

Cienfi centro de
investigación
en economía
y finanzas



6^{ta}
Edición

Técnicas de
Medición
económica

Metodología y aplicaciones en Colombia

Eduardo Lora y Sergio I. Prada



8. MEDICIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD Y LAS FUENTES DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO

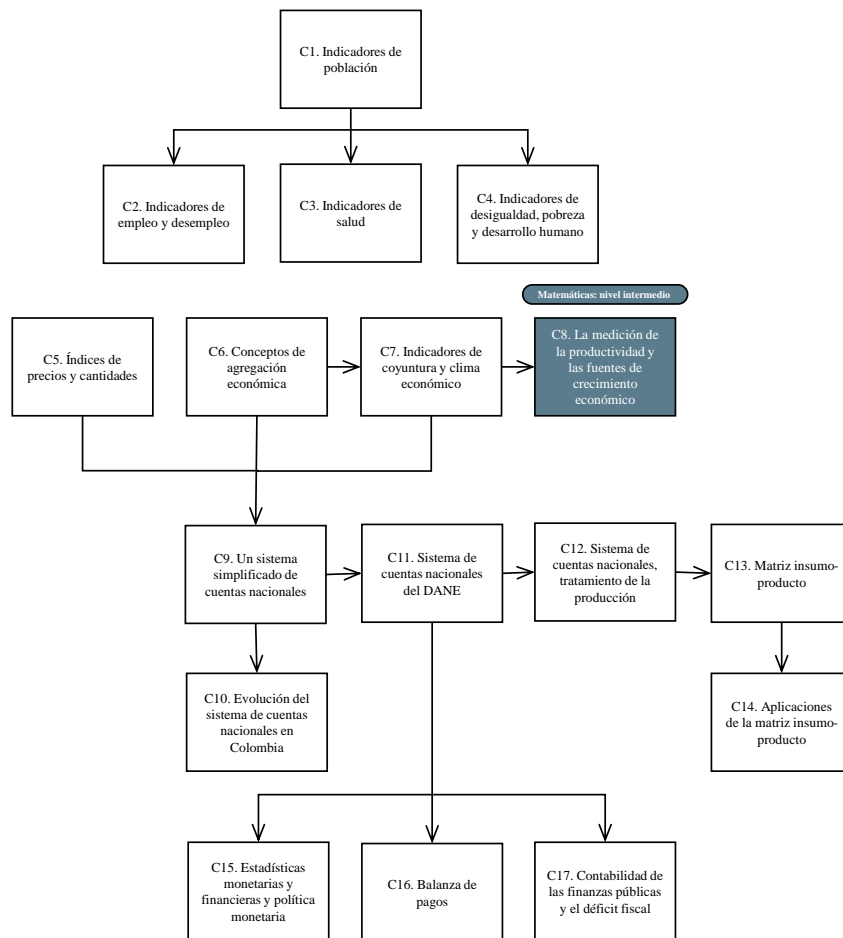
Objetivos del capítulo

Al finalizar este capítulo, el lector estará en capacidad de:

- Entender el concepto de *PIB* per cápita y poder utilizarlo en cálculos de crecimiento.
- Establecer la relación entre el *PIB* per cápita, la productividad media del trabajo y la relación capital-producto.
- Entender el concepto de contabilidad del crecimiento.
- Estar en capacidad de descomponer el crecimiento según las fuentes de demanda.
- Entender la descomposición del crecimiento según la acumulación de factores y la productividad total de los factores.
- Conocer los métodos actuales de medición de la productividad total de los factores.
- Entender el concepto de brecha del producto y estar en capacidad de hacer los cálculos.

Prerrequisitos: Capítulo 7 (Indicadores de coyuntura y clima económico).

Nivel de matemáticas requerido: intermedio.



El éxito económico de un país se mide, primero que todo, por su crecimiento económico. El crecimiento suele ser el objetivo número uno de las políticas económicas de cualquier país en desarrollo. Paradójicamente, sin embargo, sólo en la década del noventa la investigación económica empírica empezó a prestar la debida atención a los temas del crecimiento, en buena medida gracias al surgimiento de nuevas teorías sobre el tema. En este capítulo se estudian los indicadores y métodos más utilizados para medir la productividad y las fuentes del crecimiento económico, que son la materia prima básica que utilizan los estudios empíricos sobre crecimiento. A diferencia del capítulo de indicadores de coyuntura (Capítulo 7), donde el horizonte de análisis eran períodos cortos de meses o a lo sumo unos pocos años, los conceptos e indicadores que se estudian en este capítulo tienen más significado en el “mediano plazo”, es decir quinquenios y decenios. En la teoría del crecimiento económico el “largo plazo” es un período remoto e indefinido en el cual tienden a converger los ingresos de los países cuyas características estructurales son semejantes. Como, en palabras de John Maynard Keynes, “en el largo plazo todos estaremos muertos”, este libro prefiere no ocuparse de ese futuro remoto.

En la primera sección del capítulo se discute el significado del *producto per cápita* y su tasa de crecimiento como medidas para comparar los niveles de desarrollo económico y de crecimiento económico de los países en el mediano plazo. La segunda sección se detiene en la construcción e interpretación de algunos indicadores simples que sirven para medir el nivel tecnológico y de productividad. La tercera sección se ocupa de las técnicas tradicionales de “contabilidad” o descomposición de las fuentes del crecimiento. La cuarta se detiene en las metodologías más modernas de medir la productividad. La quinta y última sección introduce el concepto y los métodos de medición de la brecha del producto. Los ejercicios numéricos que se proponen al final de este capítulo exploran algunas de las posibilidades prácticas de las técnicas de medición de la productividad y las fuentes del crecimiento. Debido a que su solución requiere destreza en el manejo de tasas de crecimiento y elasticidades, como parte de este capítulo se ha agregado un apéndice matemático sobre el tema.

