

**Taller #1**  
**Econometría 06169**  
**Grupo 5**

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:

- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado **multiplicado por 3**,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado **dividido por 3**,
- Z la suma del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- $W = XZ$ .

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1  $E(X)$                        $E(Y)$                        $E(Z)$                        $E(W)$

1.2  $Var(X)$                        $Var(Y)$                        $Var(Z)$                        $Var(W)$

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

2. Considere las siguientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo, no use calculadora!!)

$$A^T A \quad (A)^{-1} \quad A \cdot B \quad A^T y \quad y^T y$$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left| A^T A \right| \quad \left| A \right|$$

3. Pruebe que  $Cov(X, Y) \equiv E(XY) - E(X)E(Y)$

4. Pruebe que  $Var(aX) \equiv a^2 \cdot Cov(X, Y)$

**Respuestas Sugeridas al Taller #1**  
**Econometría 06169**  
**Grupo 5**

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:

- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado **multiplicado por 3**,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado **dividido por 3**,
- Z la suma del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- $W = XZ$ .

Encuentre (muestre todo su trabajo):

**1.1**

Sean  $D_A$  y  $D_R$  variables aleatorias que toma el valor que aparezca en la cara superior del dado azul y rojo después de lanzado, respectivamente. Así, los posibles valores de  $D_A$  son

(1, 2, 3, 4, 5, 6), cada uno con una probabilidad de ocurrir de  $\frac{1}{6}$ . Recuerden que

$$E(D_A) = \sum_{i=1}^n d_{Ai} \cdot P(d_{Ai}). \text{Entonces, } E(D_A) = \frac{7}{2} \text{ (En el archivo de PowerPoint de la$$

presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo). Similarmente,  $E(D_R) = \frac{7}{2}$ .

Entonces,

a. Como  $X = 3D_A$ , tenemos que  $E(X) = E(3D_A) = 3 \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$

b. Ahora note que  $Y = \frac{1}{3}D_R$ . Entonces  $E(Y) = E\left(\frac{1}{3}D_R\right) = \frac{1}{3} \cdot E(D_R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$

c. Por definición tenemos que  $Z = D_A + D_R$  (o si quieren  $Z = \frac{1}{3} \cdot X + 3Y$ ). Luego

$$E(Z) = E(D_A + D_R) = E(D_A) + E(D_R) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

d. Note que  $W = X \cdot Z = X \cdot (D_A + D_R) = 3 \cdot D_A \cdot (D_A + D_R) = 3 \cdot [(D_A)^2 + D_A \cdot D_R]$ . De esta forma,  $E(W) = 3 \cdot E[(D_A)^2 + D_A \cdot D_R] = 3 \cdot [E[(D_A)^2] + E(D_A \cdot D_R)]$ . Así pues necesitamos calcular  $E[(D_A)^2]$  y  $E(D_A \cdot D_R)$ . En clase vimos que  $E[(D_A)^2] = \frac{91}{6}$  (ver presentación #1). Además, es bastante intuitivo reconocer que  $D_A$  y  $D_R$  son variables aleatorias independientes, luego  $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)E(D_R)$ . La prueba de esto se presenta al final en el Apéndice 1.

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar  $E(W)$ . Es decir,

$$E(W) = 3 \cdot [E[(D_A)^2] + E(D_A \cdot D_R)] = 3 \cdot \left[ \frac{91}{6} + \left( \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \right) \right] = 3 \cdot \frac{329}{12} = \frac{329}{4}.$$

**1.2**       $\text{Var}(X)$                    $\text{Var}(Y)$                    $\text{Var}(Z)$                    $\text{Var}(W)$

a.  $\text{Var}(X) = \text{Var}(3D_A) = 3^2 \cdot \text{Var}(D_R) = 9 \cdot \frac{35}{12} = \frac{105}{4}$ . (En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo de la varianza de  $D_A$ )

b.  $\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{1}{3}D_R\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \text{Var}(D_R) = \frac{1}{9} \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{108}$

c. Como  $Z = D_A + D_R$ , entonces

$\text{Var}(Z) = \text{Var}(D_A + D_R) = \text{Var}(D_A) + \text{Var}(D_R) + 2 \cdot \text{Cov}(D_A, D_R)$ . Como  $D_A$  y  $D_R$  son variables aleatorias independientes entonces  $\text{Cov}(D_A, D_R) = 0$ . Por lo tanto,

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(D_A) + \text{Var}(D_R) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

d. Ahora note que  $\text{Var}(W) = E(W^2) - (E(W))^2$ . Ya encontramos que  $E(W) = \frac{329}{4}$ , sólo nos falta encontrar  $E(W^2)$ . Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a que

es igual  $W^2$ .  $W^2 = 9 \cdot [(D_A)^2 + D_A \cdot D_R]^2 = 9 \cdot [(D_A)^4 + 2 \cdot [(D_A)^3 \cdot D_R] + (D_R)^2 \cdot (D_A)^2]$ .

