Taller #3
Econometría 06169
1er Semestre 2003

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas.
Además recuerden que en todas las preguntas ustedes deben mostrar todo su trabajo.

1. En el taller pasado estimamos por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador.

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad y^T y = 510$$

Ahora, (no neceistan hallar de nuevo los estimadores, pueden usar los resultados encontrados anteriormente)

a) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 + \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

2. Usando la misma información de la pregunta 1,

a) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

3. La curva de Phillips relaciona empíricamente la tasa de vriación de los salarios nominales (dw_t) y la tasa de desempleo (u_t). Supongamos, que dicha relación esta dada por:

$$dw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1}{u_t}\right) + \varepsilon_t$$

a) ¿Puede estimar este modelo por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios?

b) Para $\beta_1 > 0$, represente la curva de Phillips en un gráfico (cuyos ejes sean dw_t y u_t), interpretando los parémetros del modelo.

c) ¿Carece de sentido la obtención de un parámetro $\beta_1 < 0$?

4. El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cádena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos, Y_t, tengan un comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico: $Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$, donde X_{1t} representa el número de reclamos en el dia t, X_{2t} representa el número de ofertas en el día t y X_{3t} representa el número de anuncios en el periodico en el dia t. ε_t representa una variable estocastica que esta normalemte e idependientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido 400 observaciones y han efectuado los siguientes cáculos:

$$Y^T Y = 51370 \qquad Y^T X = (5200 \quad 13600 \quad 22800) \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 800 & 1600 & 2400 \\ 1600 & 4000 & 6400 \\ 2400 & 6400 & 11200 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los mejores estimadores lineales insesgados del vector $\beta = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)^T$. Expliple que el significado de los coeficientes estimados.

b) Estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de β.

c) ¿Son β_2 y β_3 significativo conjuntamente? Explique las implicaciones de su respuesta.

5. Usando la misma información de la pregunta 4, considere las siguientes preguntas:

a) En la última reunión del departamento de planeación uno de los asesores afirmaba: "Si logramos que en un día no existán reclamos, hacemos 5 promociones y publicamos 3 anuncios de prensa, entonces nuestros ingresos diarios serán de 8.5 millones". Pruebe la hipotesis de dicho asesor y explique sus conclusiones.

b) El departamento de finanzas de esta cadena de almacenes desea conocer un rango para el valor promedio de las ventas diarias para poder efectuar la programación financiera del próximo trimestre. Si sabemos que existirán 4 ofertas diarias, 45 anuncios de prensa diarios y ningún reclamo, calcule el rango requerido por el departamento de finanzas (con un 95% de confianza).

Taller #3
Econometría 06169
1er Semestre 2003
Respuestas Sugeridas

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas.
Además recuerden que en todas las preguntas ustedes deben mostrar todo su trabajo.

1. En el taller pasado estimamos por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador.

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad y^T y = 510$$

Ahora, (no neceistan hallar de nuevo los estimadores, pueden usar los resultados encontrados anteriormente)

a) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 + \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Esta hipótesis nula puede ser escrita en la forma $R \cdot \beta = C$. Como sólo existen una restricción y tenemos tres parametros estimados, entonces la matriz R tendrá dimensiones 1x3. En este caso $R = (0 \quad 1 \quad 1)$ y $C = 0$. Así, el Fcalculado esta dado por

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{((C - R \cdot \beta hat))^T \cdot \left[R \cdot \left((X)^T \cdot X\right)^{-1} \cdot R^T\right]^{-1} \cdot (C - R \cdot \beta hat)}{r}}{s^2}$$

Del taller anterior sabemos que:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{43}{10} \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad s^2 = \frac{1751}{970} = 1.805$$

Entonces tenemos que

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\ \frac{43}{10}\end{pmatrix}\right]^{T}\cdot\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0\\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\ \frac{43}{10}\end{pmatrix}\right]}{1}}{\dfrac{1751}{970}}$$

$$F_{calculado} = \frac{\left(\frac{53}{10}\right)^{T}\cdot\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0\\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\frac{53}{10}}{\frac{1751}{970}} = \frac{\frac{53}{10}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{53}{10}}{\frac{1751}{970}} = \frac{817419}{14008} = 58.354$$

Este $F_{calculado}$ lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(1,97)} = 3.09$. Claramente el $F_{calculado}$ es mayor que el F de la tabla y por tanto existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula que $\beta_2 + \beta_3 = 0$.