8.1 El producto per cápita

El *producto per cápita* es la medida más utilizada para comparar los niveles de desarrollo económico de los distintos países o de un país a través del tiempo:

$$\checkmark \text{ PIB}_{p.c.} = \frac{\text{PIB}}{\text{PT}}$$

donde el producto se mide por el *PIB* a valores de mercado en precios constantes (y de paridad de poder de compra si se trata de comparar distintos países) y *PT* es la población total. Calculando tasas exponenciales, o instantáneas de crecimiento, la tasa de crecimiento del *PIB per cápita*, π , es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento del producto, r , y la de la población, n ,

La tasa de crecimiento del producto per cápita es la diferencia entre el crecimiento del PIB y el crecimiento de la población total.

$$\sqrt{\pi = r - n}$$

Ejemplo 8.1

Suponga que entre 2019 y 2024 el *PIB* pasa de 854 a 995 billones de pesos (constantes del año 2015), mientras que la población pasa de 45 a 50 millones de personas. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento del *PIB* per cápita?

Hay varias formas de llegar al mismo resultado. La primera es calcular el *PIB* per cápita inicial y final y deducir la tasa de crecimiento a partir de la relación entre ambos:

$$PIB_{p.c.2019} = \frac{854 \times 10^{12}}{45 \times 10^6} = 18.977 \times 10^6$$

$$PIB_{p.c.2024} = \frac{995 \times 10^{12}}{50 \times 10^6} = 19.9 \times 10^6$$

$$\pi = \left(\frac{19.9}{18.977} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.00954$$

Un segundo método consiste en calcular directamente las tasas de crecimiento del *PIB* total y de la población y sacar la diferencia:

$$r = \left(\frac{995}{854} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.03200269$$

$$n = \left(\frac{50}{45} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.01070669$$

$$\pi = 0.031034 - 0.0212956 = 0.0097$$

Obsérvese que el resultado no es exactamente el mismo: la razón es que estamos usando tasas de crecimiento geométricas. Esto no ocurriría si hubiéramos usado tasas de crecimiento logarítmicas:

$$\pi = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{19.9}{18.889} \right) = 0.00950$$

$$\pi = \frac{1}{5} \left(\ln \left(\frac{995}{854} \right) - \ln \left(\frac{50}{45} \right) \right) = 0.00950$$

El producto per cápita se elevará siempre que el *PIB* crezca más de prisa que la población total, indicando que la economía ha mejorado su capacidad de atender las necesidades económicas de la población o, si se quiere, de proveer la

base económica para el bienestar de la población. Sin embargo, es importante señalar varias razones por las que el *PIB* per cápita es una medida deficiente del bienestar de la población. En primer lugar, el *PIB* no comprende algunas actividades que no pueden valorarse a través del mercado, tales como los servicios que las personas prestan en sus propios hogares. Esta limitación es importante cuando se comparan países con estructuras sociales muy diferentes.

En segundo lugar, no tiene en cuenta que muchas actividades productivas tienen efectos indeseables, como la contaminación o el ruido, que reducen el bienestar. En tercer lugar, tampoco tiene en cuenta que las necesidades que tienen los individuos en condiciones sociales o naturales distintas pueden ser muy diferentes (y lo mismo puede decirse del esfuerzo para obtener un mismo nivel de producto). Y, por último, por tratarse de una medida promedio, el *PIB* per cápita no tiene en cuenta la distribución y por tanto no es una medida representativa para quienes se apartan de ese promedio. Por consiguiente, el *PIB* per cápita es un mejor indicador de bienestar cuando se comparan momentos diferentes de un mismo país o región (siempre que no se hayan presentado cambios de importancia en la distribución del ingreso, la disponibilidad de recursos o las necesidades), que cuando se comparan países o regiones entre sí.

Por consiguiente, más que como un indicador de bienestar, el *PIB* per cápita debe verse como una medida de los resultados del esfuerzo económico, o del desarrollo económico, entendido como la capacidad de generar bienes y servicios. No obstante, como se observó en el Capítulo 6, no es la medida ideal, ya que por ser “bruta” incluye la depreciación del capital que no es un esfuerzo productivo atribuible al período corriente, y por ser calculada en valores de mercado, y no a costo de factores, incluye impuestos indirectos que no reflejan esfuerzo productivo. A pesar de estas deficiencias, es la medida que más se usa en la práctica por estar disponible y porque puede ser calculada con mayor precisión que otras medidas alternativas. Además, cuando se hacen comparaciones a través del tiempo o entre países, los problemas relacionados con la valoración a precios de mercado desaparecen, pues tales comparaciones deben hacerse siempre en precios comparables (sean éstos precios constantes en la moneda del país, o precios constantes de paridad de compra internacional, cuando se trata de comparaciones internacionales).

