situaciones problemáticas. La selección de un DGE influye de manera importante en la selección de recursos y estrategias permitiendo que los estudiantes vean la solución de un problema desde diferentes ángulos o perspectivas (Benitez, 2006).

La tesis doctoral del profesor Gustavo Marmolejo Avenía, *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*, su propósito fue aportar elementos de reflexión sobre el diseño y uso de textos escolares de España y Colombia con relación al papel de la visualización como objeto de reflexión en el tratamiento del área, detalló elementos muy valiosos para la investigación en educación matemática, en particular en la enseñanza de la geometría. En donde el análisis de los resultados demostró que los libros al incluir las estructuras de control visual estudiadas en la investigación favorecen de forma considerable el desarrollo visual. Por consiguiente, el acto cognitivo de visualizar no es un asunto de constatación inmediata y simple, sino de percepción de tratamiento(s) de la información, que para el caso particular del aprendizaje de la geometría es de vital importancia un estudio detallado y estructural (Duval, 1998; Marmolejo Avenia y Vega Restrepo, 2012).

Por otra parte, contamos con los trabajos del grupo italiano conformado por los profesores Ferdinando Arzarello, Alexandra Mariotti y Ana Baccaglini en el cual presentan un modelo que describe un proceso de generación de conjeturas que inicialmente fue desarrollado por Ferdinando Arzarello, Chiara Micheletti y Federica Olivero (1998), en el que se determina los procesos cognitivos que ocurren durante la fase de generación de conjeturas en la resolución de problemas y se detallan, sustentan y exponen el papel de la conjetura y el proceso de conjeturación y sus distintas maneras de construcción en ambientes de geometría computacional y lo que subyace el adentrarse en una distinta y nueva fenomenología que ofrece la tecnología computacional, en especial cuando se da énfasis al arrastre como instrumento.

En el año 1998 cuando se efectúa el encuentro anual International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) realizado en Stellenbosch, Sudáfrica, los profesores Ferdinando Arzarello, Chiara Micheletti, Federica Oliveri y Ornella Robutti elaboran un informe de investigación titulado: *Un modelo para analizar la transición a pruebas formales en geometría*, en el que se esboza un modelo para interpretar los procesos de exploración de situaciones geométricas, formulando conjeturas y posiblemente probándolas. Subraya una continuidad esencial del pensamiento que gobierna la transición exitosa de la fase de conjeturas a la de prueba, mediante exploración y heurística adecuada. Los puntos esenciales son los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación, es decir, ascendente vs descendente y el cambio de uno al otro. Su principal consecuencia didáctica consiste en el cambio que provoca el control sobre las relaciones entre objetos geométricos.

Posteriormente en el año 2002 este grupo en cabeza del profesor Ferdinando Arzarello publican un artículo de investigación en la ZDM: *Un análisis cognitivo de las prácticas de arrastre en entornos Cabri*, allí el arrastre en el *software* de geometría dinámica (DGS) se describe introduciendo una jerarquía de sus funciones. Esto es adecuado para clasificar diferentes actitudes y objetivos de los estudiantes que investigan un problema geométrico, como explorar, conjeturar, validar y justificar. Además, la jerarquía tiene características cognitivas y se puede utilizar para describir las dos modalidades, a saber, ascendente y descendente, en las que los estudiantes interactúan con representaciones externas (por ejemplo, dibujos de Cabri). Pasar de una modalidad a otra, a través del arrastre, a menudo les permite producir conjeturas fructíferas y pasar del lado empírico al teórico de la cuestión. La génesis de funciones tan diferentes en los estudiantes no ocurre automáticamente, sino que es la consecuencia de intervenciones didácticas específicas del profesor en los alumnos.

Estos trabajos previos dieron lugar y cabida al nacimiento de otras ideas subyacentes a esta propuesta inicial. Ejemplo de ello las profesoras Alexandra Mariotti y Ana Baccaglini, por su parte, construyen con una propuesta ambiciosa y mayúscula en el campo de la educación matemática en cuanto al papel de la conjetura en DGE. En el año 2010 divulgan para la revista internacional de computadoras para el aprendizaje matemático: *Generación de conjeturas en geometría dinámica: el modelo de mantenimiento de arrastre*, el cual se centra especialmente en los procesos cognitivos que pueden ser inducidos por determinadas formas de arrastre en Cabri. Además, han concebido un modelo que describe algunos procesos cognitivos que pueden ocurrir durante la producción de conjeturas en geometría dinámica y que parecen estar relacionados con el uso de modalidades de arrastre específicas.

Este modelo de conjeturas MD parece describir y predecir apropiadamente el comportamiento de los estudiantes, en los casos en los que se han apropiado los esquemas de arrastre. El modelo también se puede utilizar para descubrir y describir las dificultades cognitivas que surgen de episodios en los que el modelo no parece aplicarse. Por otra parte, la investigación contribuye con la concepción de una nueva noción conceptual, argumentación instrumental, la cual parece proporcionar una descripción de una manera particular en la que un DGE puede contribuir a la fase de conjetura, dando al solucionador un nuevo medio para desarrollar argumentos. En el que se cree que la noción de argumento instrumentado, y potencialmente los de diferentes tipos de argumentos instrumentados, pueden convertirse en herramientas explícitas para usar durante las argumentaciones en un DGE, y estas pueden ser discutidas en el aula a un meta-nivel. Los argumentos instrumentados pueden convertirse entonces en un tipo explícito de argumentos que los estudiantes pueden elegir utilizar conscientemente (Mariotti y Baccaglini, 2010).

Adjunto al trabajo elaborado por Alexandra Mariotti y Ana Baccaglini en el año 2010, ese mismo año la profesora Ana Baccaglini se doctora con la investigación: *Conjeturar en geometría dinámica: un modelo para la generación de conjeturas mediante el mantenimiento del arrastre*, el cual funge como antecedente teórico en la investigación posterior ya mencionada, en el que describe las raíces teóricas de los tres conceptos principales que se pueden encontrar en la literatura: la idea de qué es un sistema de geometría dinámica (DGS), la noción de problema abierto en un DGS y la de arrastrar en un DGS. (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010) En esta tesis doctoral su propósito fue estudiar aspectos del impacto de los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS) en el proceso de producción de conjeturas en geometría euclidiana, centrándose en los procesos cognitivos que surgen en correspondencia con modalidades de arrastre particulares en Cabri.

El estudio muestra la idoneidad del modelo de conjeturación de MD arrojando luz sobre una relación entre los procesos abductivos y el uso de DM, dando fuertes motivos a la introducción de la noción de abducción instrumentada. El estudio tiene implicaciones para el diseño de actividades basadas en el uso del arrastre de mantenimiento, con el objetivo educativo de introducir a los estudiantes en la conjetura y demostración en geometría.

Un trabajo para resaltar de entre otros y que es incisivo en el desarrollo de procesos de conjeturación en DGE, son los aportes del Profesor Allen Leung. Justamente en el año 2013 junto con las profesoras Alexandra Mariotti y Ana Baccaglini el profesor Allen Leung pública para la revista internacional *Estudios Educativos en Matemáticas*, “Discernimiento de invariantes en entornos de geometría dinámica”, en el que interpretan y describen un modelo de invariantes discernidores en DGE a través de tipos de conciencia de variación y simultaneidad, y percepción sensoriomotora que conduce a la conciencia del control de arrastre. En este modelo, se distinguen invariantes de nivel 1 e invariantes de nivel 2. Discutimos la conexión entre estos dos niveles de invariantes a través del concepto de camino que pueden desempeñar un papel importante durante las exploraciones en DGE, que van desde el discernimiento de invariantes de nivel 1 hasta el discernimiento de invariantes de nivel 2.

Dado que los entornos de geometría dinámica (DGE) proporcionan un dominio epistémico, donde el movimiento y la variación junto con la retroalimentación visual y sensoriomotora pueden guiar la identificación de las propiedades geométricas de las figuras. La identificación de invariantes es una actividad importante en el pensamiento matemático. El concepto de invariante se refiere a lo que permanece igual cuando los diferentes aspectos de un fenómeno varían, y un aspecto sensorial de discernir invariantes es percibirlos visualmente y separarlos durante la variación. Los DGE se basan en la variación visual y, a través del arrastre, introducen al usuario en una pseudo-realidad que ayuda a facilitar la visualización de dicha simulación mental (Leung et al., 2013).

En síntesis, se ha presentado trabajos de investigación que a su vez representan grupos y líneas de investigación determinados, que hoy por hoy siguen en ejercicio. Desde el trabajo del profesor Benítez y el grupo de México, en el cual hoy en día se ha consolidado como seminario permanente entre la universidad del Valle y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav) sobre el Problem Solving adheridos al doctorado interinstitucional en educación, énfasis educación matemática de la Universidad del Valle.

Como también los trabajos de investigación del profesor Marmolejo que siguen incidiendo en el ámbito de la enseñanza de la geometría desde un punto de vista cognitivo, detallando la visualización, las operaciones y funciones cognitivas y las estructuras de control.

