Econometría 06216
Examen Parcial #2
Cali, Lunes 1 de Octubre de 2007

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante:________________________
Código:______________________

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de **5** páginas; además, deben tener una hoja de fórmulas.
3. El examen consta de 3 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre. NO responda en las hojas de preguntas.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica. En especial usted no puede emplear ningún tipo de ayuda diferente a la que se le entrega con este examen.
7. Al finalizar su examen entregue sus hojas de respuesta, así como las horas de preguntas.
8. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

1 Falso o Verdadero (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) En presencia de heteroscedasticidad y para cualquier tamaño de muestra, la corrección de White proveerá un "buen" estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados.

b) La ***multicolinealidad perfecta*** es un problema del modelo planteado y no de la muestra, por eso es que en la práctica es imposible solucionar el problema.

c) Existe Multicolinealidad si existe una fuerte correlación lineal entre la variable dependiente y alguna (o una combinación) de las variables explicatorias.

d) El método de estimación de Máxima Verosimilitud (MV) es un método que provee estimadores MELI para todos los parámetros de un modelo de regresión lineal, incluyendo la varianza del error. La única diferencia con los estimadores MCO es que para los estimadores de MV se necesita suponer que el término de error sigue una distribución normal.

2 Selección Múltiple (15 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Determine cuál de las siguientes respuestas es la correcta. Escoja la mejor opción y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

2.1 ***La mejor*** forma de determinar la existencia de Multicolinealidad en un modelo de regresión estimado es:

a) Estar alerta por la posibilidad t-estadísticos bajos.

b) Estar alerta por la posibilidad de un F-global alto.

c) Determinar el grado de correlación entre las variables independientes por medio del determinante de la matriz de correlaciones.

d) Todas las anteriores

2.2 Suponga el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, en donde ε_i es el término de error, el cual es heteroscedástico con $\mathbf{Var(\varepsilon_i) = f(\alpha) z_i}$, donde z_i es una variable observable y α es un término constante desconocido. ¿Cuál de los siguientes modelos debería ser utilizado para corregir el problema de heteroscedasticidad?

a) $y_i z_i = \beta_1 z_i + \beta_2 x_i z_i + \varepsilon_i^*$

b) $(y_i/z_i) = \beta_1 (1/z_i) + \beta_2 (x_i/z_i) + \varepsilon_i^*$

c) $y_i z_i^{-1/2} = \beta_1 z_i^{-1/2} + \beta_2 x_i z_i^{-1/2} + \varepsilon_i^*$.

d) ninguno de los anteriores.

2.3 ¿Cuál de los siguientes supuestos es necesario para que los estimadores MCO sean insesgados?

a) El término de error tiene media cero

b) El término de error cumple $Var\left[\hat{\beta}\right] = \sigma^2 I$

c) Ninguna de las anteriores.

d) a) y b) son ciertas

3 (30 puntos)

Un investigador desea determinar los determinantes del PIB per cápita real ($(\text{RGDP per capita})_t$ medido en millones de pesos de 1994 por habitante). Para lograr su finalidad emplea el siguiente modelo:

$$(\text{RGDP per capita})_t = \beta_0 + \beta_1 \text{FDevelopment}_t + \beta_2 \text{REXPT}_t + \beta_3 \text{RIMPT}_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Donde FDevelopment_t, REXPT_t y RIMPT_t representan el desarrollo financiero (medido por M2 como una proporción del PIB), las exportaciones reales (en millones de pesos de 1994) y las importaciones reales (en millones de pesos de 1994). El asistente del investigador realizó varios cálculos pero se perdieron algunos datos, los cuales fueron remplazados por "XXX" en la tabla que se reporta al final del examen.

a) Determine si existe algún tipo de problema econométrico en estos cálculos. Sea lo más claro posible. **(8 puntos).**

No obstante los problemas que se presentaron y teniendo en cuenta todas las consideraciones de los problemas econométricos y las posibles soluciones disponibles, se decidió emplear el modelo reportado. De acuerdo a esto:

b) Interprete los coeficientes estimados teniendo en cuenta su significancia (**8 puntos**).