Puesto que hay una identidad entre producto e ingreso, el *PIB* per cápita se usa también como una medida del ingreso promedio por persona. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que este uso no es estrictamente correcto porque, como vimos en el Capítulo 6, no todo el *PIB* constituye ingreso para las personas (habría que deducir los impuestos indirectos netos de subsidios, la depreciación del capital fijo, los ingresos netos de factores del resto del mundo, las ganancias retenidas por las empresas y las percibidas por las empresas estatales, y habría que sumar las transferencias netas recibidas por las personas). En otras palabras, sería mejor usar el ingreso per cápita de los hogares (o el ingreso per cápita disponible de los hogares, si además se deducen los impuestos directos pagados por las personas). Además, cuando se quieren hacer comparaciones a través del

El PIB per cápita colombiano es el ingreso promedio de todos los colombianos, no el ingreso del colombiano promedio.

tiempo, lo que interesaría medir sería la capacidad de compra del ingreso per cápita, para lo cual habría que utilizar como deflactor no el índice de precios de toda la producción, sino el índice de precios del consumo o de la demanda (como se analiza en el Capítulo 5). A pesar de estas limitaciones, el crecimiento del *PIB* per cápita es una medida muy buena del crecimiento del ingreso per cápita en períodos largos, porque todos estos elementos de ajuste que hemos mencionado tienden a mantenerse constantes en el mediano plazo (por ejemplo, la depreciación o los impuestos netos son proporciones aproximadamente constantes del *PIB* a lo largo del tiempo y los índices de precios de la producción y del gasto tienden a moverse muy de cerca en el mediano plazo).

En conclusión, el *PIB* per cápita es la medida más utilizada para medir el desarrollo económico, entendiéndose por tal cosa la capacidad de generación de bienes y servicios por persona y, por asociación, la capacidad de generación de ingresos por persona. La tasa de crecimiento del *PIB* per cápita es una buena medida del ritmo al que mejora el nivel de desarrollo y el ingreso de la población en períodos largos, pero no necesariamente en períodos cortos. Como veremos en la sección siguiente, el *PIB* per cápita no es una buena medida de productividad porque no toda la población se dedica a actividades productivas.

Para medir el desarrollo económico en forma comparativa con otros países, el *PIB* per cápita puede expresarse como una proporción del *PIB* per cápita de otro país. Para que esta comparación tenga sentido, debe hacerse en precios constantes de paridad de compra internacional (véase el Capítulo 5). Con frecuencia se utiliza a Estados Unidos como comparador, puesto que siendo el país tecnológicamente más avanzado el *PIB per cápita relativo* así calculado indica la brecha frente a la frontera tecnológica mundial. Como esa frontera se desplaza, el *PIB* per cápita relativo a través del tiempo muestra si el país en cuestión está acercándose o alejándose de dicha frontera. La velocidad a la que se acerca a esa frontera es la *tasa de convergencia*, que es igual a la diferencia entre las tasas de mediano plazo de crecimiento del producto per cápita del país y de Estados Unidos.

8.2 Indicadores de productividad y dotación factorial

8.2.1 La productividad del trabajo

El indicador más simple de productividad es la relación entre el *PIB* y el número de trabajadores, L , o *productividad media del trabajo*:

$$\checkmark Q = \frac{PIB}{L}$$

Puesto que esta medida es una relación entre un flujo –una magnitud por período de tiempo– y un stock o acervo –una magnitud existente en un momento dado–, su valor depende de la longitud del período considerado. Por supuesto, la

productividad del trabajo es varias veces mayor por año que por mes. Usualmente, el período de medición de la productividad laboral es anual.

La productividad laboral puede expresarse con respecto al número de personas efectivamente ocupadas o con respecto a la fuerza de trabajo, es decir incluyendo también a los desempleados. Qué opción se tome influye, por supuesto, en la interpretación de los resultados, pero mantendremos en lo sucesivo la expresión genérica por brevedad (y por consiguiente, nos referiremos a L indistintamente como el número de trabajadores ocupados o como la fuerza de trabajo). Esta es una medida muy burda de productividad laboral, que puede ser refinada en diversos sentidos. Por ejemplo, puede tenerse en cuenta el número de horas de trabajo de cada individuo para obtener una medida de productividad laboral por hora. También pueden tenerse en cuenta las diferencias en los niveles de educación de los trabajadores aplicando algún ajuste que refleje, por ejemplo, que un trabajador que tiene educación universitaria equivale a más de un trabajador sin educación. La productividad laboral también puede ser calculada a distintos niveles de agregación sectorial o por regiones. En la sección siguiente exploraremos algunas de estas posibilidades.

Es importante tener presente que la productividad laboral no mide estrictamente el aporte que cada trabajador hace al producto total, porque ignora la existencia de otros factores productivos que también contribuyen a la producción. Por consiguiente, no debe confundirse con la productividad marginal del trabajo, que es una aproximación mejor a ese concepto de aporte al producto, siempre y cuando se cumplan algunos supuestos teóricos sobre el funcionamiento del mercado laboral. Eso explica también por qué la productividad laboral y el salario son cosas distintas, siendo usualmente mayor la productividad laboral que el salario.

Es importante entender, además, la relación entre el PIB per cápita y la productividad media del trabajo. Obsérvese que:

$$PIB_{p.c.} = \frac{PIB}{PT} = \frac{PIB}{L} \times \frac{L}{PET} \times \frac{PET}{PT}$$

por consiguiente:

$$\checkmark \quad PIB_{p.c.} = Q \times TO \times TET$$

Si L se refiere a trabajadores efectivamente ocupados, TO es la tasa de ocupación (de la población en edad de trabajar, como en el Capítulo 2, y TET es la proporción de la población total que está en edad de trabajar (proporción que está asociada al concepto de tasa de dependencia que se introdujo en el Capítulo 1). De esta manera, el PIB per cápita es el resultado combinado de la productividad media del trabajo, la tasa de ocupación y la estructura de edades de la población. A través del tiempo esto implica que:

$$\pi = q + o + e$$

Es decir que el crecimiento del producto per cápita, π , es el resultado del crecimiento de la productividad laboral, q , el crecimiento de la tasa de ocupación de la población en edad de trabajar, o , y el crecimiento de la participación de la población en edad de trabajar en la población total, e (nótese que e es también igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar y la tasa de crecimiento de la población total).