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

Sabemos que la tabla ANOVA viene dada por:

Tabla ANOVA

Fuente de variación	**SS**	**G de L**	**MS**
Regresión	$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\overline{Y}^2$	k − 1	$\frac{SSR}{k-1}$
Error (Residuos)	$SSE = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y$	n − k	$\frac{SSE}{n-k}$
Total	$y^T y - n\overline{Y}^2$	n − 1	

En este caso tenemos que $k := 3,\ n := 100$, $y^T y = 510$, $\beta hat \cdot X^T y = \frac{3349}{10}$ y $Ybar = \frac{120}{100}$.

Asi, la tabla Anova es

Tabla ANOVA

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	$\frac{3349}{10} - \left[100\cdot\left(\frac{120}{100}\right)^2\right] = 190.9$	$3 - 1 = 2$	$\frac{190.9}{2} = 95.45$
Error (Residuos)	$510 - \frac{3349}{10} = 175.1$	$100 - 3 = 97$	$\frac{175.1}{97} = 1.805$
Total	$510 - 100\cdot\left(\frac{120}{100}\right)^2 = 366$	99	

2. Usando la misma información de la pregunta 1,

a) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

Sabemos que $R^2 = \frac{SSR}{SST}$. Entonces, en este caso tenemos que $R^2 = \frac{190.9}{366} = 0.522$. Esto implica que el 52.27% de la variación de Y es explicada por nuestro modelo.

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

Existen varias formas de hacer esta pregunta. Una de las formas es usando la información de la tabla ANOVA. Sabemos que el F calculado para pobar dicha Ho esta dado por

$$F_{calculado} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{95.45}{1.805} = 52.881$$

El F de la tabla par este caso es $F_{0.05,(2,97)} = 3.09$. Como el $F_{calculado} > F_{0.05,(2,97)}$, entonces hay suficiente evicencia para rechazar la Ho. Así podemos decir que ambas variables son importantes en nuestro modelo.

3. La curva de Phillips relaciona empíricamente la tasa de vriación de los salarios nominales (dw_t) y la tasa de desempleo (u_t). Supongamos, que dicha relación esta dada por:

$$dw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1}{u_t}\right) + \varepsilon_t$$

a) ¿Puede estimar este modelo por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios?

El modelo puede estimarse por MCO definiendo $x_t = \left(\frac{1}{u_t}\right)$, así el modelo será:

$$dw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_t + \varepsilon_t$$

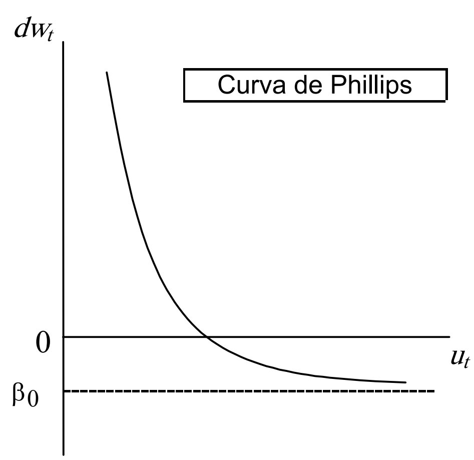
Este modelo claramente es un modelo lineal, estimable por método de MCO..

b) Para $\beta_1 > 0$, represente la curva de Phillips en un gráfico (cuyos ejes sean dw_t y u_t), interpretando los parémetros del modelo.