Los trabajos del grupo italiano que desde 1996 en publicación del PME han sentado un precedente en el trabajo de la conjetura y todo lo que subyace su desarrollo, así como de los contextos y escenarios que se vinculan para su caracterización. Cabe decir que en el presente estudio doctoral se cuenta con la participación del Dr. Allen Leung como director de pasantía internacional en el que se viene desarrollando el trabajo de caracterización de los procesos de conjeturación, teniendo en cuenta el vínculo de las operaciones cognitivas, estructuras de control y lo que permite la figura geométrica como objeto matemático aunado a su manipulación desde ambientes de geometría dinámica.

Cabe destacar que la presente revisión de literatura permitió en esta investigación considerar elementos valiosos en la caracterización de un proceso de conjeturación con foco desde lo cognitivo, vinculado a ambientes de geometría dinámica, procesos de visualización y diseño de tareas que promueven DGE. Se deben considerar enfoques teóricos para la estructuración del DGE como medio de exploración y ejecución, la aproximación instrumental, mediación y mediación semiótica, orquestación y seres humanos con medios (Pérez Médina, 2014).

Esto a su vez permite enunciar como futura línea de investigación: la construcción de conjeturas geométricas desde un punto de vista cognitivo cuando se promueve en un DGE.

Referencias

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (1998). *A model for analysing the transition to formal proofs in geometry* (Vol. 2).

Baccaglini-Frank, A. y mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International journal of computers for mathematical learning*, *15*(3), 225-253. Https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Balacheff, N. y Gaudin, N. (2010). *Modeling students' conceptions: the case of function*, *16*(1987), 207-234. Https://doi.org/10.1090/cbmath/016/08

Benitez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes en la resolucion de problemas con el uso de tecnología* [Tesis doctoral]. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.

Benitez Mojica, D. y Santos-Trigo, M. (2006). Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Prague, Czech Republic Volume 2 Research Reports Abr-Dri Editors: Jarmila Novotná, *2*, 129-136.

Duval, R. (1995). *Duval (1995) Geometrical pictures - kinds of representation and specific processings.pdf*.

Duval, R. (1998). *Duval (1998)Ggeometry from a cognitive point of view.pdf*.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... Una quinta. En *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188).

Duval, R. (2005). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5-53.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational studies in mathematics*, *84*(3), 439-460. Https://doi.org/10.1007/s10649-013-9492-4

Marmolejo Avenia, G. A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles.* (vol. 4, issue 1).

Marmolejo Avenia, G. A., Sánchez, N. y Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *12*(2), 18-28. Https://doi.org/10.54343/reiec.v12i2.220

Marmolejo Avenia, G. A. y Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, *24*(visualización), 7-32.

Marmolejo, G. A., Prada, R. y Insuasty, E. (2020). La visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales en el estudio de las matemáticas. Una revisión bibliográfica descriptiva entre 1981 y 2016. *Revista espacios*, *41*(26), 292-307.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas. En *Revolución educativa* (issue 3). File:///c:/users/marym_000/pictures/estandares basicos.pdf

Recalde, l. C. (2017). *Lecturas de historia de las matematicas*, *451*.

05

Creencias y Concepciones de los profesores de Educación Media sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Jorge Enrique Galeano
jorge.enrique.galeano@correounivalle.edu.co
Adriana García Moreno
adriana.garcia.moreno@correounivalle.edu.co
Ronald Andrés Grueso
ronald.grueso@correounivalle.edu.co
Hilda Marleth Palacios
hilda.palacios@correounivalle.edu.co
Marco Emilio Correa
marco.correa@correounivalle.edu.co

Introducción

El propósito del proyecto 5333 de la convocatoria interna 134-2021 financiado por la Universidad del Valle con vigencia en el periodo febrero 2022 - febrero 2023, fue caracterizar creencias y concepciones de los profesores de secundaria sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas. Para fundamentar el proyecto se realizó hacer una aproximación de las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas sobre la enseñanza de las matemáticas y sus implicaciones según Donoso et al. (2016) y Martínez et al. (2019), y un análisis de la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas según Garzón y Vega (2011), Guin y Trouche (2005) y Trouche (2005).

En términos metodológicos, se trata de un estudio cualitativo-naturalista, correspondiente a un estudio de caso, con ocho (8) profesores de matemáticas de Instituciones Educativas públicas de Cali, Santander de Quilichao, Zarzal y Buenaventura. Para la selección (dos profesores por cada sede) se usaron criterios relacionados con la experiencia laboral, tipo de Institución Educativa (pública o privada) y tener estudios posgraduales. La caracterización se realizó a partir de protocolos de observación de clases en el aula y entrevistas semiestructuradas.

El proyecto se desarrolló en cinco fases. La primera consistió en la fundamentación de la problemática; la segunda en la selección de los casos de estudio y el diseño de instrumentos para la recolección de datos; la tercera en la implementación de los instrumentos y las observaciones; la cuarta fase consistió en el tratamiento de la información y su análisis en términos de los referentes conceptuales; por último, en la quinta fase se da cuenta de los resultados. Uno de los principales resultados de la investigación es resaltar la importancia de la observación como estrategia metodológica que se consolida en el campo de la Educación Matemática para dar cuenta de investigación en aula y los procesos de enseñanza y aprendizaje en acto. Se transcribieron 30 protocolos de las clases de matemáticas de profesores de Educación Básica y media de Instituciones públicas de las regiones del Norte del Cauca, Buenaventura, Zarzal y Santiago de Cali en Valle del Cauca.

Por otro lado, como resultado de un primer análisis de los protocolos de observación, se diseña una entrevista semiestructurada que se aplica a los 8 profesores para el alcance del objetivo principal, y así dar cuenta del poco uso de recursos manipulativos y digitales, y, de un predominio del uso del lenguaje como instrumento mediador en los procesos de aprendizaje.

Los 8 profesores participaron de la entrevista dirigida por el investigador principal del proyecto, las preguntas de la entrevista se centraron en dos temas: creencias sobre el aprendizaje en matemáticas y su relación con el uso de recursos, el análisis de estas entrevistas se realizó usando análisis de contenido (Braun y Clarke, 2006) el cual permitió identificar temas y categorías que dan cuenta de lo buscado.

Aspectos teóricos

Se acoge la relación propuesta por Cross (2009) en relación con las creencias que sobre las matemáticas y su incidencia en la enseñanza tienen los profesores. Cross retoma a Ernest (1988), quien en la búsqueda de una aproximación a la enseñanza de las matemáticas que responda a las necesidades de formación actual, presenta un argumento que parte de considerar 3 visiones sobre la naturaleza de las matemáticas que habrían de cambiarse hacia una visión centrada en la solución de problemas como la aproximación que mejor atiende dichas necesidades; se hace entonces un recorrido similar con la intención de encontrar una relación pertinente para este trabajo entre las visiones que tienen los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y sus creencias.

En el contexto de las reformas de los años 80 que se proponían en la enseñanza de las matemáticas Ernest (1988) hizo un análisis de las condiciones necesarias para adelantar tales reformas, y recomendó la adopción de una aproximación a la enseñanza de las matemáticas desde el enfoque de la resolución de problemas, mismo que se adoptó en Colombia, cf. MEN (1998) adoptar este enfoque requiere cambios profundos.

> Teaching reforms cannot take place unless teachers' deeply held beliefs about mathematics and its teaching and learning change. Furthermore, these changes in beliefs are associated with increased rreforameflection and autonomy on the part of the mathematics teacher. It depends fundamentally on the teacher's system of beliefs, and in particular, on the teacher's conception of the nature of mathematics and mental models of teaching and learning mathematics. (Ernest, 1988, p. 249)

Una visión instrumental de las matemáticas sostiene que las matemáticas son una acumulación de hechos, reglas y habilidades para realizar ciertas tareas, así pues, las matemáticas son conjunto de reglas y hechos desconectados; una visión platónica de las matemáticas las asume como un cuerpo estático y unificado de cierto conocimiento, las matemáticas son descubiertas no creadas y una visión de las matemáticas como resolución de problemas las asume dinámicas, en continua expansión, un campo de creación e invención, un producto cultural humano. Estas visiones el MEN las ubica como fuente de las concepciones que tiene los profesores, a la platónica la pone en relación con la formalista, Ernest (1988) sostiene que estas visiones se asocian a modelos de enseñanza, más o menos así:

Una enseñanza que se centra en el rendimiento del estudiante hace énfasis en su desempeño y dominio de reglas y procesos matemáticos, se la relaciona con la visión instrumentalista de las matemáticas. Una enseñanza que se centra en el contenido gira en torno a la comprensión de dichos conceptos y busca la comprensión de relaciones y los procedimientos asociados, se le relaciona con la visión platónica de las matemáticas. Y una enseñanza que se centra en el salón de clase usa los avances en cuanto a la organización y estructura de un buen salón de clase, supone que el aprendizaje es mejor si las lecciones que toman los estudiantes tienen estructura y se presentan con claridad, se le relaciona con una visión de resolución de problemas.

La hipótesis con la que se trabaja finalmente es que es posible describir la creencia sobre el uso de recursos en términos de un modelo de enseñanza y, en consecuencia, una visión sobre la naturaleza de las matemáticas. Las creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza que tienen los profesores se relacionan con sus enfoques en clase y se consideraron fundamentales para definirlas, aunque los profesores de matemáticas no describen sus visiones personales sobre la naturaleza de las matemáticas en los términos: platonista, instrumentalista o resolución de problemas (Ernest 1991) estas categorías pueden ser usadas en el análisis de las creencias de los profesores (Chen, 2015).