El crecimiento del PIB per cápita refleja sobre todo el comportamiento de la productividad laboral, pero está afectado también por los cambios en la tasa de ocupación.

Esto explica por qué el producto per cápita no es una medida de productividad. También explica por qué el crecimiento del producto per cápita sólo en parte se debe al aumento de la productividad laboral. En efecto, en las economías en desarrollo, ni la tasa de ocupación ni la composición por edades de la población son constantes a través del tiempo. En las etapas tempranas de desarrollo la tasa de ocupación cae, y luego aumenta en forma continua. Esta forma de U se debe a que con el proceso de urbanización que acompaña a las primeras etapas del desarrollo se reduce la participación laboral de la mujer, pero luego aumenta en la medida en que se eleva la educación femenina y se reduce la fertilidad, permitiendo a las mujeres incorporarse más a la vida laboral. Por su parte, la participación de la población en edad de trabajar en la población total tiende a caer también en las primeras etapas al bajar la mortalidad infantil, pero luego aumenta gradualmente a medida que avanza el proceso de transición demográfica (aunque al final de ese proceso vuelve a caer cuando aumenta la población mayor).

Ejemplo 8.2

Suponga nuevamente que entre 2019 y 2024 el *PIB* pasó de 854 a 995 billones de pesos (constantes del año 2015) y que la población en edad de trabajar aumentó de 40 a 50 millones de personas. Tenga ahora en cuenta que la población en edad de trabajar pasó del 76.4% al 77.8% de la población total, y que la tasa de ocupación se redujo de 57.7% a 57.4%. ¿A qué tasa cambió la productividad del trabajo?

La tasa de crecimiento de la productividad del trabajo es, a partir de la última ecuación:

$$q = \pi - o - e$$

Por consiguiente

$$q = \frac{1}{5} \left(\ln \left(\frac{19.9}{18.977} \right) - \ln \left(\frac{0.574}{0.577} \right) - \ln \left(\frac{0.778}{0.764} \right) \right)$$

$$q = 0.0067$$

Observe que esta tasa es menor de la de crecimiento del producto per cápita. ¿Entiende por qué?

Deduzca cómo calcular la tasa de crecimiento de la productividad laboral a partir del *PIB* y la población ocupada y haga los cálculos para comprobar que obtiene el mismo resultado.

8.2.2 La relación capital-producto

Como se ha mencionado, la productividad media del trabajo no mide el aporte de cada trabajador al producto total, porque otros factores productivos también contribuyen a la generación del producto. De la misma forma y haciendo la misma advertencia, podría hablarse de la productividad media del capital como la relación entre el *PIB* y el acervo de capital. Esta relación, sin embargo, se usa más en sentido opuesto, es decir como el cociente entre el acervo del capital existente en la economía, K , y el nivel de producción, PIB ,

$$\checkmark k = \frac{K}{PIB}$$

La *relación capital-producto* puede interpretarse de dos formas. Primero, como una medida que permite saber qué cantidad de producto puede obtenerse con un acervo de capital. Esta interpretación requiere tener en cuenta el nivel de utilización del capital, de manera que la obtención de una cantidad de producto por debajo del potencial significa que el capital no es utilizado a plena capacidad (en forma análoga a lo que ocurre con el desempleo cuando se trata de la productividad laboral). La interpretación alternativa, de relevancia para análisis prospectivos, es considerar la relación capital-producto como un indicador de la cantidad de capital requerido para obtener un cierto nivel de producción. Para este propósito, tiene más sentido utilizar la *relación marginal capital-producto* que compara el incremento en el acervo de capital con el aumento en la producción en un período:

$$\checkmark k' = \frac{\Delta K}{\Delta PIB}$$

donde ΔK , que simboliza la nueva formación de capital es, por definición, lo mismo que la inversión neta de la economía en el período. (Por supuesto, si la relación capital-producto puede suponerse constante a través del tiempo, entonces será igual a la *relación marginal capital-producto*). Con esta segunda interpretación la relación capital-producto era un concepto clave en los ejercicios de planificación económica de décadas pasadas, pero ha entrado en desuso porque ha quedado demostrado que no hay una forma confiable de medir los requerimientos de capital por unidad de producto a nivel agregado.

La medición del acervo de capital presenta algunas dificultades. Como el capital existente en un momento dado es la acumulación de bienes producidos en diferentes períodos pasados, pero a precios diferentes en cada período, no sería correcto calcular su valor actual simplemente como la suma del valor de los bienes de capital producidos en el pasado. Es preciso, por tanto, eliminar las variaciones de los precios utilizando los métodos explicados en el Capítulo 5. Se debe deducir, además, el desgaste físico del capital en cada período en el pasado y la obsolescencia del capital remanente, cálculos que son difíciles en la práctica (de hecho, en las cuentas nacionales de Colombia no se calcula la depreciación del capital, como veremos en otros capítulos). Un método que se usa comúnmente consiste en aplicar una tasa fija de depreciación al stock de capital del período pasado y agregarle la inversión bruta, obteniendo así un estimado del *stock* del período siguiente, y así sucesivamente.

La relación marginal capital - producto es una medida de la cantidad de capital adicional que se requiere para generar una unidad adicional de producto.