c) Encuentre los datos que se perdieron. Es decir encuentre lo que fue remplazado por "XXX". Será suficiente que remplace los valores correspondientes en una fórmula. No es necesario que realice todos los cálculos. (**4 puntos – 2 puntos por cada uno**).

d) El investigador desea comprobar una hipótesis que ha sido fruto de gran discusión. La hipótesis es la siguiente: "*A principios de la década de los 80 y de la década de los 90 se presentó un cambio estructural en la economía. Ese cambio estructural implicó no solo un cambio en el comportamiento del PIB per cápita, sino también que se doblará (en promedio) la elasticidad del PIB per cápita con respecto a las exportaciones.*" Escriba un modelo que permita comprobar esta hipótesis y muestre claramente como comprobaría la hipótesis, que fórmula emplearía y cómo tomaría la decisión. Para esta pregunta asuma que no existe ningún problema econométrico en el modelo. (**10 puntos**).

4 (35 puntos)

Un empresario de productos de inversión supone que la cantidad vendida de bienes de capital (y_t) (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ...$$

donde X_{2t} representa la tasa de interés en el periodo t y X_{3t} denota el logaritmo del PIB en el periodo t (el PIB a sido medido en pesos constantes de 1994). Además se sabe que: $E(\varepsilon_t) = 0$ y

$$Var(\varepsilon_t) = c\begin{bmatrix} \frac{(X_{3,1}+X_{2,1})^2}{(X_{3,1})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(X_{3,2}+X_{2,2})^2}{(X_{3,2})} & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{(X_{3,24}+X_{2,24})^2}{(X_{3,24})} & 0 \\ & & & & \frac{(X_{3,25}+X_{2,25})^2}{(X_{3,25})} \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuáles propiedades poseen los estimadores MELI (BLUE) de los parámetros β? **(4 puntos)**

b) Claramente determine cuál de las propiedades no se cumple en el modelo planteado por el empresario y determine cómo podría solucionar el problema y ¿por qué dicha solución funcionará? Sea lo más claro posible. **(7 puntos)**

c) Después de realizar las transformaciones del caso, se obtiene las siguientes matrices que corresponden al equivalente de la matriz $X^T X$, $X^T y$ y $y^T y$: $\qquad y^T y = 46.1625$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad X^T y = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Explique claramente a que corresponde cada uno de los elementos de la matriz $X^T X$. (Por ejemplo, explique a partir de que sumatoria sale el 10 que corresponde al último elemento de la matriz $X^T X$, y así sucesivamente con cada elemento de las dos matrices) **(4 puntos)**

d) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo; además estime σ^2 empleando el mismo método. **(8 Puntos)**

e) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados.**(6 Puntos – 2 puntos cada uno)**

f) El empresario cree que las ventas no se comportan igual cuando la tasa de interés está creciendo que cuando está cayendo. Escriba un modelo que permita determinar si el empresario tiene o no la razón. Explique además por qué su modelo permite comprobar esa hipótesis y como comprobaría la hipótesis. **(6 Puntos)**

Resultados de EasyReg.

Variables:

X(1)=FDevelopment

X(2)=REXPT

X(3)=RIMPT

First chosen observation: t = 1 (=1960)

Last chosen observation: t = 45 (=2004)

Sample correlation matrix

1.00000000E+00 8.55775179E-01 8.46984659E-01

8.55775179E-01 1.00000000E+00 9.13158732E-01

8.46984659E-01 9.13158732E-01 1.00000000E+00

Eigenvalues:

2.744280 0.169201 0.086519

Dependent variable:

Y = RGDP per capita

Characteristics:

RGDP per capita

First observation = 1(=1960)

Last observation = 45(=2004)

Number of usable observations: 45

X variables:

X(1) = FDevelopment

X(2) = REXPT

X(3) = RIMPT

X(4) = 1

OLS estimation results

Parameters	Estimate	t-value	H.C. t-value
		(S.E.)	(H.C. S.E.)
		[p-value]	[H.C. p-value]
b(1)	1239660.86119	2.836	2.967
		(437186.59329)	(417749.66951)
		[0.00457]	[0.00300]
b(2)	0.00007	6.594	6.419
		(0.00001)	(0.00001)
		[0.00000]	[0.00000]
b(3)	-0.00001	-0.873	-1.086
		(0.00001)	(0.00001)
		[0.38250]	[0.27734]
b(4)	553303.21703	6.550	6.955
		(84477.49136)	(79557.04419)
		[0.00000]	[0.00000]

