

**Econometría 06169****Examen Parcial #1****Cali, Martes 14 de Septiembre de 2004**

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante: \_\_\_\_\_

Código: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:**

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de 3 páginas; además, deben tener 3 páginas de fórmulas.
3. El examen consta de 4 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre. NO responda en las hojas de preguntas.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica. En especial usted no puede emplear ningún tipo de ayuda diferente a la que se le entrega con este examen.
7. Al finalizar su examen entregue sus hojas de respuesta, así como las horas de preguntas.
8. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

**1 Falso o Verdadero (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)**

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

- a) El siguiente modelo  $\frac{1}{y_t} = \gamma \left( \frac{1}{\ln(X_{it})} \right)^\theta X_{it}^\tau \varepsilon_t$  se puede estimar por MCO.
- b) Sean  $X$  y  $c$  una variable aleatoria y una constante, respectivamente. Entonces:  $Cov(c, X) = Var(X)$
- c) Sean SST, SSE y SSR suma de los cuadrados de la variabilidad total, la suma de los cuadrados de los errores y la suma cuadrada de la regresión. El método de mínimos cuadrados ordinarios para una regresión simple implica minimizar el SSR.
- d) El muestreo estratificado aleatorio es preferible al Muestreo por conglomerados cuando la población está organizado en pocos grupos heterogéneos.

**2 Falso o Verdadero (10 puntos en total, 5 puntos cada subparte)**

Determine cuál de las siguientes respuestas es la correcta. Escoja la mejor opción y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

1. Suponga que se desean comparara los siguientes dos modelos:

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{ii} + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{ii} + \varepsilon_i$$

Entonces:

- a) El modelo con el  $r^2$  más alto será el mejor
  - b) El  $r^2$  no es un buen criterio para escoger entre los dos modelos.
  - c) El segundo modelo es mejor que el primero por ser más sencillo.
  - d) Ninguna de las anteriores.
2. Una de las siguientes afirmaciones NO es correcta:
    - a) El tamaño de una muestra para un MAS sin reposición no depende del tamaño de la población, si está es lo suficientemente grande.
    - b) La razón por la que se emplea el valor de la estándar normal, y no la distribución normal, al calcular el tamaño de una MAS con reposición es porque no conocemos la varianza poblacional
    - c) Entre más grupos heterogéneos existan en una población, más conveniente será emplear un muestreo por conglomerados.
    - d) Para encontrar el tamaño de una MAS con reposición será necesario no es necesario conocer el valor de la varianza poblacional.

**3 (35 puntos)**

Un investigador desea encontrar la relación que existe entre el ingreso anual de un grupo de estudiantes y su ahorro anual (ambas variables medidas en millones de pesos). Para llevar a cabo este estudio, el investigador desea estimar el siguiente modelo:

$$Ahorro_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(Ingreso_i) + \varepsilon_i \quad (1)$$

El investigador recoge la siguiente información:

| Observación | 1     | 2     | 3 | 4     | 5     |
|-------------|-------|-------|---|-------|-------|
| Ahorro      | 0     | 0     | 1 | 1     | 3     |
| Ingreso     | 0.135 | 0.368 | 1 | 2.718 | 7.389 |
| Ln(Ingreso) | -2    | -1    | 0 | 1     | 2     |

Además, después de diferentes cálculos el investigador determino que  $s^2 = 0.367$ .

A partir de esta información, responda las siguientes preguntas.

- Estime los coeficientes por MCO **(10 Puntos)**
- Interprete el significado de cada coeficiente **(5 Puntos)**.
- El investigador antes de recolecta la información creía que la mitad de  $\beta_2$  era igual a 0.3. Ayude al investigador a determinar si tenía o no razón. Explique claramente su razonamiento (efectué los cálculos que crea necesarios). **(10 Puntos)**
- El investigador desea determinar cual sería el ahorro de un estudiante con ingresos de \$2.7200 pesos. Además desea tener un intervalo de confianza del 95% para este valor. ¿si es del caso deje sus cálculos indicados, pero desarrolle al máximo!!**(10 Puntos)**