Luego,  $E(W^2) = 9 \cdot [E[(D_A)^4] + 2 \cdot E[(D_A)^3 \cdot D_R] + E[(D_R)^2 \cdot (D_A)^2]]$ . Como  $D_A$  y  $D_R$  son variables aleatorias independientes, luego  $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)E(D_R)$ . De igual forma

$$E[(D_A)^3 \cdot D_R] = E[(D_A)^3]E(D_R) \text{ y } E[(D_R)^2 \cdot (D_A)^2] = E[(D_R)^2]E[(D_A)^2].$$

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de W:

- $E[(D_A)^4]$
- $E[(D_A)^3]$
- $E[(D_R)^2]$  y  $E[(D_A)^2]$
- $E(D_R)$

De estas cantidades conocemos las dos últimas, las otras las necesitamos calcular.

Cálculo de  $E[(D_A)^3]$

Los posibles valores de  $(D_A)^3$  son  $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216)$ , cada uno con una probabilidad de ocurrir de  $\frac{1}{6}$ . Siguiendo la definición,

$$E[(D_A)^3] = \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^3 \cdot P[(d_{Ai})^3] = \frac{1}{6} \left[ \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^3 \right] = \frac{1}{6} \cdot 441 = \frac{147}{2}$$

Cálculo de  $E[(D_A)^4]$

Los posibles valores de  $(D_A)^4$  son  $(1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296)$ , cada uno con una probabilidad de ocurrir de  $\frac{1}{6}$ . Siguiendo la definición,

$$E[(D_A)^4] = \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^4 \cdot P[(d_{Ai})^4] = \frac{1}{6} \left[ \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^4 \right] = \frac{1}{6} \cdot 2275 = \frac{2275}{6}$$

Regresando a nuestro problema, tenemos que:

- $E[(D_A)^4] = \frac{2275}{6}$
- $E[(D_A)^3] = \frac{147}{2}$
- $E[(D_R)^2] = \frac{91}{6}$  (ver presentación #1)
- $E(D_R) = \frac{7}{2}$

Ahora si tenemos todas las piezas para encontrar  $E(W^2)$ , Recuerden que

$E(W^2) = 9 \cdot [E[(D_A)^4] + 2 \cdot E[(D_A)^3] \cdot E(D_R) + E[(D_R)^2] \cdot E[(D_A)^2]]$ . Así, tenemos que

$$E(W^2) = 9 \cdot \left( \frac{2275}{6} + 2 \cdot \frac{147}{2} \cdot \frac{7}{2} + \frac{91}{6} \cdot \frac{91}{6} \right) = 9 \cdot \left( \frac{2275}{6} + \frac{1029}{2} + \frac{8281}{36} \right) = 9 \cdot \frac{40453}{36} = \frac{40453}{4}$$

Finalmente, podemos encontrar la  $\text{Var}(W)$ .

$$\text{Var}(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = \frac{40453}{4} - \left(\frac{329}{4}\right)^2 = \frac{40453}{4} - \frac{108241}{16} = \frac{53571}{16} = 3.348 \times 10^3$$

**Nota:** Como ven, este ejercicio era relativamente facil. Lo que intentaba con este ejercicio era que aplicaran las propiedades de la varianza y de la esperanza matemática. No era mi intención que ustedes gastarán mucho tiempo encontrando directamente el valor esperado de Z y mucho menos el de W.

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que W y Y son independientes si y solamente si  $E(WY) = E(W) \cdot E(Y)$  (\*).

Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (\*).