Effective sample size (n): 45

Variance of the residuals: 10603800466.641

Residual sum of squares (RSS): 434755819132.279

(Also called SSR = Sum of Squared Residuals)

Total sum of squares (TSS): 4918656115003.14

R-square: XXX

Overall F test: F(3,41) = 140.95

p-value = 0.00000

Significance levels:	10%	5%
Critical values:	2.22	2.83
Conclusions:	reject	reject

Breusch-Pagan test = 8.182275

Null hypothesis: The errors are homoskedastic

Null distribution: Chi-square(3)

p-value = 0.0175726

Conclusions: XXXXX

Econometría 06216
Examen Parcial #2
Respuestas Sugeridas
Cali, Lunes 1 de Octubre de 2007

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante:______________________
Código:____________________

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de **5** páginas; además, deben tener una hoja de fórmulas.
3. El examen consta de 3 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre. NO responda en las hojas de preguntas.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica. En especial usted no puede emplear ningún tipo de ayuda diferente a la que se le entrega con este examen.
7. Al finalizar su examen entregue sus hojas de respuesta, así como las horas de preguntas.
8. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

1 Falso o Verdadero (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) En presencia de heteroscedasticidad y para cualquier tamaño de muestra, la corrección de White proveerá un "buen" estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes estimados.

Falso, hay varias formas de argumentar en contra de esta afirmación. Tal vez la más fácil es la siguiente. Una de las características necesarias para un buen estimador es ser insesgado, la corrección de White provee estimadores consistentes de la matriz de varianzas y covarianzas, pero en muestras pequeñas dicho estimador será sesgado. Por tanto la afirmación es falsa.

b) La ***multicolinealidad perfecta*** es un problema del modelo planteado y no de la muestra, por eso es que en la práctica es imposible solucionar el problema.

Falso, el problema de multicolinealidad perfecta es un problema del modelo, que puede ser solucionado eliminando una variable. Por eso la afirmación es falsa.

c) Existe Multicolinealidad si existe una fuerte correlación lineal entre la variable dependiente y alguna (o una combinación) de las variables explicatorias.

Respuesta: Falso. Esta no es la definición

d) El método de estimación de Máxima Verosimilitud (MV) es un método que provee estimadores MELI para todos los parámetros de un modelo de regresión lineal, incluyendo la varianza del error. La única diferencia con los estimadores MCO es que para los estimadores de MV se necesita suponer que el término de error sigue una distribución normal.

Falso, el estimador de MV para la varianza es sesgado y por tanto no es MELI.

2 Selección Múltiple (15 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Determine cuál de las siguientes respuestas es la correcta. Escoja la mejor opción y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

2.1 ***La mejor*** forma de determinar la existencia de Multicolinealidad en un modelo de regresión estimado es:

a) Estar alerta por la posibilidad t-estadísticos bajos.
b) Estar alerta por la posibilidad de un F-global alto.
c) Determinar el grado de correlación entre las variables independientes por medio del determinante de la matriz de correlaciones.
d) Todas las anteriores

Respuesta: c)

2.2 Suponga el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, en donde ε_i es el término de error, el cual es heteroscedástico con $\mathbf{Var(\varepsilon_i) = f(\alpha)z_i}$, donde z_i es una variable observable y α es un término constante desconocido. ¿Cuál de los siguientes modelos debería ser utilizado para corregir el problema de heteroscedasticidad?

a) $y_i z_i = \beta_1 z_i + \beta_2 x_i z_i + \varepsilon_i^*$
b) $(y_i/z_i) = \beta_1 (1/z_i) + \beta_2 (x_i/z_i) + \varepsilon_i^*$
c) $y_i z_i^{-1/2} = \beta_1 z_i^{-1/2} + \beta_2 x_i z_i^{-1/2} + \varepsilon_i^*$.
d) ninguno de los anteriores.