Se logra poco, señala Pajares (1992), si la investigación en creencias en educación falla en dar luces sobre la relación entre las creencias, por un lado, y las prácticas de los profesores y los resultados de los estudiantes, por el otro. Se necesitan estudios que señalen creencias que están relacionadas con ciertas prácticas de enseñanza. Estas creencias y concepciones están asociadas a la forma como el docente aprendió las matemáticas. Estos autores coinciden con otros que ponen de manifiesto que cuando se conversa con los profesores al respecto, ellos mismos reconocen que deben reflexionar a partir de lo que hacen en sus clases y replantear ciertas concepciones que tienen sobre la enseñanza de las matemáticas.

Es amplio y diverso el campo de estudio sobre las creencias (Ernest, 1991; Pajares, 1992; Martínez, 2019; Cross, 2009; Chen, 2015), parece haber la necesidad de recocer la importancia de los aspectos emocionales y su relación con los cognitivos, tan ampliamente estudiados. Si bien no hay una definición universal con la que los académicos que trabajan el tema estén de acuerdo, es común que se adopten posturas, por ejemplo Croos (2009) las define como ideas y pensamientos consientes e inconcientes sobre sí mismo, el mundo y su posición en él, son personales, estables y a menudo residen más allá del control inmediato del individuo, en cuanto a las matemáticas afirma que cada individuo sostiene un rango de creencias que influencian su percepción de las experiencias que tiene con otros y con el mundo en general, estas creencias se han investigado en varias áreas de investigación educativa.

Adler (2000) define recurso como cualquier cosa que puede "reorientar" el trabajo de un profesor. Se concibe a partir de la idea de algo que es fuente para el trabajo del profesor, y que a la vez aporta a la actividad que ejerce. Se destaca que las adaptaciones y configuraciones del recurso pedagógico son el resultado de las concepciones y el conocimiento profesional de un profesor. Garzón y Vega (2011) adoptan un punto de vista amplio en relación con los recursos propios de la práctica profesional de los profesores de matemáticas, los cuales son vistos en términos de un proceso complejo y dinámico que incluye, además de las personas mismas, los lenguajes, los materiales educativos.

> Por otro lado, como se mencionó anteriormente, se realizó un análisis de la noción de recurso pedagógico según lo planteado por Garzón y Vega (2011), "Entendemos como recurso pedagógico a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de los materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los actos discursivos en los cuales aquellos toman un sentido y significación particulares" (p.10).

La mediación se analizó de forma general y de acuerdo con tres enfoques. La mediación en su forma general se abordó desde los aportes propuestos por Vygotsky, quien plantea que los procesos mentales superiores en las personas que aprenden son mediados por herramientas fundamentales como, por ejemplo, el mundo simbólico y el manejo de códigos y, por supuesto, el lenguaje. En este sentido, se plantea el aprendizaje como un proceso social, mediado por aspectos externos asociados a la naturaleza misma del ser humano.

Diseño metodológico

El proyecto se llevó a cabo a través de cinco fases: la primera fue el refinamiento de la documentación de la problemática; en la segunda la selección de la población objeto de estudio y el diseño de instrumentos para la recolección de datos; la tercera correspondió en la ejecución y observación de lo planeado, la cuarta fase correspondió al tratamiento de la información y su análisis en términos de los referentes conceptuales. Finalmente, la quinta fase, correspondió a la elaboración de un catálogo de resultados y conclusiones en función del objetivo general del proyecto. Esta parte implicó también la consolidación del informe final del desarrollo del proyecto.

La fase I consistió en el refinamiento y ampliación de los antecedentes que permitieron una mejor delimitación de la problemática y contextualización del proyecto. Así mismo, y como consecuencia de lo anterior, se desarrollaron los referentes conceptuales que fundamentan el marco teórico. Dicha ampliación, consistió en hacer un análisis a fondo de las nociones de mediación y de recursos pedagógicos.

En la fase II, y como consecuencia de lo desarrollado en la anterior, se articulan los referentes teóricos abordados, de tal manera que permitan identificar elementos relevantes asociados a la mediación de los recursos pedagógicos. De esta manera, se determinaron las características de los instrumentos de recolección de datos, de tal manera que su diseño permitió el hallazgo de unidades de análisis en dichos datos. Así en esta fase se seleccionaron los ocho casos de estudio, se ubicaron los contextos y el número de observaciones de clases a cada uno de los profesores. En ese caso, se describen brevemente los esquemas para el análisis de los protocolos y para la entrevista semiestructurada. Simultáneamente a esta fase, se realizó la observación de clases de los 8 profesores (40 registros/protocolos de clase).

El análisis de estas observaciones contribuyó al diseño de la entrevista , que se constituye en el instrumento principal de recolección de datos, en la fase III se organizaron las entrevistas con los docentes y los datos obtenidos se transcribieron para efectos de facilitar su revisión. Las ocho transcripciones de las entrevistas se analizaron a partir del análisis temático, un método pertinente para identificar, analizar y reportar patrones (temas) en un conjunto de datos, se puede incluir en el grupo de métodos de análisis cualitativo de datos que se ocupan de "identificar temas o patrones 'recurrentes' en conjuntos de Datos, como lo puede ser 'el análisis del discurso' o el análisis de contenido o la teoría fundamentada" (Braun y Clarke, p. 80); se diferencia de los anteriores pues no está casado a un contexto teórico preexistente y por lo tanto puede ser usado con diferentes marcos teóricos, un tema captura algo importante de los datos sobre la pregunta de investigación, debe aparecer un número de veces "significativo" en el conjunto de datos, es algo a lo que se le da considerable atención, no solo un par de proposiciones, se debe decidir si es explícito (a nivel semántico) o latente (a nivel interpretativo). Una vez recolectados los datos, se realizó la interpretación de cada caso. En este sentido, se seleccionaron algunos episodios provenientes de las transcripciones de entrevistas y protocolos cuyos enunciados contenían elementos de una o varias de las categorías.

Finalmente, la quinta fase, que corresponde a la elaboración de un catálogo de resultados y conclusiones en función del objetivo general del proyecto; y que además, implica también la consolidación del informe final del desarrollo del proyecto.

Presentación y análisis de resultados

En términos generales y en cuanto a las creencias y concepciones de los profesores, objeto de este estudio, es notorio un aparente distanciamiento entre el deber ser y el deber hacer. En cuanto al deber ser, por ejemplo, en las entrevistas, a propósito de que las preguntas son explícitamente intencionadas para que se hable de ello, los profesores manifiestan ciertas concepciones acerca de los recursos, seguramente derivadas de su conocimiento profesional tanto desde su experiencia como de su formación inicial y continua. Ejemplo de esto, es cómo los profesores mencionan algunos recursos (en su mayoría tangibles) y la incidencia de estos en el aprendizaje. Mientras que en cuanto al deber hacer, en la observación de aula, los profesores muestran acciones y discursos en los cuales no necesariamente se ven reflejada la importancia que se le adjudicaba a los recursos en la entrevista.

En particular, en la entrevista, en cuanto al uso de recursos y su incidencia en el aprendizaje, se considera que el juego es una estrategia para persuadir al estudiante, algo atractivo para este. Mientras que, en los protocolos de observación, lo más cercano a esta concepción fue en el marco de la revisión de una tarea, en la cual, para efectos de revisar la producción de cada uno, se hizo por turnos a partir del típico juego del "tingo-tango".

Mientras que en la entrevista se enfatiza en la importancia del uso de videos para aterrizar mejor algunos aspectos abstractos de las Matemáticas y se menciona que hay plataformas digitales en las que se puede apoyar (sin mencionar con especificidad cuáles, a excepción del Classroom) e inclusive para evaluar. Parece haber una concepción de recurso tecnológico, en relación solo con aquellas plataformas predeterminadas en las que los estudiantes interactúan con estos materiales de manera operativa. Sin embargo, en el aula, no hay evidencia de aquellos recursos tecnológicos o digitales en los que la interacción con los estudiantes sea con propósitos de exploración, construcción o validación.

Así pues, se evidencia por lo menos tres concepciones en general, derivadas de la entrevista:

- Asociada a la importancia de este tipo de materiales en tanto permiten a los estudiantes explorar y usar sus habilidades motoras, como, por ejemplo, recortar, dibujar, construir maquetas, etc.
- Que este material no necesariamente debe tener un uso pedagógico predeterminado, sino que también puede consistir en material fungible de uso cotidiano
- Que el material concreto tiene y debería tener relación directa con tecnologías digitales para lograr mejores aprendizajes en los estudiantes. Sin embargo, esta posible relación solo se menciona en términos de cómo uno le hace promoción a la otra. Por ejemplo, cuando se propone una actividad con material concreto y una plataforma como el Classroom o el video, sirve de mecanismo de difusión para dar instrucciones más precisas sobre lo que se debe hacer con dicho material concreto.

Los aspectos mencionados anteriormente, contrastan con lo observado en clase, en la medida en que no se evidencia el uso y/o propósito de ciertos recursos en el aprendizaje. En este sentido, parece que la actuación en el aula en general por parte de los profesores está supeditada a ciertas creencias que denotan algún tipo de limitante para emplear los recursos con los fines que se mencionan en la entrevista. Surgen entonces ciertos interrogantes sobre el posible eslabón perdido entre la teoría y la práctica, entre lo que se dice y lo que se hace, entre el deber ser y el deber hacer, entre las concepciones y creencias de los profesores.