#### 4 (35 puntos)

El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos,  $y_t$ , tengan un

comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico:  $y_t = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_3 X_{3t}$ ,

donde  $x_{1t}$  representa el número de reclamos en el día  $t$ ,  $x_{2t}$  representa el número de ofertas en el día  $t$  y  $x_{3t}$  representa el porcentaje de descuento ofrecido en el día  $t$ .  $\varepsilon_t$  representa una variable estocástica que esta normalmente e independientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido la siguiente información para 10 períodos:

$$\sum_{t=1}^n \frac{1}{X_{2t}} = 0, \sum_{t=1}^n X_{3t} = 0, \sum_{t=1}^n \frac{1}{X_{2t}^2} = 16, \sum_{t=1}^n \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0, \sum_{t=1}^n X_{3t}^2 = 10, \sum_{i=1}^n y_t = 10, \sum_{t=1}^n \frac{y_t}{X_{2t}} = 32$$

$$\text{y } \sum_{t=1}^n X_{3t} y_t = 4$$

- ¿Cuáles propiedades debe cumplir el término aleatorio, para obtener estimadores MELI (BLUE) para los parámetros  $\beta$ , por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)? **(5 puntos)**
- Explique brevemente las propiedades de un estimador MELI (BLUE) **(5 puntos)**
- Encuentre la matriz  $X^T X$ . **(5 puntos)**
- Calcule los mejores estimadores lineales insesgados del vector  $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)^T$ . **(10 puntos)**
- Explique el significado de los coeficientes estimados **(10 puntos)**

**Econometría 06169**  
**Examen Parcial #1**  
**Respuestas Sugeridas**  
**Cali, Lunes 6 de Septiembre de 2004**

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante: \_\_\_\_\_  
 Código: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:**

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de 5 páginas; además, deben tener 3 páginas de fórmulas.
3. El examen consta de 4 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre. NO responda en las hojas de preguntas.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica. En especial usted no puede emplear ningún tipo de ayuda diferente a la que se le entrega con este examen.
7. Al finalizar su examen entregue sus hojas de respuesta, así como las horas de preguntas.
8. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

**1 Falso o Verdadero (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)**

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

- a) El siguiente modelo  $\frac{1}{y_t} = \gamma \left( \frac{1}{\ln(X_{1t})} \right)^\theta X_{2t}^\tau \varepsilon_t$  se puede estimar por MCO.

Verdadero, pues:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_t} &= \gamma \left( \frac{1}{\ln(X_{1t})} \right)^\theta X_{2t}^\tau \varepsilon_t \\ \ln\left(\frac{1}{y_t}\right) &= \ln\left[\gamma \left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^\theta X_{2t}^\tau \varepsilon_t\right] \\ -\ln(y_t) &= \ln(\gamma) + \ln\left[\left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^\theta\right] + \ln(X_{2t}^\tau) + \ln(\varepsilon_t) \\ -\ln(y) &= \ln(\gamma) - \theta \ln(\ln(X_{1t})) + \tau \ln(X_{2t}) + \ln(\varepsilon_t) \\ \ln(y) &= -\ln(\gamma) + \theta \ln(\ln(X_{1t})) - \tau \ln(X_{2t}) - \ln(\varepsilon_t) \\ \ln(y) &= \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \tau X_{2t} + \mu_t \end{aligned}$$

Donde  $\mu_t = -\ln(\varepsilon_t)$ ,  $\beta_2 = \theta$  y  $\beta_1 = -\ln(\gamma)$ .

- b) Sean  $X$  y  $c$  una variable aleatoria y una constante, respectivamente. Entonces:  
 $Cov(c, X) = Var(X)$

Falso, pues por definición tenemos que:

$$Cov(c, X) = E[cX] - E[c]E[X] = c(E[X] - E[X]) = 0$$

- c) Sean SST, SSE y SSR suma de los cuadrados de la variabilidad total, la suma de los cuadrados de los errores y la suma cuadrada de la regresión. El método de mínimos cuadrados ordinarios para una regresión simple implica minimizar el SSR.

Falso, pues recuerden que en el caso de una regresión simple tendremos que  $SST = SSR + SSE$ . Además el SST es fijo y sabemos que el método de Mínimos cuadrados ordinarios implica minimizar la suma de los errores al cuadrado. Por tanto el Método de Mínimos cuadrados implica maximizar el SSR:

- d) El muestreo estratificado aleatorio es preferible al Muestreo por conglomerados cuando la población está organizado en pocos grupos heterogéneos.

Falso, Si bien el muestreo estratificado tiene sentido cuando existen pocos grupos en la población, será necesario tener grupos homogéneos para que esta técnica de muestreo tenga sentido, pues recuerden que en el muestreo por conglomerados se escoge por medio de MAS sin reposición de cada grupo (estrato) y si estos estratos no son homogéneos, no tendrá mucho sentido hacer este tipo de muestreo en cada estrato.