La relación capital-producto y la productividad por trabajador están relacionadas entre sí por medio de la *relación capital-trabajo*, como puede verse en la siguiente expresión:

$$\sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{K}{PIB} \times \frac{PIB}{L}$$

Este coeficiente es un indicador tecnológico de la dotación media de capital por trabajador y puede interpretarse también como una medida de los requerimientos promedio de capital por trabajador (con las mismas salvedades mencionadas con respecto a la relación capital-producto).

8.3 Contabilidad del crecimiento económico y la productividad

Por contabilidad del crecimiento económico puede entenderse cualquier método de descomposición de los elementos que contribuyen directamente al crecimiento del *PIB*. En esta sección se presentan las bases matemáticas de la tradicional contabilidad del crecimiento, introducida por Robert Solow en la década de 1950. En la siguiente sección veremos los métodos que se utilizan en la actualidad. Para facilitar la lectura de estas dos secciones se sugiere familiarizarse primero con el Apéndice de este capítulo.

8.3.1 Descomposición del crecimiento por las fuentes de demanda agregada

Para empezar, se puede tener una contabilidad del crecimiento a partir de los componentes o *fuentes de la demanda agregada*. Se puede partir de:

$$Y = C + I + G + X - M$$

entonces:

$$\Delta Y = \Delta C + \Delta I + \Delta G + \Delta X - \Delta M$$

dividiendo ambos lados por Y , y multiplicando y dividiendo cada elemento del lado derecho por su valor inicial:

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{\Delta C}{C_0} \times \frac{C_0}{Y_0} + \frac{\Delta I}{I_0} \times \frac{I_0}{Y_0} + \frac{\Delta G}{G_0} \times \frac{G_0}{Y_0} + \frac{\Delta X}{X_0} \times \frac{X_0}{Y_0} - \frac{\Delta M}{M_0} \times \frac{M_0}{Y_0}$$

lo que también puede escribirse como:

$$\dot{Y} = \dot{C} \times c_0 + \dot{I} \times i_0 + \dot{G} \times g_0 + \dot{X} \times x_0 - \dot{M} \times m_0$$

donde el símbolo $\dot{}$ encima de una variable representa tasa de variación, y las letras en minúscula son las participaciones (iniciales) de los componentes de demanda en el *PIB*.

En esta descomposición, la contribución de cada fuente de demanda agregada al crecimiento total es el producto del crecimiento de dicha fuente por su participación en la demanda agregada total. Es importante notar, sin embargo, que se trata de una mera descomposición contable, no de una *explicación causal* del crecimiento. Por ejemplo, sería un error creer que aumentando el gasto público (G) puede conseguirse aumentar el *PIB* en igual cantidad. Ello sólo ocurriría si no cambia ningún otro componente de la demanda al cambiar el gasto público y si no hay restricciones que impidan el aumento del producto. En general, ése no es el caso, y es posible que el *PIB* crezca más o menos, e incluso que caiga, cuando aumenta el gasto del gobierno. Por supuesto, este es uno de los temas centrales de la macroeconomía, pero no es el objeto de este libro. La descomposición con base en la demanda es, en todo caso, la base de algunas teorías macroeconómicas muy elementales (véanse los ejercicios al final de este capítulo).

La contribución de cada fuente de demanda agregada al crecimiento económico total es el producto del crecimiento de dicha fuente por su participación en la demanda agregada total.

8.3.2 Descomposición del crecimiento por acumulación de factores y productividad

Un método de descomposición de las fuentes del crecimiento que fue muy utilizado en el siglo pasado es el que se basa no en las fuentes de demanda, sino en los factores productivos. Este método tiene más contenido teórico (es decir, más supuestos de comportamiento de la economía) que la descomposición anterior. Este método supone que existe una función de producción agregada que relaciona el producto con las cantidades utilizadas de los factores productivos. Este supuesto es una simplificación de la realidad que puede ser problemática, como mencionaremos en la próxima sección. La *función de producción* que suele suponerse es la *Cobb-Douglas*, debido en parte a la facilidad con que puede manipularse matemáticamente, y en parte a que se creía que una de sus propiedades reflejaba relativamente bien la realidad (en un momento veremos cuál es esa propiedad):

$$\checkmark Y = AK^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

donde K representa el acervo de capital, L la fuerza de trabajo o el número de ocupados, y A es un parámetro de eficiencia que refleja la productividad con la que se usan esos factores productivos, es decir es una medida de la *productividad total de los factores*, *PTF*. La conveniencia matemática de esta expresión resulta de que cuando se toman logaritmos naturales a ambos lados, tal que:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L$$

y luego se deriva totalmente (es decir, se toman los cambios respecto al tiempo),

$$\partial \ln Y = \partial \ln A + \alpha \partial \ln K + (1 - \alpha) \partial \ln L$$

entonces se obtiene una expresión muy simple que dice que el crecimiento económico g (que, medido en tasa de crecimiento continuo es lo mismo que $\partial \ln Y$) resulta del crecimiento de la productividad total de los factores, α , más el promedio ponderado del crecimiento de los dos factores productivos:

$$\checkmark g = a + \alpha \dot{K} + (1 - \alpha) \dot{L}$$

El crecimiento económico

puede descomponerse en la contribución del capital, la contribución del trabajo y el crecimiento de la productividad total de factores.

La propiedad interesante desde el punto de vista económico es que los coeficientes de ponderación α y $(1 - \alpha)$ representan la participación en el ingreso del capital y el trabajo, respectivamente (véanse los ejercicios).