Dicho eslabón puede estar asociado a creencias sobre cómo posiblemente el entorno ambiente o infraestructura puede condicionar la orquestación que vincula ciertos recursos. Así mismo, puede quedar abierta la discusión frente a cómo la formación inicial (o continua en algunos casos) de los profesores puede condicionar el conocimiento real que se tenga sobre el uso y funciones de ciertos recursos pedagógicos, es decir, cómo a pesar de que haya un conocimiento sobre el qué (en torno al conocimiento de la existencia de ciertos recursos), no necesariamente hay un conocimiento del cómo (en torno a cómo se usan en el aula y la incidencia en el aprendizaje, en términos por ejemplo, de génesis instrumental).

Sobre el proceso de investigación y algunos instrumentos de recolección de datos

De otro lado, el proceso llevado a cabo durante el desarrollo del proyecto permitió la consolidación paulatina de estrategias metodológicas y diseño de instrumentos para la obtención y análisis de información, en el marco de un trabajo cualitativo que supone algunas modificaciones durante el proceso a partir de los hallazgos que se van presentando.

Este aspecto, pone de manifiesto distintas reflexiones y acciones frente a procesos de investigación que se lleven a cabo en el marco del trabajo con los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas, haciendo énfasis en instrumentos como la observación en el aula y la entrevista semiestructurada. Se sugiere que las distintas teorías abordadas podrían potenciarse con el uso y constante refinamiento de dichos instrumentos, los de observación en particular. Los primeros hallazgos llevaron a proponer el siguiente esquema para la entrevista:

Tema 0: presentación. Se pide el nombre y (autorización expresa de grabar); experiencia laboral-docente, sector público o privado estudios de pregrado y posgrado, si los hay; ¿Qué impresión/comentario tiene sobre la participación en este proyecto? y sobre el proceso de observación de sus clases. La idea es lograr que el entrevistado entre en una dinámica normal de conversación con el entrevistador. así se evitan predisposiciones o respuestas rebuscadas.

Tema 1. Se trata de explorar la concepción que tiene el/la profesor(a) sobre el aprendizaje y por esa línea avanzar hacia su concepción sobre el aprendizaje mediado con recursos simbólicos como el lenguaje o el aprendizaje mediado con instrumentos; de este último bloque se desprende el segundo tema, pues así se le da continuidad a la charla y se abordan los temas de interés.

Preguntas: en trabajos tradicionales sobre el currículo se suele proponer que el currículo de matemáticas aborde la respuesta a preguntas cómo ¿qué están aprendiendo los estudiantes? Y ¿cómo están aprendiendo? En relación con eso, **¿qué cree usted que ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas?** o **¿qué los ayuda en su proceso de aprendizaje de las matemáticas?**

Tema 2. Los recursos pedagógicos en clase de matemáticas tienen una historia amplia y diversa. De material didáctico o el llamado material concreto a libros de texto, pasando por calculadoras y otros objetos que aparecen en el salón con una intención, hasta llegar a los computadores y otros recursos (documentales, por ejemplo) que los profesores aprovechan para su clase. Si nos centramos en material didáctico, calculadoras o computadores, ¿qué tipos de recursos usa usted en su clase? según su experiencia.

Análisis de protocolos de observación

El análisis de los protocolos no obedece a una orientación metodológica específica sino a las prácticas de análisis que se han desarrollado en la licenciatura en matemáticas, dicho análisis inicia con la revisión de las transcripciones, luego la identificación de escenas y su posterior ubicación en alguna de las categorías que se definen para el análisis, en este caso se tenían 3: recursos, mediación, y su relación, con las cuales se conforma una tabla; así los contenidos de cada protocolo se numeran y el protocolo se identifica con un código, de tal suerte que un primer análisis de cada protocolo se organiza en términos de estos elementos. Las imágenes siguientes ilustran el proceso desde el balance inicial de los protocolos a analizar hasta el análisis inicial.

Tabla 1.

Información profesores participantes. Elaboración propia
Versión dic 12-2023.

Profes	Pro obs	Formación	Experiencia	IE pública y grado
1P1	5	LIC MATEMÁTICAS	23 AÑOS EXP	PÚBLICA, G 8
2p1	5	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas	1 AÑO HACE	PÚBLICA GRADO; G 5
2p1	5	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas	10 años / secundaria	PÚBLICA
2p2	5	LIC EDU BAS E MAT	5 años/secundaria	PÚBLICA
3p1	2	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas	PTA Uv	PÚBLICA
3p2	1	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas		PÚBLICA
4p1	5	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas	6 años Proyectos formación	PÚBLICA
4p2	3	LIC EDU básica Énfasis en matemáticas	5 años- privado	PÚBLICA

Ilustración 1.

Ejemplos de protocolos 1: introducción y contexto de la observación

PRIMER REGISTRO DE OBSERVACIÓN REALIZADO EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA xxx – SANTANDER DE QUILICHAO

Observación a cargo de la sede Meléndez - Profesor 1 – Registro 1 (4P1R1)

A continuación, se presenta el primer registro de observación realizado en el colegio público Limbania Velasco, ubicado en Santander de Quilichao, el día viernes 1 de abril de 2022. Se observa la clase que imparte la docente Laura Yela a 35 estudiantes del grado décimo uno. La profesora mencionó que el propósito de su clase hoy será trabajar el tema de operaciones entre vectores usando la guía que fue diseñada por ella misma y que tiene en su celular. La profesora menciona que durante la pandemia tuvo que diseñar varias guías para sus estudiantes, y actualmente sigue usando esas mismas guías, las cuales se encuentran disponibles en una plataforma virtual que ella usa llamada MILAULAS. La información que ha usado para construir dichas guías es tomada de algunos libros como por ejemplo los de Santillana y también páginas de internet como KHAN ACADEMY, en donde busca información de cualquier tema. Además, incluye en sus guías enlaces de videos explicativos del tema trabajado, los cuales observan en algunas clases. También incluye en la plataforma algunos quices y evaluaciones tipo icfes y usa la aplicación ZIPGRADE, la cual permite calificar de manera más rápida sus exámenes.

INICIO

Sujetos observados:

Profesora Laura Yela (P)

Estudiante (E1, E2, E3, …, Ex)

Varios estudiantes (EV)

TERCER REGISTRO DE OBSERVACIÓN REALIZADO EN EL COLEGIO LICEO CIUDAD DE xxx– SANTANDER DE QUILICHAO

Observación a cargo de la sede Meléndez - Profesor 2 – Registro 3 (4P2R3)

A continuación, se presenta el tercer registro de observación realizado en el colegio Liceo Ciudad de Santander, ubicado en Santander de Quilichao, el día lunes 11 de julio de 2022. Se observa la clase que imparte la docente xxx al grado sexto a con 23 estudiantes. El salón de clase mide aproximadamente 80 metros cuadrados. Tiene dos ventanas grandes en sus extremos que mantiene abiertas, 2 ventiladores, y un televisor que se ha fijado al lado del tablero.

La profesora menciona que en la clase de hoy se reforzará el tema de la resta y la multiplicación de números naturales. Para esto se realizará un taller en clases denominado PROSALI, diseñado por la docente a partir de la información que ya nos mencionó en una entrevista anterior. La observación inicia a las 5:10 pm hasta las 6:50 pm.

Sujetos observados:

profe (P)

Estudiante (E1, E2, E3, …, Ex)

Varios estudiantes (EV)

P: Hola mis amores buenas tardes, ¿Cómo están?

EV: Bien profe

Los protocolos se elaboran siguiendo las pautas de la investigación etnográfica (Mercer, 1997) inician con una descripción de la situación observada:

Ilustración 2.

Ejemplos de protocolos 2: posibles usos de imágenes y fotografías en un protocolo de observación.

Quinto registro de observación elaborado en la Institución xxx

En algunos casos, la clase de Matemáticas se desarrolla en el laboratorio de Física, puesto que, la Institución dispone de este espacio, desde la postura del profesor, es importante que el alumno interactúe con otros espacios diferentes al salón de clase. El laboratorio de Física es un sitio encerrado, caracterizado por disponer de: 2 espejos sin marco y cuadros en las paredes, dos estanterías, 3 repisas sin objetos, 3 ventiladores, un escritorio y silla para el profesor, además de mesas diseñadas en cemento con bancos de madera, una cartelera alusiva a la solidaridad, un parlante que remite información de la rectoría y 3 lámparas, del cual solo funcionan 2 y un video beam.

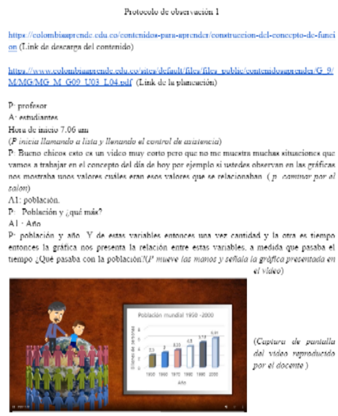
Laboratorio de Física de la I.E Técnico

El profesor a observar es director de grupo, manifiesta que, por las actividades presentadas en la semana anterior, se extiende el primer periodo, una semana más. En el transcurso de la semana terminará la temática, posteriormente realizará la evaluación.