**2 Selección Múltiple (10 puntos en total, 5 puntos cada subparte)**

Determine cuál de las siguientes respuestas es la correcta. Escoja la mejor opción y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

1. Suponga que se desean comparara los siguientes dos modelos:

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{ii} + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{ii} + \varepsilon_i$$

Entonces:

- El modelo con el  $r^2$  más alto será el mejor
- El  $r^2$  no es un buen criterio para escoger entre los dos modelos.
- El segundo modelo es mejor que el primero por ser más sencillo.
- Ninguna de las anteriores.

b) Noten que en los dos modelos las variables dependientes son diferentes y por tanto los SST de los modelos son diferentes. Entonces el  $r^2$  de los dos modelos no es comparable.

Una de las siguientes afirmaciones NO es correcta:

- El tamaño de una muestra para un MAS sin reposición no depende del tamaño de la población, si está es lo suficientemente grande.
- La razón por la que se emplea el valor de la estándar normal, y no la distribución normal, al calcular el tamaño de una MAS con reposición es porque no conocemos la varianza poblacional
- Entre más grupos heterogéneos existan en una población, más conveniente será emplear un muestreo por conglomerados.
- Para encontrar el tamaño de una MAS con reposición no es necesario conocer el valor de la varianza poblacional.

b) La razón por emplear la estándar normal es que si se emplea la distribución t, está dependerá también del tamaño de la muestra, y por tanto no nos ayudará a determinar el tamaño de la muestra.

**3 (35 puntos)**

Un investigador desea encontrar la relación que existe entre el ingreso anual de un grupo de estudiantes y su ahorro anual (ambas variables medidas en millones de pesos). Para llevar a cabo este estudio, el investigador desea estimar el siguiente modelo:

$$\text{Ahorro}_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(\text{Ingreso}_i) + \varepsilon_i \quad (1.1)$$

El investigador recoge la siguiente información:

| Observación | 1     | 2     | 3 | 4     | 5     |
|-------------|-------|-------|---|-------|-------|
| Ahorro      | 0     | 0     | 1 | 1     | 3     |
| Ingreso     | 0.135 | 0.368 | 1 | 2.718 | 7.389 |
| Ln(Ingreso) | -2    | -1    | 0 | 1     | 2     |

Además, después de diferentes calculos el investigador determino que  $s^2 = 0.367$ .

A partir de esta información, responda las siguientes preguntas.

- e) Estime los coeficientes por MCO (10 Puntos)

Sean  $y_i = \text{Ahorro}_i$  y  $x_i = \ln(\text{Ingreso}_i)$ . Entonces tenemos que:  $\bar{y} = 1$ ,  $\bar{x} = 0$ ,  $n = 5$ ,

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = 7 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 10.$$

Por tanto tenemos que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{7-0}{10-0} = 0.7$$

Así mismo tenemos que:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} = 1$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

- f) Interprete el significado de cada coeficiente (5 Puntos).

**Explicación (2.5 Puntos c/u):**

Noten que a partir de (1.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Ahorro}_i}{d\text{Ingreso}_i} &= \beta_2 \frac{1}{\text{Ingreso}_i} \\ \frac{d\text{Ahorro}_i}{d\text{Ingreso}_i / \text{Ingreso}_i} &= \beta_2 \\ \frac{d\text{Ahorro}_i}{\Delta\% \text{Ingreso}} &= \frac{\beta_2}{100} \end{aligned}$$

Entonces:

$\hat{\beta}_1$  no tiene interpretación económica.

$\frac{\hat{\beta}_2}{100} = \frac{0.7}{100} = 0.007$ , un aumento del uno por ciento en el ingreso generará un aumento de .007 millones en el ahorro.

- g) El investigador antes de recolecta la información creía que la mitad de  $\beta_2$  era igual a 0.3. Ayude al investigador a determinar si tenía o no razón. Explique claramente su razonamiento (efectué los cálculos que crea necesarios). (10 Puntos)

Noten que esta afirmación es equivalente a comprobar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \frac{\beta_2}{2} = 0.3$$

$$H_0 : \beta_2 = 0.6$$

versus la hipótesis alterna  $H_A : \beta_2 \neq 0.6$ . Para comprobar esta hipótesis requerimos encontrar:

$$Var(\beta_2) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2$$

en este caso tenemos que

$$s_{\beta_2}^2 = \frac{0.367}{10} = 0.0367$$

por tanto tenemos que:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2 - c}{s_{\beta_2}^2} = \frac{0.7 - 0.6}{\frac{0.367}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{0.367}{10}} = \frac{1}{0.367} = \frac{10}{3.67} = 2.725$$

Al comparar este t calculado con el correspondiente valor crítico (3.18) podemos concluir que no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir el investigador tenía la razón.