Respuesta: c)

2.3 ¿Cuál de los siguientes supuestos es necesario para que los estimadores MCO sean insesgados?

a) El término de error tiene media cero
b) El término de error cumple $Var\left[\hat{\beta}\right] = \sigma^2 I$
c) Ninguna de las anteriores.
d) a) y b) son ciertas

Respuesta: a)

3 (30 puntos)

Un investigador desea determinar los determinantes del PIB per cápita real ($(\text{RGDP per capita})_t$ medido en millones de pesos de 1994 por habitante). Para lograr su finalidad emplea el siguiente modelo:

$$(\text{RGDP per capita})_t = \beta_0 + \beta_1 \text{FDevelopment}_t + \beta_2 \text{REXPT}_t + \beta_3 \text{RIMPT}_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde FDevelopment_t, REXPT_t y RIMPT_t representan el desarrollo financiero (medido por M2 como una proporción del PIB), las exportaciones reales (en millones de pesos de 1994) y las importaciones reales (en millones de pesos de 1994). El asistente del investigador realizó varios cálculos pero se perdieron algunos datos, los cuales fueron remplazados por "XXX" en la tabla que se reporta al final del examen.

a) Determine si existe algún tipo de problema econométrico en estos cálculos. Sea lo más claro posible. **(8 puntos).**

Existe un problema de multicolinealidad, se puede encontrar al multiplicar los valores propios de la matriz de correlaciones de las X's. (**4 puntos**) En este caso se obtiene 0.04017. También se podía hacer la prueba Kappa (pero no era necesaria).

Y también existe heteroscedasticidad, como lo muestra la prueba de Brush-Pagan. . (**4 puntos**)

No obstante los problemas que se presentaron y teniendo en cuenta todas las consideraciones de los problemas econométricos y las posibles soluciones disponibles, se decidió emplear el modelo reportado. De acuerdo a esto:

b) Interprete los coeficientes estimados teniendo en cuenta su significancia **(8 puntos)**.

Es importante reconocer que se debió emplear la corrección de White para la heteroscedasticidad y la multicolinelidad no fue resuelta.

La interpretación de los coeficientes es la siguiente:

$\hat{\beta}_0$=55303.217. 55303.217 millones de pesos constantes de 1994 por habitante corresponden al PIB per cápita que no depende del desarrollo financiero, de las exportaciones reales, ni de las importaciones reales.

$\hat{\beta}_1$= 1239660.86119. Un aumento de un punto porcentual del desarrollo financiero implicará un aumento de 1239660.86 millones de pesos constantes de 1994 por habitante en el PIB per cápita
.

$\hat{\beta}_2$= 0.00007. Un aumento de un millón de pesos de 1994 en las exportaciones reales implicará un aumento de 0.00007 millones de pesos constantes de 1994 por habitante en el PIB per cápita.

$\hat{\beta}_3$ no es significativo. Por tanto, un aumento de un millón de pesos de 1994 en las importaciones reales no implicará cambio en el PIB per cápita.

c) Encuentre los datos que se perdieron. Es decir encuentre lo que fue remplazado por "XXX". Será suficiente que remplace los valores correspondientes en una fórmula. No es necesario que realice todos los cálculos. **(4 puntos – 2 puntos por cada uno)**.

Primer "XXX" =) R-square = 0.9116 (1- (434755819132.279/4918656115003.14)
Segundo "XXX" =) Reject (para un nivel de significancia del 5% o 10%), Accept para un nivel de significancia del 1%

Nota, era necesario explicar de donde sale cada uno de los valores.

d) El investigador desea comprobar una hipótesis que ha sido fruto de gran discusión. La hipótesis es la siguiente: "A principios de la década de los 80 y de la década de los 90 se presentó un cambio estructural en la economía. Ese cambio estructural implicó no solo un cambio en el comportamiento del PIB per cápita, sino también que se doblará (en promedio) la elasticidad del PIB per cápita con respecto a las exportaciones." Escriba un modelo que permita comprobar esta hipótesis y muestre claramente como comprobaría la hipótesis, que fórmula emplearía y cómo tomaría la decisión. Para esta pregunta asuma que no existe ningún problema econométrico en el modelo. **(10 puntos)**.