De acuerdo a la postura del profesor, afirma que; es importante culminar la unidad temática, en este caso de la adición y sustracción de los números naturales, pero considera fundamental respetar los procesos de aprendizaje de cada estudiante, no es el hecho de equipar al estudiante con conocimientos sin saber su utilidad, "su uso". Es indispensable que los estudiantes conozcan la utilidad de las Matemáticas en la vida diaria para que así, puedan ser aplicarlas en X contexto.

En desarrollo de clase se pretende resolver de manera individual la situación 2 y 3 de la guía de aprendizaje, para ello, los estudiantes disponen de la guía de aprendizaje y no pueden hacer uso de calculadora.

El protocolo de observación, se realizó el 26 de abril del 2022, en el laboratorio de Física de la I.E



Protocolo de observación 1

https://colombiaaprende.edu.co/contenidos-para-aprender/construccion-del-concepto-de-funcion (Link de descarga del contenido)

https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/contenidosaprender/G_9/M/MG/MG_M_G09_U03_L04.pdf (Link de la planeación)

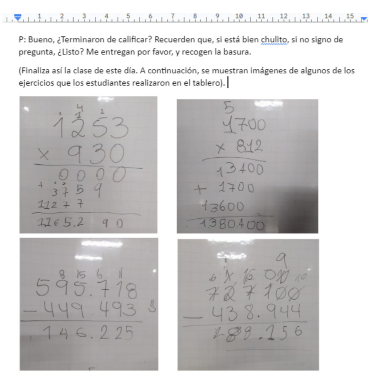
P: profesor
A: estudiantes
Hora de inicio 7.06 am
(*P inicia llamando a lista y llenando el control de asistencia*)
P: Bueno chicos esto es un video muy corto pero que no me muestra muchas situaciones que vamos a trabajar en el concepto del día de hoy por ejemplo si ustedes observan en las gráficas nos mostraba unos valores cuáles eran esos valores que se relacionaban (*p caminar por el salon*)
A1: población.
P: Población y ¿qué más?
A1: Año
P: población y año. Y de estas variables entonces una vez cantidad y la otra es tiempo entonces la gráfica nos presenta la relación entre estas variables, a medida que pasaba el tiempo ¿Qué pasaba con la población?(*P mueve las manos y señala la gráfica presentada en el video*)

(*Captura de pantalla del video reproducido por el docente*)

Los protocolos, si bien están centrados en lo que dicen y hacen los participantes, pueden apoyarse de imágenes del espacio o de los materiales que se usan, el tablero y los cuadernos pueden también aportar información si se observa un espacio de clase.

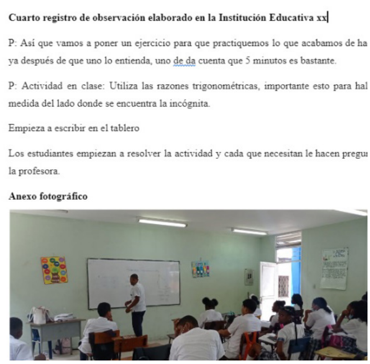
Ilustración 3.

Ejemplos de protocolos 3: anexos en un protocolo de observación.



P: Bueno, ¿Terminaron de calificar? Recuerden que, si está bien chulito, si no signo de pregunta, ¿Listo? Me entregan por favor, y recogen la basura.

(Finaliza así la clase de este día. A continuación, se muestran imágenes de algunos de los ejercicios que los estudiantes realizaron en el tablero).



Cuarto registro de observación elaborado en la Institución Educativa xx

P: Así que vamos a poner un ejercicio para que practiquemos lo que acabamos de ha ya después de que uno lo entienda, uno de da cuenta que 5 minutos es bastante.

P: Actividad en clase: Utiliza las razones trigonométricas, importante esto para hal medida del lado donde se encuentra la incógnita.

Empieza a escribir en el tablero

Los estudiantes empiezan a resolver la actividad y cada que necesitan le hacen pregu la profesora.

Anexo fotográfico

Los protocolos pueden contener información que los complementa como fotos del grupo en clase o trabajando, esto suele ir en anexos:

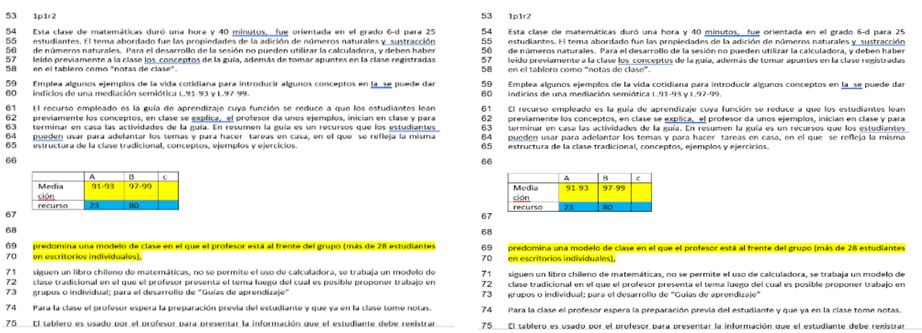
Tabla 2.

Ejemplo de esquema para codificación de los protocolos de los casos estudiados.

	4p1r1
	4p1r2
4p1	4p1r3
	4p1r4
	4p1r5
	4p2r1
4p2	4p2r2
	4p2r3
1p1	1p1r1
	1p1r2
	1p1r3
	1p1r4
	1p1r5

Ilustración 4.

Ejemplo del proceso de análisis de los protocolos: identificar escenas relacionadas con las dos categorías iniciales del análisis.



1p1r2

Esta clase de matemáticas duró una hora y 40 minutos, fue orientada en el grado 6-d para 25 estudiantes. El tema abordado fue las propiedades de la adición de números naturales y sustracción de números naturales. Para el desarrollo de la sesión no pueden utilizar la calculadora, y deben haber leído previamente a la clase los conceptos de la guía, además de tomar apuntes en la clase registradas en el tablero como "notas de clase".

Emplea algunos ejemplos de la vida cotidiana para introducir algunos conceptos en la se puede dar indicios de una mediación semiótica L.91-93 y L.97-99.

El recurso empleado es la guía de aprendizaje cuya función se reduce a que los estudiantes lean previamente los conceptos, en clase se explica, el profesor da unos ejemplos, inician en clase y para terminar en casa las actividades de la guía. En resumen la guía es un recursos que los estudiantes pueden usar para adelantar los temas y para hacer tareas en casa, en el que se refleja la misma estructura de la clase tradicional, conceptos, ejemplos y ejercicios.

	A	B	c
Media ción	91-93	97-99	
recurso	23	80	

predomina una modelo de clase en el que el profesor está al frente del grupo (más de 28 estudiantes en escritorios individuales),

siguen un libro chileno de matemáticas, no se permite el uso de calculadora, se trabaja un modelo de clase tradicional en el que el profesor presenta el tema luego del cual es posible proponer trabajo en grupos o individual; para el desarrollo de "Guías de aprendizaje"

Para la clase el profesor espera la preparación previa del estudiante y que ya en la clase tome notas.

El tablero es usado por el profesor para presentar la información que el estudiante debe registrar

Ilustración 5.

Ejemplo de un análisis preliminar a un protocolo de observación.

SOBRE LAS ESCENAS IDENTIFICADAS

3p2r1

Análisis preliminar de protocolo de observación de 3P2

El PZ2 en sus clases generalmente lo acompaña su computador y un videobeam. Su clase tiene como recurso de apoyo las cápsulas educativas de Colombia aprende y en la medida que se presenta el recurso, se brinda espacios de interacción con los estudiantes donde ellos son parte activa de la clase y para sostener ese dinamismo el PZ2 sobre la acción “crea o estructura” preguntas orientadoras. que ayudan a los estudiantes a entender lo que en el recurso pedagógico que proyecta no está muy claro o entendible, Es decir, hace las veces de guía mediador. Ahora pues, en caso tal que lo anterior no sirva se apoya haciendo uso del tablero y sus conocimientos para realizar representaciones que al parecer son más efectivas ya que, le permiten continuar con la aplicación del recurso.

EL PZ2 intenta generalmente intenta cambiar la estrategia de desarrollo en la clase poniendo a trabajar en grupos a los estudiantes en ciertos momentos, ya que el ejercicio de mediación e interacción entre estudiantes para resolver un problema es una estrategia que le es efectiva.

Posible conclusión: Se hace poco uso del cuaderno por parte de los estudiantes y el profesor valora más los aprendizajes sobre el trabajo efectivo en el aula. Además, la inclusión de un recurso digital es necesario para el Docente.

Con esta información y su presentación como un resultado inicial en los análisis preliminares, se logra tener un primer acercamiento a las prácticas de los profesores y el uso de diferentes recursos, información con la cual se ajusta el diseño de la entrevista para que se oriente de forma específica al logro de los objetivos del proyecto.

Ilustración 6.

Ejemplo análisis preliminar de los protocolos de observación de un profesor.

Análisis de protocolos de observación profesor 1 sede PACÍFICO

Generalidades de la clase y el profesor.

Se cuenta con 5(cinco) protocolos de igual número de clases que equivalen a casi 9 horas de clase.