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[ 3 \cdot \left[ (D_A)^2 + D_A \cdot D_R \right] \right] \cdot E\left(\frac{1}{3} \cdot D_R\right)$$

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[ E\left[ (D_A)^2 \right] + E(D_A \cdot D_R) \right] \cdot E(D_R)$$

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[ E\left[ (D_A)^2 \right] \cdot E(D_R) + E(D_A \cdot D_R) \cdot E(D_R) \right]$$

Por independencia de  $D_A$  y  $D_R$  tenemos

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[ E\left[ (D_A)^2 \right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E(D_R) \cdot E(D_R) \right]$$

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[ E\left[ (D_A)^2 \right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot (E(D_R))^2 \right] \quad (**)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (\*).

$$E(WY) = E\left[ \left[ 3 \cdot \left[ (D_A)^2 + D_A \cdot D_R \right] \right] \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot D_R \right) \right]$$

$$E(WY) = E\left[ D_R \cdot (D_A)^2 + D_R \cdot (D_A \cdot D_R) \right]$$

$$E(WY) = \left[ E\left[ D_R \cdot (D_A)^2 \right] + E\left[ D_A \cdot (D_R)^2 \right] \right]$$

Por independencia de  $D_A$  y  $D_R$  tenemos

$$E(WY) = \left[ E\left[ (D_A)^2 \right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E\left[ (D_R)^2 \right] \right] \quad (**)$$

Ahora si podemos comparar la parte derecha e izquierda de la ecuación (\*):

$$E(WY) \stackrel{?}{=} E(W) \cdot E(Y)$$

$$E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \stackrel{?}{=} E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot (E(D_R))^2$$

$$E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \stackrel{?}{=} E(D_A) \cdot (E(D_R))^2$$

$$E\left[(D_R)^2\right] \neq E(D_R)^2$$

Como ven, en este caso  $E(WY) \neq E(W) \cdot E(Y)$  y por tanto W y Y no son independientes

2. Considere las siguientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

$A^T A$	$A \cdot B$	$A^T y$	$y^T y$
a)	b)	c)	
$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 10 & 34 & 21 \\ 6 & 21 & 14 \end{pmatrix}$	$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 31 & 31 \\ 44 & 42 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$	
d)	e)		
$A^T y = \begin{pmatrix} 20 \\ 63 \\ 38 \end{pmatrix}$	$y^T y = (178)$		

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left| A^T A \right| = 1 \quad |A| = -1$$

3. Pruebe que  $Cov(X, Y) \equiv E(XY) - E(X)E(Y)$

Por definición tenemos que

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(XY) - XE(Y) - E(X)Y + E(X) \cdot E(Y)]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(E(X) \cdot Y) + E(E(X) \cdot E(Y))$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y) \cdot E(X)$$

**Q.E.D**

4. Pruebe que  $\text{Var}(aX) \equiv a^2 \cdot \text{Var}(X)$

Por definición tenemos que

$$\text{Var}(a \cdot X) = E[(a \cdot X)^2] - (E(a \cdot X))^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = E(a^2 \cdot X^2) - (a \cdot E(X))^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot E(X^2) - a^2 \cdot E(X)^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot (E(X^2) - E(X)^2)$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

**Q.E.D**

**Apéndice 1.** Prueba de la independencia de  $D_A$  y  $D_R$

De acuerdo con la definición de independencia, tenemos que  $D_A$  y  $D_R$  son independientes si y solamente si  $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A) E(D_R)$ . Como vimos anteriormente,  $E(D_A) = E(D_R) = \frac{7}{2}$ , luego  $E(D_A) \cdot E(D_R) = \frac{49}{4}$ . Ahora debemos calcular a que es igual  $E(D_A \cdot D_R)$ . Noten que existen 18 diferentes valores para el producto  $D_A \cdot D_R$  de 36 posibles combinaciones. Los posibles valores de  $D_A \cdot D_R$  y sus respectivas probabilidades se reportan en la siguiente tabla.

**Tabla 1.**  
Posibles Valores de  $D_A \cdot D_R$  y  
sus Respectivas Probabilidades

$D_A \cdot D_R$	$P(D_A \cdot D_R)$
1	1/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	2/36
6	4/36
8	2/36
9	1/36
10	2/36
12	4/36
15	2/36
16	1/36
18	2/36
20	2/36
24	2/36
25	1/36
30	2/36
36	1/36

Seguindo la definicion de valor esperado, tenemos

$$E(D_A \cdot D_R) = \sum_{i=1}^n (d_A \cdot d_R)_i \cdot P[(d_A \cdot d_R)_i] = \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

Entonces tenemos que

$$E(D_A \cdot D_R) = E(D_A) E(D_R)$$

$$\frac{49}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

Luego el valor esperado del producto de  $D_A$  y  $D_R$  es igual al producto del valor esperado de cada una de las dos variables aleatorias. Por lo tanto  $D_A$  y  $D_R$  son independientes.

**Q.E.D**