Sean:

$$D_{1t} = \begin{cases} 1 & sit \geq 1980 \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad D_{2t} = \begin{cases} 1 & sit \geq 1990 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Así nuestro modelo será:

$$\begin{aligned}(\text{RGDP per capita})_t = {} & \beta_0 + \beta_1 \text{FDevelopment}_t + \beta_2 \text{REXPT}_t + \beta_3 \text{RIMPT}_t + \\ & \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{1t} \cdot \text{FDevelopment}_t + \alpha_3 D_{1t} \cdot \text{REXPT}_t + \alpha_4 D_{1t} \cdot \text{RIMPT}_t + \\ & \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{1t} \cdot \text{FDevelopment}_t + \gamma_3 D_{1t} \cdot \text{REXPT}_t + \gamma_4 D_{1t} \cdot \text{RIMPT}_t + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Es muy facil demostrar que el modelo permite probar la hipótesis, pues:

$$E\left[\left(\text{RGDP per capita}\right)_t\right]=\begin{cases}\beta_0+\beta_1\text{FDevelopment}_t+\beta_2\text{REXPT}_t+\beta_3\text{RIMPT}_t\\ \beta_0+\alpha_1+\left(\beta_1+\alpha_2\right)\text{FDevelopment}_t+\left(\beta_2+\alpha_3\right)\text{REXPT}_t+\left(\beta_3+\alpha_4\right)\text{RIMP}\\ \beta_0+\alpha_1+\left(\beta_1+\alpha_2+\gamma_2\right)\text{FDevelopment}_t+\left(\beta_2+\alpha_3+\gamma_3\right)\text{REXPT}_t+\left(\beta_3+\alpha_4+\gamma_4\right.\end{cases}$$

Así la hipótesis que se quiere comprobar implica:

$$H_0: 2\cdot\beta_2\cdot\frac{\overline{X}_{t<1980}}{(\overline{y})_{t<1980}}=\left(\beta_2+\alpha_3+\gamma_3\right)\cdot\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}}$$

$$H_0:\left(2\cdot\cdot\frac{\overline{X}_{t<1980}}{(\overline{y})_{t<1980}}-\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}}\right)\beta_2-\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}}\alpha_3-\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}}\gamma_3=0$$

$$H_A: no\ H_0$$

Donde $(\overline{y})_{t<1980}$ representa la media del PIB per cápita real para los años anteriores a 1980 y $\overline{X}_{t<1980}$ representa la media de las exportaciones reales para el mismo período. Esta hipótesis se puede escribir fácilmente en la forma $R\beta=c$, donde:

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0 & \left(2\cdot\cdot\frac{\overline{X}_{t<1980}}{(\overline{y})_{t<1980}}-\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\overline{X}_{t\geq 1990}}{(\overline{y})_{t\geq 1990}} & 0\end{bmatrix}$$

Para comprobar esta hipótesis se debería emplear el estadístico F que se encontrará con la siguiente fórmula:

$$F_c=\frac{\left(c-R\hat{\beta}\right)^T\left(R\left(X^TX\right)^{-1}R^T\right)^{-1}\left(c-R\hat{\beta}\right)\Big/1}{SSE/n-k}$$

La hipótesis nula se rechazaría si el F_c es más grande que el F de la tabla con 1 grado de libertad en el numerador y 33 (45-12) grados de liberad en el numerador.

4 (35 puntos)
Un empresario de productos de inversión supone que la cantidad vendida de bienes de capital (y_t) (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\varepsilon_t \qquad t=1,2,\ldots$$

donde X_{2t} representa la tasa de interés en el periodo t y X_{3t} denota el logaritmo del PIB en el periodo t (el PIB a sido medido en pesos constantes de 1994). Además se sabe que: $E\left(\varepsilon_t\right)=0$ y

$$Var\left(\varepsilon_t\right)=c\begin{bmatrix}\frac{\left(X_{3,1}+X_{2,1}\right)^2}{\left(X_{3,1}\right)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ & \frac{\left(X_{3,2}+X_{2,2}\right)^2}{\left(X_{3,2}\right)} & 0 & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \frac{\left(X_{3,24}+X_{2,24}\right)^2}{\left(X_{3,24}\right)} & 0\\ & & & & \frac{\left(X_{3,25}+X_{2,25}\right)^2}{\left(X_{3,25}\right)}\end{bmatrix}$$

a) ¿Cuáles propiedades poseen los estimadores MELI (BLUE) de los parámetros β? **(4 puntos)**