2p1r1	31 /03/ 2022 8:40 am a 9:30 am y luego de 10:00 am a 10:50 am-. 1: 40 min.	Razones trigonométricas 10°1 20 estudiantes
2p1r2	31 /03/ 2022 1: 40 min 10:50 am a 12:30 pm	El teorema de Pitágoras 10°2 (19 est)
2p1r3	21 /04/ 2022 8:40 am a 9:30 am y luego de 10:00 am a 10:50 1: 40 min.	Razones trigonométricas para ángulos especiales 10°1 20 estudiantes
2p1r4	21 /04/ 2022 10:50 am a 12:30 pm,	Reconocimiento de saberes 10°2 19 estudiantes
2p1r5	04 /05/ 2022 8:40 am a 10:50 am,	10°2 19 estudiantes

Los protocolos corresponden a una clase de matemáticas de 10°1 y 10° 2 grado, predomina un modelo de clase en que el profesor interactúa con los estudiante (de 20 estudiantes trabajo en grupo), Los protocolos corresponden a una clase de cálculo de 10°1 grado, con 20 ESTUDIANTES que tienen entre 14 y 18 años
la clase se desarrolla: ambientar, hacer actividad, conceptualizar y finalmente socializar.
dice la profesora 20 estudiantes en 11 6 HORAS / SEMANA, EDADES entre 16 y 17.

SOBRE LAS ESCENAS IDENTIFICADAS

La clase permite ver la conceptualización a partir de la exploración con situaciones aplicadas, se hace uso de diferentes materiales entre los que se incluyen algunos propios del entorno y otros convencionales. La profesora promueve la participación de los estudiantes a partir de interrogantes constantes y promoviendo reflexiones

ANÁLISIS PRELIMINAR

Se deja ver una clase magistral desarrollada a través de un ejercicio en clase. la profesora orienta la clase de manera tradicional, pero, durante la clase plantea preguntas invita a participar a sus estudiantes

La forma de ofrecer la clase, en este caso, privilegia la conversación como forma de interacción con los estudiantes. En cuanto al uso del discurso predomina la conversación y el uso de imágenes como dibujos: el tablero como soporte de este y el registro en el cuaderno de los estudiantes de lo que ven, leen, etc. Las ilustraciones no pasan de ser simples íconos, o no hay énfasis en su lectura o análisis. El uso de herramientas pasa a un segundo lugar.

Al observar las clases de matemáticas de los profesores seleccionados, se transcribieron 31 protocolos de observación de las clases completas que duraban entre una y dos horas máximo, adoptando unos códigos para referirse a los profesores y a los estudiantes, adjuntado en algunas ocasiones en imágenes. Esto con el objetivo de hacer un análisis detallado que permitiera identificar escenas o episodios de clase que dieran cuenta de categorías de análisis coherentes con el objetivo de la investigación, de manera que terminado el análisis de los protocolos y seleccionados los episodios, se propuso el siguiente esquema de análisis de los protocolos:

Análisis de la entrevista: modelo del profesor sobre el aprendizaje

Posterior a la revisión de los protocolos de observación de clase, se definieron algunos temas sobre los cuales centrar la entrevista, por una necesidad evidente de información relacionada con la opinión del profesor sobre alguno de los temas de interés el proyecto "hacer una caracterización de las creencias y concepciones que tienen los profesores de educación media sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas". Se propusieron inicialmente dos grandes temas: los recursos y la mediación, en lo que sigue se amplía cada uno de ellos y se dan algunas preguntas para avanzar en el abordaje del tema en cada entrevista.

Las entrevistas se aplicaron en persona o vía internet, se grabaron y se transcribieron. Así se tiene: 8 profesores, 8 entrevistas, un par de horas de grabación y 37 páginas de texto que recogen las intervenciones de los profesores. Fue necesario combinar varias formas de análisis, pues no fue fácil establecer relaciones entre lo que hacen los profesores según se ve en los protocolos y lo que dicen en las entrevistas.

En vista de que el análisis propuesto no deja ver resultados se adoptó el análisis temático, pues es un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) en un conjunto de datos, suele ir más allá al interpretar aspectos del tema investigado (Braun y Clarke, 2006), se ilustran algunas de sus etapas en las siguientes ilustraciones:

Ilustración 7.

Ejemplo1 de rejilla de análisis inicial.

CATEGORÍA DE ANÁLISIS	SUBCATEGORÍA DE ANÁLISIS	EVIDENCIA (Entrevista P2sNC)	ANÁLISIS EVIDENCIA Entrevista P2sNC
Estrategias a las que les da prioridad para los procesos de aprendizaje.	Empatía del profesor con los estudiantes.	L.30. Entrevistado: Yo considero que la empatía, la empatía como docente, como profesor de los chicos o de las chicas. L. 34-35. Para mí es fundamental tener empatía con los niños... L. 41-44. ...que no les de miedo preguntar, de que no les de miedo cuestionarse o equivocarse, porque ese es otro error, otro paradigma de que, si yo me equivoco, digo algo erróneo frente a la que estoy haciendo, entonces yo soy víctima de burlas o que el profesor de una vez va a colocar el uno.	Mejorar la actitud hacia las matemáticas.
	Identificar los conceptos previos.	L. 45-49 Yo les planteo esa posibilidad de que puedan preguntar todo lo que se les ocurra, parto a veces de lo que	

Ilustración 8.

Ejemplo2 de categorías para el análisis inicial.

PROYECTO 05333: Creencias y Concepciones de los profesores de Educación Media sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

ACTIVIDAD: Diseño de los instrumentos de recolección de datos

Análisis de la entrevista

Previos: lo que salió de la observación

				Mediación	Recurso	otros
EL PAPEL DE LAS TAREAS			2p1		x	
EL PAPEL DE LA MEMORIA			2p2	x		
EL SALIR AL TABLERO			4p1		x	
EL NO USO DE CALCULADORA			4p2	x		

Se busca una descripción amplia del conjunto de entrevistas para pasar luego a una descripción detallada del tema de interés “los recursos”. Para llegar allá se sugieren estas etapas: (adecuación de las fases de Braun y Clarke, p. 87):

1. Releer las 8 transcripciones de las entrevistas, anotar ideas iniciales.
2. Generar códigos iniciales, REVISAR que cada código "tiene" información que lo "soporta".
3. Buscar temas, agrupar o encontrar.
4. Revisarlos.

Ilustración 9.

Ejemplo1 análisis entrevista aplicación del análisis temático fase1

FASE 1 del análisis: FAMILIARIZARSE

1P1	LIC MAT	23 AÑOS EXP	PÚBLICO 8
2p1	LIC EDU BAS E MAT	1 AÑO HACE	GRADO 5
2p1	LIC EDU BAS E MAT	10 AÑOs / secundaria	
2p2	LIC EDU BAS E MAT		
3p1	LIC EDU BAS E MAT	Pta uv	
3p2			publico
4p1	LIC EDU BAS E MAT	6 años Proyectos formación	público
4p2	LIC EDU BAS E MAT	5 años- privado	Público 3/privado

Se entrevistaron 8 profesores etc.

Fase 2: temas: "tematizar"

Fase 2: tema 1 – entrevista EL APRENDIZAJE *eso **¿qué cree usted que ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas?***	Fase 2: tema 2 - entrevista
para 1p1 el centro está en que el estudiante "no tenga miedo" o que tenga condiciones emocionales, las resumen en que "le profesor tenga empatía" para 2p1 el centro está en que lo que el estudiante aprenda le sea significativo, o que lo pueda aplicar en su contexto y que no sean solo procedimientos vela por un aprendizaje con sentido apoyado de medios alternativos	Para 2p1 Un manipulativo, pensamiento algebraico Tangram, uso clásico área y perímetro Calculadora, pero en los grados iniciales se omite su uso Cuando si, operaciones más rápidas Excel Para 1p1 Recursos tic/software apoyan lo procedimental
4p1 **Que se trabaje resolviendo problemas**	

PROYECTO 05333: Creencias y Concepciones de los profesores de Educación Media sobre la mediación de los recursos pedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

ACTIVIDAD: Diseño de los instrumentos de recolección de datos

temas/parte 1

Se identifican 5 temas

A los estudiantes los ayuda a aprender:

1. la resol de problemas
2. que el proceso sea más práctico que teórico
3. que se usen estrategias, actividades y materiales
4. que se use un contexto cercano a ellos

tema s /parte 2

se identificaron 3 temas

tipos de recursos usa usted en su clase

1. uso de tecnologías/plataformas (nuevas tec.)
2. las guías.
3. me apoyo en la calculadora/Excel, más rápido

Este tipo de análisis se puede incluir en el grupo de métodos de análisis cualitativo de datos que se ocupan de identificar temas o patrones "recurrentes" en conjuntos de Datos, como lo puede ser "el análisis del discurso, análisis de contenido o la teoría fundamentada" (Braun y Clarke, 2006).

Ilustración 10.