Noten que en el espacio dw_t y u_t la pendiente de la función $dw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1}{u_t}\right) + \varepsilon_t$ es:

$$\frac{d}{du_t} dw_t = \frac{-\beta_1}{u_t}$$

Así, al definirse $\beta_1 > 0$, la pendiente de la curva será negativa. A continuación se observa el gráfico de la curva de Phillips. Además, note que $\lim_{u_t \to \infty} \left(\frac{1}{u_t}\right) = 0$, por tanto $\lim_{u_t \to \infty} dw_t = \beta_0$. Por tanto β_0 representa la cota mínima para el cambio en los salarios nominales. Cur



Así, β_1 es parte de la pendiente de la curva de Phillips, no es la pendiente de esta!!! β_0 corresponde a la mínima variación posible para el cambio del salario.

c) ¿Carece de sentido la obtención de un parámetro $\beta_1 < 0$?

Aparentemente no parece adecuado (a priori) plantear la posibilidad de un parámetro $\beta_1 < 0$. De serlo así, la función tendría una pendiente positiva; es decir, aumentos de las tasa de desempleo irían acompañados de incrementos en los salarios nominales, teniendo como cota asimptótica en la tasa de salarios nominales en β_0.

Ahora bien, es importante que recuerden que la derivación inicial de la Curva de Phillips es puramente descriptiva y que posee un débil fundamento tanto en la teoría económica como en las técnicas econométricas.

4. El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cádena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos, Y_t, tengan un comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico: $Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$, donde X_{1t} representa el número de reclamos en el dia t, X_{2t} representa el número de ofertas en el día t y X_{3t} representa el número de anuncios en el periodico en el dia t. ε_t representa una variable estocastica que esta normalemte e idependientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido 400 observaciones y han efectuado los siguientes cáculos:

$$Y^T Y = 51370 \qquad Y^T X = (5200 \quad 13600 \quad 22800) \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 800 & 1600 & 2400 \\ 1600 & 4000 & 6400 \\ 2400 & 6400 & 11200 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los mejores estimadores lineales insesgados del vector $\beta = (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3)^T$. Explique el significado de los coeficientes estimados.

Sabemos que $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ es MELI si se sumplen los 3 supuestos del teorema de Gauss-Markov. Así,

$$\beta\text{hat} = \begin{pmatrix} 800 & 1600 & 2400 \\ 1600 & 4000 & 6400 \\ 2400 & 6400 & 11200 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5200 \\ 13600 \\ 22800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\beta hat_1 = -\frac{1}{2}$; un reclamo adicional en el dia t provocará una disminución de medio millón de pesos en las ventas,

$\beta hat_2 = 2$; una oferta adicional en el día t imlicará un aumento de dos millones de pesos en las ventas

$\beta hat_3 = 1$; un anuncios adicional en el periodico en el dia t aumentará las ventas en un millón de pesos.

b) Estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de β.

Para encontrar el estimador para σ^2 empleamos la siguiente fórmula.

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat \cdot X^T y}{n - k} = \frac{51370 - \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5200 & 13600 & 22800 \end{pmatrix}^T\right]}{400 - 3} = 10$$

Entonces la matriz estimada de varianzas y covarianzas de los estimadores de β esta dada por

$$\widehat{Var\left(\hat{\beta}\right)} = s^2\left(X^T X\right)^{-1} = 10 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{40} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{80} \\ \frac{-1}{20} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{40} \\ \frac{1}{80} & \frac{-1}{40} & \frac{1}{80} \end{pmatrix}$$

c) ¿Son β_2 y β_3 significativo conjuntamente? Explique las implicaciones de su respuesta.

Entonces queremos provar la siguiente hipótesis $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Como vimos en clase, esta hipótesis la podemos reescribir en la forma $R \cdot \beta = C$. En este caso a martriz R tendrá dimensiones 2x3. En este caso tenemos $R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así el F calculado esta dado por:

$$F_{\beta_0} = \frac{\frac{((C - R \cdot \beta hat))^T \cdot \left[R \cdot \left((X)^T \cdot X\right)^{-1} \cdot R^T\right]^{-1} \cdot (C - R \cdot \beta hat)}{r}}{s^2}$$

Donde

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix} \qquad s^2 = 10$$

Entonces tenemos que

$$F_c = \frac{\dfrac{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^T \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}{2}}{10}$$

$$F_c = 680$$

Este F_c lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(2,397)} = 3.018$. Claramente el $F_{calculado}$ es mayor que el F de la tabla y por tanto hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula que $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Es decir, estos dos variables son significativas para el modelo.