En una función Cobb-Douglas, esos coeficientes de ponderación son constantes. Pues bien, resulta que, históricamente, la participación del trabajo (o del capital) en el ingreso era bastante estable en el tiempo (en los países desarrollados para los

que se tenía buena información), constituyendo un “hecho estilizado” aceptado por los economistas. Sin embargo desde la década de 1970 la participación del trabajo en el ingreso ha caído fuertemente en casi todo los países desarrollados, poniendo en cuestión la validez de la función Cobb-Douglas. Aun así, la descomposición de las fuentes del crecimiento que acabamos de explicar siguió usándose casi universalmente hasta fines del siglo pasado.

Ejemplo 8.3

Suponiendo que la participación del trabajo en el producto es 40%, descomponga el crecimiento promedio anual según sus fuentes sabiendo que entre 2014 y 2024 el *PIB* creció 30%, la fuerza de trabajo 18% y el capital 35%.

Aplicando la última ecuación, esto implica que

$$0.30 = a + 0.6 \times 0.35 + 0.4 \times 0.18$$

De donde se deduce que el aporte de la productividad (α) fue 0.018, el del capital 0.21 y el del trabajo 0.072. Puesto que nos piden tasas anuales y fueron 10 años, utilizando tasas continuas (es decir, tomando logaritmos naturales de $1 + \text{variación}$ entre los dos períodos y dividiendo por 10), obtenemos lo siguiente:

$$0.026236 = 0.001784 + 0.019062 + 0.006953$$

Por consiguiente, el crecimiento anual de 2.62% se descompone en 0.18% debido a la productividad, 1.91% debido al capital y 0.70% debido al trabajo. (Sugerencia: reproduzca los cálculos en una hoja de Excel y hágalos de nuevo con tasas de crecimiento geométricas).

Obsérvese ahora algo curioso, pero fundamental. Si el crecimiento del producto fuera distribuido completamente en aumentos del ingreso para el capital y el trabajo de acuerdo con sus ponderaciones relativas y el aumento en sus cantidades, no quedaría sobrando nada. Pero nuestra última expresión y el Ejemplo 8.3 dicen que sí puede quedar sobrando algo: el crecimiento de la productividad total de los factores, a . A este sobrante se le conoce con el nombre de residuo de Solow, por Robert Solow, el creador de la contabilidad del crecimiento a partir de los factores de producción.

Una limitación del método sencillo de descomposición que hemos presentado es que no diferencia entre tipos de mano de obra. La productividad de un trabajador altamente calificado debe ser mayor que la de un trabajador analfabeto, y eso debería reflejarse en la forma de hacer las cuentas. Una forma simple de resolver el problema es introducir un factor H que mide el número promedio de años de educación de la fuerza de trabajo (o el capital humano por persona), de forma que el producto de la economía sería:

La productividad total de los factores suele calcularse por residuo.

$$\checkmark Y = AK^\alpha(L \times H)^{(1-\alpha)}$$

Y la descomposición del crecimiento sería ahora el resultado del aumento de la productividad, el aumento del capital físico, el aumento de la oferta laboral y el aumento de la educación de la mano de obra:

$$\checkmark g = a + \alpha\dot{K} + (1 - \alpha)\dot{L} + (1 - \alpha)\dot{H}$$

8.3.3 Descomposición del crecimiento de la productividad laboral

Una forma alternativa de expresar la función Cobb-Douglas es

$$Y = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha L$$

De donde se sigue que la productividad por trabajador es

$$\checkmark \frac{Y}{L} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$$

Por consiguiente el crecimiento de la productividad laboral (q) puede verse como el resultado del crecimiento en la productividad total de los factores (α) y el crecimiento de la relación capital-trabajo elevado por el parámetro α :

$$\checkmark q = a + \left(\frac{\dot{K}}{L} \right) \times \alpha$$

Otro método de descomposición de la productividad laboral que es importante entender se basa en el origen sectorial de la producción. Considérese una economía compuesta por un sector productivo tradicional (T) y uno moderno (M). La productividad laboral promedio en esa economía es, por definición, el promedio ponderado de las productividades laborales de los dos sectores, donde las ponderaciones t y m son la participación de la fuerza laboral de cada sector en la fuerza laboral total:

$$\frac{Y}{L} = t \left(\frac{Y}{L} \right)_t + m \left(\frac{Y}{L} \right)_m$$

Por consiguiente, el cambio de la productividad laboral de esta economía será:

$$\Delta \left(\frac{Y}{L} \right) = \Delta t \left(\frac{Y}{L} \right)_t + t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t + \Delta t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t + \Delta m \left(\frac{Y}{L} \right)_m + m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m +$$

$$\Delta m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m$$

Puesto que $\Delta t = -\Delta m$ (ya que la participación que gana un sector la pierde el otro), podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \checkmark \Delta \left(\frac{Y}{L} \right) &= \Delta m \left(\left(\frac{Y}{L} \right)_m - \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right) + \left(m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m + t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right) + \\ &\Delta m \left(\Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m - \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right) \end{aligned}$$

Así, el cambio en la productividad laboral total es el resultado de tres sumandos, que miden, respectivamente, la reasignación de la fuerza de trabajo del sector tradicional hacia el sector moderno, los aumentos de productividad dentro de cada uno de los dos sectores y la interacción entre la reasignación laboral y los aumentos de productividad.

Este análisis puede generalizarse a más sectores. En las economías de muy bajo nivel de desarrollo los aumentos en la productividad promedio del trabajo ocurren, en su mayor parte, por reasignación entre sectores (el primer sumando), mientras que en las economías más maduras se originan en aumentos de productividad dentro de los sectores (el segundo sumando). En ambos casos, el tercer sumando es de menor importancia.