Ejemplo2 aplicación del análisis temático fase2

de los recursos pedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

ACTIVIDAD: Diseño de los instrumentos de recolección de datos

desde lo más básico a lo más complejo porque se observa, observaba mucho que los alumnos en grados superiores en especial décimo y once

2p1

¿Qué cree usted que ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas? o ¿qué los ayuda en su proceso de aprendizaje de la matemática?

que ellos conozcan la intención de lo que aprenden cuál es la intención para dónde vamos en qué me sirve esto

en eso del contexto de la realidad

1p1

¿Qué cree usted que ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas? o si quiere mejor la podemos formular en términos de ¿Qué los ayuda en su proceso de aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál es su opinión profe?

la empatía como docente, como profesor de los chicos o de las chicas.

preguntar todo lo que se les ocurra

para 1p1 el centro está en que el estudiante "no tenga miedo" o que tenga condiciones emocionales, las resumen en que "le profesor tenga empatía"

1p2

¿cuál es tu opinión? mejor ¿sobre qué es lo que hace o que apoya el aprendizaje de un muchacho?, ¿qué cosas inciden positivamente en el aprendizaje del estudiante?

tiene que ser significativo,

que haya un contexto en el que ellos vean viabilidad para aplicar lo que se está aprendiendo, es necesario que no todo sea procedimental, que no todo sea teoría,

para 1p2 el centro está en que lo que el estudiante aprenda le sea significtivo, o que lo pueda aplicar en su contexto y que no sean solo procedimientos velapor un aprendizaje cin sentido apoyado de medios alternativos<

FASE 2 del análisis: generar códigos

Parte 1

Profundidad de la Experiencia Docente:
Las entrevistas revelan una experiencia docente sólida y una comprensión profunda de los desafíos y oportunidades en la enseñanza de las matemáticas.
Los entrevistados muestran una disposición para adaptarse a las necesidades de los estudiantes y para innovar en sus prácticas pedagógicas.
Uso Variado de Recursos pedagógicos:
Los entrevistados demuestran un uso variado de recursos didácticos, desde materiales manipulativos hasta tecnología.
Esta diversidad en el enfoque pedagógico sugiere una comprensión de la importancia de la adaptación y la flexibilidad en el aula.
Enfoque en la Evaluación y la Participación Estudiantil:
Se destaca la importancia de la participación activa de los estudiantes y la evaluación continua para adaptar la enseñanza según las necesidades individuales.
Este enfoque en la evaluación formativa y en la participación estudiantil promueve un ambiente de aprendizaje inclusivo y centrado en el estudiante.
Adaptación Durante la Pandemia:
Se menciona la adaptación durante la pandemia, destacando la importancia de encontrar nuevos métodos de enseñanza, como la elaboración de guías de aprendizaje.
Esto sugiere una capacidad para enfrentar desafíos y aprovechar oportunidades para mejorar la enseñanza incluso en situaciones difíciles.
Futuras Colaboraciones:
Se planean futuras colaboraciones entre los entrevistados y el proyecto de investigación, lo que indica un interés en seguir explorando nuevas prácticas pedagógicas y contribuir al desarrollo profesional continuo.

Finalmente, en el primer tema se tiene que los profesores creen que ayudar a los estudiantes a comprender la relevancia de las matemáticas en sus vidas, desarrollar habilidades de lectura y comprensión, y utilizar una variedad de estrategias pedagógicas son elementos clave para promover el aprendizaje efectivo de las matemáticas.

En el segundo tema, las entrevistas muestran que los recursos utilizados por los profesores, según las entrevistas, incluyen una amplia gama de herramientas pedagógicas y materiales didácticos: material manipulativo y tangible, tecnología, recursos documentales y bibliográficos, creativos y lúdicos y herramientas de lectura y escritura. Y que el grupo de profesores tiene una combinación de experiencia, adaptación, innovación y colaboración que son fundamentales para una enseñanza efectiva y centrada en el estudiante. Se evidencian por lo menos tres concepciones en general, derivadas de la entrevista:

1. Asociada a la importancia de este tipo de materiales en tanto permiten a los estudiantes explorar y usar sus habilidades motoras, como, por ejemplo, recortar, dibujar, construir maquetas, etc.

2. Que este material concreto no necesariamente debe tener un uso pedagógico predeterminado, sino que también puede consistir en material fungible de uso cotidiano.

3. Que el material concreto tiene y debería tener relación directa con tecnologías digitales para lograr mejores aprendizajes en los estudiantes. Sin embargo, esta posible relación solo se menciona en términos de cómo uno le hace promoción a la otra. Por ejemplo, cuando se propone una actividad con material concreto y una plataforma como el Classroom o el video sirve de mecanismo de difusión para dar instrucciones más precisas sobre lo que se debe hacer con dicho material concreto.

Estrategias a las que el docente les da prioridad para los procesos de aprendizaje

Durante las clases observadas hay un predominio del uso del discurso como recurso y la interacción con los estudiantes para los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo que muestra aproximaciones a la mediación semiótica. Sin embargo, pese a que se evidencia que dicha interacción conduce a un propósito, la interacción entre los docentes y los estudiantes no siempre garantiza que se logre la construcción de significados matemáticos; de manera que en primer lugar logre involucrar al estudiante al proceso de aprendizaje y en segundo lugar que se dé un aprendizaje.

Es decir, las preguntas frecuentes que los docentes emplean durante las clases, por lo general se usan para dar la palabra a los estudiantes y son meramente procedimentales. Pues, si bien según Tebar (2003) la mediación obedece a una interacción educativa, la pregunta sería ¿el uso del lenguaje en estas prácticas supone un proceso mental de orden superior? es decir ¿hay un aprendizaje? Además en algunos casos en la participación de los estudiantes se devela su perspectiva matemática, pero no siempre se aprovechan estos argumentos para aclarar el concepto matemático que hay detrás de dicha afirmación, sino que se queda en una mera verificación de procedimientos algorítmicos descontextualizados.

Los recursos empleados en la clase

En el desarrollo de las clases orientadas por los ocho docentes de matemáticas, se evidencia que predomina un modelo de clase en salón abierto, con un tablero al frente en el que el profesor presenta e interactúa con los estudiantes, habla y escribe regularmente en el tablero, recurre al libro de texto, guías, módulos, el discurso, las analogías y algunos referentes de páginas web. Recursos digitales:

el uso de calculadora (solo para grados superiores y en especial en el área de física) y el uso de Excel en el área de probabilidad.

El propósito del uso de recursos

En este análisis, se centra la mirada en varios aspectos fundamentales que pueden dar indicios de creencias del profesor acerca de la mediación de los recursos que emplea para el desarrollo de la clase, el papel del discurso, las analogías y la interacción con los estudiantes para el aprendizaje, el libro de texto, los módulos, el juego, la calculadora y el uso de la regla como recurso en el desarrollo de la clase.

Sobre el discurso, el empleo de interrogantes, el uso de las estrategias propuestas por los estudiantes para llegar a la solución del problema y el empleo de esquemas o analogías para la resolución de problemas para que los estudiantes aprendan, muestra el predominio a una aproximación de la mediación semiótica. Esto devela una creencia que se puede inferir de los protocolos de observación, puesto que no se expresa explícitamente en la entrevista, y es que en la enseñanza en acto predomina el uso del discurso y se supone que la mera interacción entre los docentes y los estudiantes en el aula garantiza un aprendizaje.

Por otro lado, el uso del libro de texto, la guía o la página web se limita a la selección de talleres que se pueden emplear antes, durante y después de la clase. En resumen, son un recurso que los estudiantes pueden usar para adelantar los temas y para hacer tareas en casa, en el que se refleja la misma estructura de la clase, conceptos, ejemplos y ejercicios. En este caso el recurso fundamental para el docente es el libro de texto o la guía y recae sobre esta la responsabilidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes. La creencia que se infiere es que usan este recurso como si por sí solo pudiera hacerse cargo del aprendizaje, pero lo reconocen o emplean como un mediador del aprendizaje. Además, al parecer los estudiantes no tienen acceso a estos, en ese orden sería importante investigar ¿por qué razón? o ¿cuáles son los criterios que usa el maestro para la selección de los textos, guías, páginas web o la actividad propuesta en estos recursos? El uso de calculadora en algunos casos no es permitido y en otros simplemente no se usa, esto indica que una creencia de los maestros sobre el uso de este recurso tecnológico es que este sirve para realizar ser un obstáculo para el desarrollo de habilidades numéricas.

Conclusiones y recomendaciones

Algunas experiencias importantes durante el desarrollo del proyecto incluyen la conformación de un colectivo de profesores intersedes (las cuatro sedes de la Universidad del Valle, que ofertan el programa de licenciatura en Matemáticas) que, en diferentes niveles de formación, incursiona en reflexiones que invitan al cambio, adaptación y desarrollo de otras posibles formas de concebir el quehacer de los educadores matemáticos.

Así mismo, el desarrollo de este proyecto muestra la viabilidad de vinculación de varios actores, entre ellos, profesores y estudiantes del programa de licenciatura. Esto se evidencia en la forma en que estudiantes de pregrado pudieron participar de las discusiones del grupo en el marco del desarrollo del proyecto y cómo esto abre posibilidades de mayor participación de los estudiantes, no solamente en este tipo de proyectos sino también en distintos tipos de grupos o semilleros, que supongan unos principios básicos para el ejercicio de la investigación en educación matemática desde y para los profesores en formación inicial.

En términos generales y en cuanto a las creencias y concepciones de los profesores, objeto de este estudio, es notorio un aparente distanciamiento entre el deber ser y el deber hacer. En cuanto al deber ser, por ejemplo, en las entrevistas, a propósito de que las preguntas son explícitamente intencionadas para que se hable de ello, los profesores manifiestan ciertas concepciones acerca de los recursos, seguramente derivadas de su conocimiento profesional tanto desde su experiencia como de su formación inicial y continua. Ejemplo de esto, es cómo los profesores mencionan algunos recursos (en su mayoría tangibles) y la incidencia de estos en el aprendizaje. Mientras que en cuanto al deber hacer, en la observación de aula, los profesores muestran acciones y discursos en los cuales no necesariamente se ve reflejada la importancia que se le adjudicaba a los recursos en la entrevista.