Las propiedades son:

- Insesgados $E\left[\hat{\beta}\right]=\beta$
- Menor varianza posible.

b) Claramente determine cuál de las propiedades no se cumple en el modelo planteado por el empresario y determine cómo podría solucionar el problema y ¿por qué dicha solución funcionará? Sea lo más claro posible. **(7 puntos)**

En este caso no se cumple la propiedad de la mínima varianza (2 puntos). El problema se puede solucionar fácilmente empleando los mínimos cuadrados ponderados. Es decir,

$$\frac{y_t\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}=\beta_1\frac{\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}+\beta_2\frac{X_{2t}\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}+\beta_3\frac{X_{3t}\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}+\frac{\varepsilon_{2t}\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}$$

Así, tendremos que:

$$Var\left(\frac{\varepsilon_t\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)}\right)=\frac{X_{3t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}Var\left(\varepsilon_t\right)=\frac{X_{3t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}\frac{c\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}{X_{3t}}=c$$

Y por tanto el problema de heteroscedasticidad ha sido solucionado. (5 puntos)

c) Después de realizar las transformaciones del caso, se obtiene las siguientes matrices que corresponden al equivalente de la matriz X^TX, X^Ty y y^Ty: $y^Ty=46.1625$

$$X^TX=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix} \qquad X^Ty=\begin{pmatrix}9\\ 13\\ 4\end{pmatrix}$$

Explique claramente a que corresponde cada uno de los elementos de la matriz X^TX. (Por ejemplo, explique a partir de que sumatoria sale el 10 que corresponde al último elemento de la matriz X^TX, y así sucesivamente con cada elemento de las dos matrices) **(4 puntos)**

En este caso tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_{3t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_t\sqrt{X_{3t}}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=9,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{y_tX_{3t}X_{2t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=4,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{y_t\left(X_{3t}\right)^2}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=13,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_{2t}\right)^2X_{3t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=16\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_{3t}\right)^3}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=10$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_{3t}\right)X_{2t}}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_{3t}\right)^2}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_{3t}\right)^2\left(X_{2t}\right)}{\left(X_{3t}+X_{2t}\right)^2}=0$$

d) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo; además estime σ^2 empleando el mismo método. **(8 Puntos)**

En este caso tenemos que:

$$\beta_{hat}=\left(X^TX\right)^{-1}\cdot X^Ty$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{16} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\13\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{13}{16}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$\beta hat=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{13}{16}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$ (6 puntos)

Además $s^2=\frac{SSE}{n}=\frac{y^Ty-\hat{\beta}^TX^Ty}{n}=\frac{46.1625-21.1625}{25}=1$ (2 puntos)

e) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados.**(6 Puntos – 2 puntos cada uno)**

$\hat{\beta}_1=1$. No tiene interpretación económica.

$\hat{\beta}_2=13/16$

cuando la tasa de interés aumenta en un punto porcentual, las unidades de bienes de capital aumentan en 81,250$\left(\frac{13}{16}100,000=\frac{13}{8}50,000=\frac{13}{4}25,000=81,250\right)$.

$\hat{\beta}_3=2/5$. Ante un aumento del 1% en el PIB, las unidades de bienes de capital aumentan en 400.$\left(\frac{2}{5}\frac{100,000}{100}=\frac{2}{5}1000=400\right)$

f) El empresario cree que las ventas no se comportan igual cuando la tasa de interés está creciendo que cuando está cayendo. Escriba un modelo que permita determinar si el empresario tiene o no la razón. Explique además por qué su modelo permite comprobar esa hipótesis y como comprobaría la hipótesis. **(6 Puntos)**

En este caso, podemos generar la siguiente variable dummy:

$$D_t=\begin{cases}1 & si \text{ tasa de } i \text{ crece en } t\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

El modelo en este caso sería:

$$y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\gamma D_tX_{2t}+\varepsilon_t$$

El modelo permite comprobar la hipótesis, pues:

$$E\left[y_t\right]=\begin{cases}\beta_1+\left(\beta_2+\gamma\right)X_{2t}+\beta_3X_{3t} & si \text{ tasa de } i \text{ crece}\\ \beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t} & o.w.\end{cases}$$

Así, la hipótesis se puede comprobar por medio de la siguiente prueba de hipótesis: $H_0:\gamma=0$, versus la $H_A:\gamma\neq0$. Esta es una simple prueba de significancia, la cual ya hemos discutido en clase.