8.4 Métodos actuales de medición de la productividad

Actualmente, hay dos métodos de medición de la productividad total de los factores (*PTF*). En el primero, la *PTF* sigue siendo un residuo, como en la tradicional contabilidad del crecimiento. En el segundo, la *PTF* no es un residuo, sino una medida de productividad relativa a otro país (usualmente Estados Unidos). Ninguno de los dos requiere el supuesto de que haya una función de producción agregada.

El primer enfoque lo utiliza la OECD y un conjunto de países asociados en la organización KLEMS, en la cual está Colombia. También una organización privada, “*The Conference Board*” utiliza este enfoque con algunas diferencias menores y una mayor cobertura de países. La productividad no es una variable que se pueda medir en forma sencilla, a menos que se trate de coeficientes entre variables simples (por ejemplo, toneladas de algún producto agrícola por hectárea de tierra) o que se suponga que el *PIB*, el trabajo y el capital son variables homogéneas, que pueden tratarse como si fueran variables simples, como se hacía en la contabilidad del crecimiento tradicional.

Una forma de medir la productividad en actividades complejas consiste en valorar por medio de índices, tanto el numerador como el denominador, lo cual requiere usar algún método de ponderación (véase el capítulo 5). Por requerir el uso de índices, en este primer enfoque la productividad total de los factores sólo puede analizarse por los cambios de un período a otro, no por los niveles en un momento dado del tiempo.

El concepto de cambio en la productividad total de los factores de este enfoque es intuitivo en principio: es la parte del crecimiento del producto total que no puede explicarse por el crecimiento del trabajo y del capital. Los cálculos se hacen por sector y luego se agregan para toda la economía. Para cada sector j , el aumento de la productividad total de los factores en el período t es:

$$\Delta PTF_{j,t} = \Delta \ln Y_{j,t} - \bar{v}_{j,t}^L \Delta \ln L_{j,t} - \bar{v}_{j,t}^K \Delta \ln K_{j,t}$$

donde la contribución del trabajo L (o el capital K) a la tasa de crecimiento del producto total Y (recuérdese que el cambio de una variable en logaritmos es aproximadamente su tasa de crecimiento) se mide como la tasa de crecimiento del trabajo utilizado efectivamente en la producción $\Delta \ln L_{j,t}$ (o el capital $\Delta \ln K_{j,t}$), multiplicado por la participación del costo laboral $\bar{v}_{j,t}^L$ (o del capital $\bar{v}_{j,t}^K$) en los costos totales de producción, en promedio entre el año t y el año anterior. La cuestión se complica en la práctica por el hecho de que hay diferentes calidades de trabajo y de capital. Para el trabajo, se considera que la participación de cada tipo de trabajo l en las remuneraciones laborales totales del sector j (o sea $\bar{v}_{l,j,t}$) refleja la calidad de las horas de trabajo de ese tipo (que los trabajadores ponen a disposición de las empresas). Por consiguiente, la tasa de crecimiento del factor trabajo es un promedio ponderado de las tasas de crecimiento de los distintos tipos de trabajo ($\Delta \ln H_{j,l,t}$), donde las ponderaciones son las participaciones en la remuneración laboral total del sector ($\bar{v}_{l,j,t}$):

$$\Delta \ln L_{j,t} = \sum_l \bar{v}_{l,j,t} \Delta \ln H_{j,l,t}$$

De esta manera, en cada sector la tasa de crecimiento del factor trabajo tiene en cuenta los cambios de composición del trabajo según sus calidades. En principio, este mismo método se aplica al capital:

$$\Delta \ln K_{j,t} = \sum_k \bar{v}_{k,j,t} \Delta \ln S_{j,k,t}$$

donde, en vez de horas de trabajo de cada tipo, se tienen los servicios de capital de cada tipo k que usan las empresas del sector j . El problema que surge aquí es que no hay cómo medir en forma directa el costo de los servicios de capital (que, al menos en teoría, los dueños de capital ponen a disposición de las empresas). Es importante tener presente que las utilidades de las empresas no son lo mismo que

el costo de uso del capital: las utilidades puras son el rendimiento que obtienen las empresas, una vez han pagado el costo de uso del trabajo y del capital.

Aparte de que es difícil medir las utilidades puras, no es del todo claro qué se estaría midiendo exactamente con este primer enfoque de la *PTF*. Como lo dice la misma OECD (2021a): “Tradicionalmente, el crecimiento de la productividad multi-factorial (PMF) se considera una medida del cambio técnico, pero... en la práctica, la PMF solo captura el cambio técnico no incorporado [en alguno de los factores productivos], como son los efectos de red o efectos indirectos de los factores de producción, los efectos de mejores prácticas de gestión, cambios organizacionales y mejoras en la base de conocimientos. Además, la PMF recoge otros factores, como los costos de ajuste, las economías de escala, los efectos de la competencia imperfecta, las variaciones en la utilización de la capacidad (si no se capturan por las medidas de entrada de capital) y los errores en la medición de la producción, los insumos y sus ponderaciones.”