En particular, en la entrevista, en cuanto al uso de recursos y su incidencia en el aprendizaje, se considera que el juego es una estrategia para persuadir al estudiante, algo atractivo para este. Mientras que, en los protocolos de observación, lo más cercano a esta concepción fue en el marco de la revisión de una tarea, en la cual, para efectos de revisar la producción de cada uno, se hizo por turnos a partir del típico juego del "tingo-tango".

Mientras que en la entrevista se enfatiza en la importancia del uso de videos para aterrizar mejor algunos aspectos abstractos de las Matemáticas y se menciona que hay plataformas digitales en las que se puede apoyar (sin mencionar con especificidad cuáles, a excepción del Classroom) e inclusive para evaluar. Parece haber una concepción de recurso tecnológico, en relación solo con aquellas plataformas predeterminadas en las que los estudiantes interactúan. Uno de los impactos actuales fue la conformación de laboratorios de matemáticas en las Sedes Zarzal, Pacífico y Norte del Cauca. Se espera que una vez finalizada dicha conformación se siga abordando reflexiones sobre la mediación de los recursos en la actividad matemática a partir de los cursos ofertados como "Resolución de problemas en el contexto del laboratorio de matemáticas", "Matemáticas recreativas" entre otros. Se señala en particular las posibilidades del diseño y concepción de la entrevista y su aporte a las metodologías de investigación cualitativa propias de la educación matemática. Por otro lado, que sea posible que a través de la extensión y proyección social, estos espacios sean un puente articulador entre la región y la Universidad a través de talleres, socialización de resultados, proyectos, seminarios y apoyo a la práctica profesional. Además de otros aspectos importantes que pueden tener un impacto positivo en largo o mediano plazo.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224.

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101.

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 325-346.

Donoso, P., Rico, N. y Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *20*(2), 76-97.

Chen, Q. y Leung, F. K. S. (2015). Analyzing data and drawing conclusion on teachers' beliefs. *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education: Exploring a mosaic of relationships and interactions*, 281-294.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art*, *249*, p. 254.

Garzón, D. y Vega, M. (2011). Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría. En *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Guin y Trouche (2007). Une approche multidimensionnelle pour la conceptión collaborative de ressources pédagogiques. En Baron, Guin y Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissaje. Concepcion et usages, regards croisés* (pp.197-228).

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2019). 'Las matemáticas son para ser aplicadas': Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación matemática*, *31*(1), 92-120.

Mercer, N. (1997). *La construcción guiada del conocimiento*. Ed. Paidós.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational Research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 197-230).

Sobre los autores

David Benítez Mojica

Profesor de la Universidad del Vale, adscrito a la Facultad de Educación y Pedagogía. Licenciado en Matemáticas y Física, por la Universidad del Tolima, Ibagué-Tolima; magíster en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CINVESTAV-México y doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CINVESTAV-México. Ha escrito varios artículos de investigación en la línea de formulación y resolución de problemas de matemáticas con la mediación de tecnologías digitales. Autor de libros de texto para primaria en México y en Colombia. Miembro del grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Contacto: david.benitez@correounivalle.edu.co

Henry Arley Taquez

Profesor del departamento de pedagogía de la Escuela de Ciencias de la Educación y Coordinador del área de educación y TIC del Centro de Recursos para el Aprendizaje de la Universidad Icesi, donde lidera procesos de formación docente y la gestión de proyectos educativos mediados por las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC). Hace parte del grupo de investigación IRTA Investigación en Recursos y Tecnologías para el Aprendizaje de la misma universidad. Sus actuales intereses de investigación están en el aprendizaje activo, los entornos virtuales de aprendizaje, la gestión de la innovación educativa y el desarrollo profesional docente.Máster en Sociedad de la Información y el Conocimiento con énfasis en e-learning por la Universidad Abierta de Cataluña de Barcelona – España, especialista en Sistemas Gerenciales de Ingeniería con énfasis en Gerencia Informática de la Pontificia Universidad Javeriana Cali e ingeniero de sistemas de la Universidad del Valle.

Contacto: hataquez@icesi.edu.co

Leonel Alcides Monroy Guzmán

Profesor de la universidad del Valle, adscrito al departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas. Es licenciado en Matemáticas de la universidad Santiago de Cali, Magíster en matemáticas y Doctor en Educación Matemática por la Universidad del Valle. Su tesis doctoral fue distinguida con mención Meritoria en reconocimiento a su desarrollo y resultados de investigación. Integra el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la misma institución, desde donde ha desarrollado y publicado estudios centrados en el uso de tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Es especialista en el diseño de actividades de aprendizaje de las matemáticas con medios digitales. Actualmente es presidente del Instituto Geogebra de Cali.

Contacto: leonel.monroy@correounivalle.edu.co

Arnulfo Fajardo Valencia

Directivo docente adscrito a la Secretaría de Educación de Santiago de Cali. Licenciado en matemáticas de la universidad Santiago de Cali, Especialista en Edumática Multimedial de la Universidad Autónoma de Colombia, Magister en Gestión de Tecnología Educativa de la Universidad de Santander, Doctor en Educación con énfasis en Educación matemática de la Universidad del Valle. Ha publicado estudios sobre cómo los estudiantes entienden y resuelven problemas matemáticos en diferentes contextos. Sus líneas de investigación se relacionan con el estudio de las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, el razonamiento probabilístico, el uso de las tecnologías digitales en la educación matemática, evaluando su impacto en el aprendizaje. Es miembro del grupo de investigación en Educación Matemática de la universidad del Valle.

Contacto: arnulfo.fajardo@correounivalle.edu.co

Yonatán Bonelo Ayala

Es profesor catedrático adscrito a la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle (Cali, Colombia). Es licenciado en Matemáticas, Magíster en Educación Matemática y Doctor en Educación Matemática por la Universidad del Valle. Su tesis doctoral fue distinguida con mención laureada, en reconocimiento a su desarrollo y resultados de investigación. Integra el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la misma institución, desde donde ha desarrollado y publicado estudios centrados en el uso de tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Contacto: yonathan.bonelo@correounivalle.edu.co

Jorge Enrique Galeano

Es profesor nombrado de la Universidad del Valle, licenciado en matemáticas y física y magister en educación énfasis en educación matemática por la Universidad del Valle;es miembro del grupo de investigación en educación matemática de la universidad del Valle. Su área de interés en investigación está en el área del lenguaje y educación matemática. En el área administrativa se desempeñó como director de la licenciatura en matemáticas de la universidad del Valle.

Contacto: jorge.enrique.galeano@correounivalle.edu.co

Adriana García Moreno

Es profesora contratista de la Universidad del Valle, coordinadora de la licenciatura en matemáticas del seccional norte del cauca de la Universidad del Valle magister en educación énfasis en educación matemática por la Universidad del Valle; trabaja en el laboratorio de matemáticas de la licenciatura en matemática como apoyo a la práctica de los licenciados en formación.

Contacto: adriana.garcia.moreno@correounivalle.edu.co

Ronald Andrés Grueso

Es profesor contratista de la Universidad del Valle, licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas y magister en educación énfasis en educación matemática por la Universidad del Valle docente del magisterio y profesor de matemáticas en la educación básica.

Contacto: ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Hilda Marleth Palacios

Es profesora contratista de la Universidad del Valle, licenciada en educación básica y magister en educación énfasis en educación matemática por la Universidad del Valle docente del magisterio y profesora de matemáticas en la educación básica; trabaja en el laboratorio de matemáticas de la licenciatura en matemáticas como apoyo a la práctica de los licenciados en formación.

Contacto: hilda.palacios@correounivalle.edu.co

Marco Emilio Correa

Es profesor contratista de la Universidad del Valle, licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas y magister en educación énfasis en educación matemática por la Universidad del Valle, docente del magisterio y profesor de matemáticas en la educación básica; apoya la práctica de los licenciados en formación.

Contacto: marco.correa@correounivalle.edu.co

Editorial
Universidad
Icesi

El libro de termino de editar en febrero de 2025.
En su preparación se emplearon tipos Adobe Garamond Pro
en 12/15 y 9/11.

El libro *Resolución de problemas de matemáticas con medios digitales* explora el impacto de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destacando herramientas como los sistemas de cálculo algebraico, la geometría dinámica, la inteligencia artificial y la gamificación. A lo largo de cinco capítulos, el libro analiza desde la resolución de problemas y la enseñanza del álgebra lineal hasta el uso de medios digitales en probabilidad y geometría, abordando también las concepciones docentes sobre la integración de recursos tecnológicos en el aula. A través de un enfoque basado en investigaciones recientes, esta obra propone un cambio en las prácticas educativas tradicionales, promoviendo un aprendizaje más interactivo, exploratorio y significativo, donde la tecnología no solo facilita la comprensión de conceptos abstractos, sino que también potencia el pensamiento matemático, la creatividad y la autonomía de los estudiantes.

ISBN 978-628-7814-04-2
9 786287 814042

Universidad Icesi

Editorial Universidad Icesi