Resultados de EasyReg.

Variables:
X(1)=FDevelopment
X(2)=REXPT
X(3)=RIMPT
First chosen observation: t = 1 (=1960)
Last chosen observation: t = 45 (=2004)

Sample correlation matrix
1.00000000E+00 8.55775179E-01 8.46984659E-01
8.55775179E-01 1.00000000E+00 9.13158732E-01
8.46984659E-01 9.13158732E-01 1.00000000E+00

Eigenvalues:
2.744280 0.169201 0.086519

Dependent variable:
Y = RGDP per capita

Characteristics:
RGDP per capita
First observation = 1(=1960)
Last observation = 45(=2004)
Number of usable observations: 45

X variables:
X(1) = FDevelopment
X(2) = REXPT
X(3) = RIMPT
X(4) = 1

Model:
Y = b(1)X(1) +.....+ b(4)X(4) + U,
where U is the error term, satisfying
E[U|X(1),...,X(4)] = 0.

OLS estimation results

Parameters	Estimate	t-value	H.C. t-value
		(S.E.)	(H.C. S.E.)
		[p-value]	[H.C. p-value]

b(1)	1239660.86119	2.836	2.967
		(437186.59329)	(417749.66951)
		[0.00457]	[0.00300]
b(2)	0.00007	6.594	6.419
		(0.00001)	(0.00001)
		[0.00000]	[0.00000]
b(3)	-0.00001	-0.873	-1.086
		(0.00001)	(0.00001)
		[0.38250]	[0.27734]
b(4)	553303.21703	6.550	6.955
		(84477.49136)	(79557.04419)
		[0.00000]	[0.00000]

Notes:
1: S.E. = Standard error
2: H.C. = Heteroskedasticity Consistent. These t-values and standard errors are based on White's heteroskedasticity consistent variance matrix.
3: The two-sided p-values are based on the normal approximation.

Effective sample size (n): 45
Variance of the residuals: 10603800466.641
Residual sum of squares (RSS): 434755819132.279
(Also called SSR = Sum of Squared Residuals)
Total sum of squares (TSS): 4918656115003.14
R-square: XXX

Overall F test: F(3,41) = 140.95
p-value = 0.00000
Significance levels: 10% 5%
Critical values: 2.22 2.83
Conclusions: reject reject

Breusch-Pagan test = 8.182275
Null hypothesis: The errors are homoskedastic
Null distribution: Chi-square(3)
p-value = 0.0175726
Conclusions: XXXXX

If the model is correctly specified, in the sense that the conditional expectation of the model error U relative to the X variables and all lagged dependent (Y) variables and lagged X variables equals zero, then

```
the OLS parameter estimators b(1),..,b(4), minus their true values,
times the square root of the sample size n, are (asymptotically)
jointly normally distributed with zero mean vector and variance matrix:

 8.60094528E+12 -7.64818198E+01 -4.83657952E+01 -1.51376028E+12
-7.64818216E+01  4.70960503E-09 -2.49403697E-09  5.57490209E+00
-4.83657943E+01 -2.49403699E-09  2.81672599E-09  1.07525695E+01
-1.51376028E+12  5.57490175E+00  1.07525697E+01  3.21140095E+11

provided that the conditional variance of the model error U is constant
(U is homoskedastic), or

 7.85316539E+12 -8.95940300E+01 -3.31347037E+01 -1.32118357E+12
-8.95940346E+01  4.97081093E-09 -1.98879342E-09  4.54176018E+00
-3.31347010E+01 -1.98879347E-09  1.82036641E-09  9.33356237E+00
-1.32118357E+12  4.54175932E+00  9.33356285E+00  2.84819548E+11

if the conditional variance of the model error U is not constant
(U is heteroskedastic).
```