5. Usando la misma información de la pregunta 4, considere las siguientes preguntas:

a) En la última reunión del departamento de planeación uno de los asesores afirmaba: "Si logramos que en un día no existán reclamos, hacemos 5 promociones y publicamos 3 anuncios de prensa, entonces nuestros ingresos diarios serán de 8.5 millones". Pruebe la hipotesis de dicho asesor y explique sus conclusiones.

Esta afirmación es equivalente a probar la siguiente $H_o: \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 5 + \beta_3 \cdot 3 = 8.5$. Como vimos en clase, esta hipótesis la podemos reescribir en la forma $R \cdot \beta = C$. En este caso únicamente tenemos una restricción y por tanto la martriz R tendrá dimensiones 1x3. En este caso tenemos $R := (0\ \ 5\ \ 3)$ y $C := 8.5$. Asi el F calculado esta dado por:

$$F_c = \frac{\dfrac{((C - R \cdot \beta hat))^T \cdot \left[R \cdot \left((X)^T \cdot X\right)^{-1} \cdot R^T\right]^{-1} \cdot (C - R \cdot \beta hat)}{r}}{s^2}$$

Donde:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix} \qquad s^2 = 10$$

Entonces tenemos que

$$F_c = \frac{\left[8.5-(0\ \ 5\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^T \cdot \left[(0\ \ 5\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \left[8.5-(0\ \ 5\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}{\frac{1}{10}}$$

$$F_c = 21.892$$

Este F_c lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(1,397)} = 3.865$. Claramente el F_c es mayor que el F de la tabla y por tanto hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula que $\beta_1 \cdot 0 + \beta_2 5 + \beta_3 \cdot 3 = 8.5$. Noten que este resulta implica que el asesor no tenia la razón.

b) El departamento de finanzas de esta cadena de almacenes desea conocer un rango para el valor promedio de las ventas diarias para poder efectuar la programación financiera del próximo trimestre. Si sabemos que existirán 4 ofertas diarias, 45 anuncios de prensa diarios y ningún reclamo, calcule el rango requerido por el departamento de finanzas (con un 95% de confianza).

Nota: Para hacer esta pregunta ustedes necesitaban hacer un poco de investigación, pues este tema aú no lo hemos cubierto.

El primer paso es encontrar la predicción para el valor promedio. Sabemos que dicha prediccción esta dada por

$$\hat{y}_p = x_p^T \hat{\beta}$$

Donde x_p es el vector de valores de las variables independienetes para los cuales queremos la predicción. Asi nuestra predicción para $x_p^T = (0\ \ 4\ \ 45)$ es

$$(0 \quad 4 \quad 45)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (53)$$

Además sabemos que la varianza de la predicción media esta dada por

$$Var\left(\hat{y}_p\right) = \sigma^2 x_p^T \left(X^T X\right)^{-1} x_p$$

Es decir,

$$10\cdot\left[(0 \quad 4 \quad 45)\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{400} & \frac{-1}{200} & \frac{1}{800} \\ \frac{-1}{200} & \frac{1}{160} & \frac{-1}{400} \\ \frac{1}{800} & \frac{-1}{400} & \frac{1}{800} \end{pmatrix}\cdot(0 \quad 4 \quad 45)^{\mathrm{T}}\right] = \frac{277}{16}$$

$$S_{\hat{y}_p}^2 = \frac{277}{16}$$

Así el un intervalo del 95% de confianza para nuestra predicción esta dada por

$$\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-k}\sqrt{S_{\hat{y}_p}^2} \qquad \text{con } t_{0.025,397} = 1.966$$

$$\left(53 - 1.966\cdot\sqrt{\frac{277}{16}}, 53 + 1.966\cdot\sqrt{\frac{277}{16}}\right)$$

Nota: Sino tenían una calculadora a la mano, esto era suficiente

$$(44.82, 61.18)$$

Entonces, el un intervalo del 95% de confianza para nuestra predicción es $(44.82, 61.18)$.