- h) El investigador desea determinar cual sería el ahorro de un estudiante con ingresos de \$2.7200 pesos. Además desea tener un intervalo de confianza del 95% para este valor. ¿si es del caso deje sus cálculos indicados, pero desarrolle al máximo!!(10 Puntos)

Noten que en este caso tenemos que:

$$\hat{y}_i = 1 + 0.7 \ln(2.72) = 1 + 0.7 \cdot 1 = 1.7$$

Entonces un intervalo de confianza para este valor está dado por:

$$\begin{aligned} \hat{y} \pm t_{\alpha/2, n-2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \\ 1.7 \pm 3.18 \cdot 0.367 \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(1-0)^2}{10}} \\ 1.7 \pm 3.18 \cdot 0.367 \sqrt{\frac{13}{10}} \\ 1.7 \pm 3.18 \cdot 0.367 \frac{3.606}{3.162} \\ 1.7 \pm 3.18 \cdot 0.419 \\ 1.7 \pm 1.331 \\ [0.369, 3.031] \end{aligned}$$

4 (35 puntos)

El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos,  $y_t$ , tengan un

comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico:  $y_t = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_3 X_{3t}$ ,

donde  $x_{1t}$  representa el número de reclamos en el día t,  $x_{2t}$  representa el número de ofertas en el día t y  $x_{3t}$  representa el porcentaje de descuento ofrecido en el día t.  $\varepsilon_t$  representa una variable estocástica que esta normalmente e independientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido la siguiente información para 10 periodos:

$$\sum_{t=1}^n \frac{1}{X_{2t}} = 0, \quad \sum_{t=1}^n X_{3t} = 0, \quad \sum_{t=1}^n \frac{1}{X_{2t}^2} = 0, \quad \sum_{t=1}^n \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0, \quad \sum_{t=1}^n X_{3t}^2 = 10, \quad \sum_{t=1}^n y_t = 10, \quad \sum_{t=1}^n \frac{y_t}{X_{2t}} = 32 \quad y \quad \sum_{t=1}^n X_{3t} y_t = 4$$

- a) ¿Cuáles propiedades debe cumplir el término aleatorio, para obtener estimadores MELI (BLUE) para los parámetros  $\beta$ , por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)? (5 puntos)

Los errores deben:

- Tener media cero
- Varianza constante
- Y no estar autocorrelacionados

- b) Explique **brevemente** las propiedades de un estimador MELI (BLUE) (5 puntos)

Las propiedades son:

- Insesgades, es decir que en promedio el estimador es igual valor poblacional
- Mínima varianza posible, en otras palabras que este estimador tiene la mínima variabilidad alrededor del valor real.

- c) Encuentre la matriz  $X^T X$ . (5 puntos)

En este caso tenemos que:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad X^T y = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- d) Calcule los mejores estimadores lineales insesgados del vector  $\beta = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)^T$ . (10 puntos)

Sabemos que  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$  son MELI si los supuestos del Teorema de Gauss-Markov se cumplen. Entonces:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

e) Explique el significado de los coeficientes estimados (10 puntos)

$$\hat{\beta}_1 = 1$$

No tiene interpretación económica.

$$\hat{\beta}_2 = 2;$$

un aumento del uno por ciento en las ofertas en el día t implicará una disminución de 0.02 (dividido el número de ofertas) de pesos en las ventas. Es decir, hace parte del efecto en las ventas (medido en millones de pesos) que tiene un aumento del uno por ciento en la ofertas

$$\frac{dy_t}{dX_{2t}} = -\beta_2 \frac{1}{(X_{2t})^2}$$

$$\frac{dy_t}{dX_{2t}/X_{2t}} = -\beta_2 \frac{1}{(X_{2t})}$$

$$\frac{dy_t}{\Delta\%X_{2t}} = -\frac{\beta_2}{100} \frac{1}{(X_{2t})}$$

$$\hat{\beta}_3 = 0.4,$$

un aumento de un punto porcentual en el descuento en el día t aumentará las ventas en 400.000 pesos.