El segundo método para estimar la productividad total de los factores es el utilizado por *Penn World Table (2021)*. En este método se mide la productividad de un país relativa a otro país mediante un índice que combina dos situaciones hipotéticas: que ambos países tuvieran la misma dotación de factores con sus propias “tecnologías” y que ambos utilizaran las mismas “tecnologías” con sus propias dotaciones de factores. Estas situaciones hipotéticas no son observables, pero el índice resultante puede construirse con algunos supuestos teóricos sobre las propiedades de las funciones que relacionan los factores productivos con la cantidad de producto. El índice resultante es el índice de cantidades de Törnqvist para el país i en relación con el país j en un momento del tiempo:

$$\ln Q_{ij}^T = \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_j) \ln \frac{K_i}{K_j} + \left[1 - \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_j) \right] \ln \frac{L_i}{L_j}$$

donde α es la elasticidad producto del capital (que se supone igual a la participación de los ingresos del factor capital en el PIB). Sin embargo, a diferencia de lo que se hacía tradicionalmente con la función Cobb-Douglas, en este enfoque no es necesario suponer que todos los países (o que a través del tiempo) las participaciones de los factores en el producto sean constantes. A partir de este índice, la productividad total de los factores de un país con respecto al otro es:

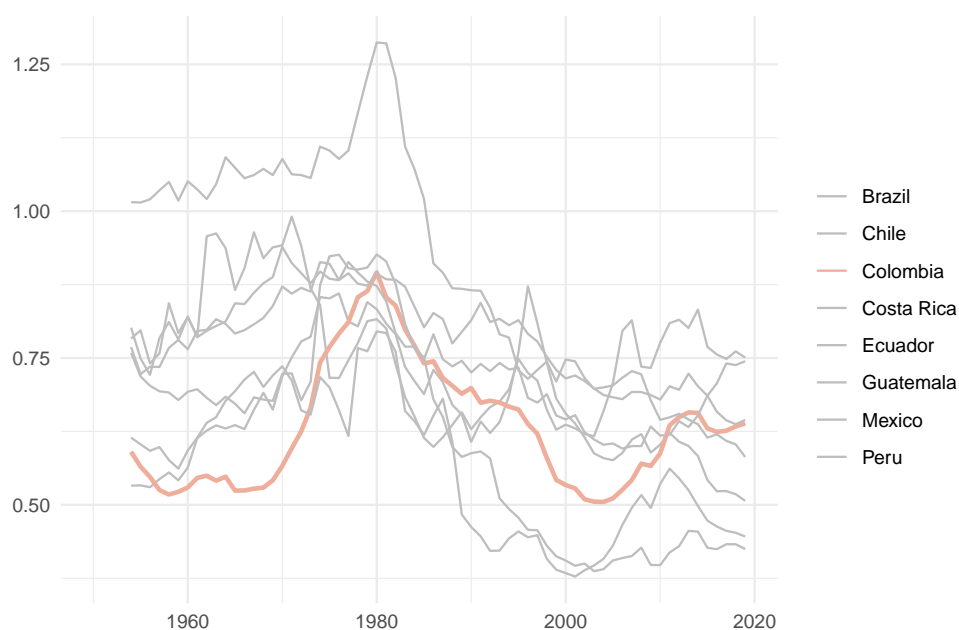
$$PTF_{i,j} = \frac{\frac{PIB_i}{PIB_j}}{Q_{ij}^T}$$

Estas dos ecuaciones pueden también usarse para comparar un mismo país en dos momentos del tiempo (como si fueran dos países). Para hacer las estimaciones, en *Penn World Table* se calculan series de capital de K y L , donde K es el acervo de capital estimado con el método de acumulación depreciada de las inversiones pasadas de los distintos tipos de capital (en precios de paridad de poder de compra) y donde L es el capital humano, que resulta de elevar

exponencialmente el número de ocupados por el rendimiento de los años de escolaridad. Es discutible esta forma de ajustar el empleo, ya que el rendimiento de los años de escolaridad es una medida bastante deficiente del aprendizaje y su efecto sobre la productividad.

En el Gráfico 8.1 se presenta la PTF para algunos países latinoamericanos en 2019 según este segundo método (este gráfico puede verse de manera interactiva en la versión HTML del libro).

Gráfico 8.1
Productividad total de los factores relativa a Estados Unidos en los países latinoamericanos de 1954 a 2019



Fuente: Penn World Tables

8.5 La brecha del producto

Por lo general, la economía va y viene entre momentos donde la actividad productiva es dinámica (auges) y épocas donde la producción se desacelera o cae (recesiones). Este comportamiento en forma de péndulo se conoce como el ciclo económico. La mayoría de las decisiones de política macroeconómica dependen del momento del ciclo en el que se encuentra la economía. Las decisiones que se toman durante una época de auge son muy diferentes a las que se toman

en momentos de recesión. Por esta razón es muy importante contar con varias medidas del ciclo económico. La brecha del producto es una de estas medidas.

Tal como hemos visto a lo largo de este capítulo, la producción agregada de un país puede verse como el resultado del aprovechamiento de los factores de producción (trabajo y capital). Entre mayor sea la cantidad y calidad de los factores de producción y la eficiencia con que se usen, mayor es la producción agregada que podría llegar a alcanzar una economía. Esta es la explicación económica de las distintas medidas de productividad total de los factores que hemos presentado en las secciones anteriores. Sin embargo, no hemos tenido en cuenta que, en cualquier momento, puede ocurrir que no se estén usando efectivamente todos los factores de producción disponibles con la intensidad con la que podrían usarse en condiciones normales.

Para entender mejor la brecha que puede aparecer entre la cantidad de factores de producción disponibles en condiciones normales y el uso efectivo de los factores, piense en una mina de carbón. La cantidad de carbón que puede extraer esta mina depende del número de excavadoras y el número de empleados que tenga a su disposición. En condiciones económicas normales, la mina opera con un único turno de producción y las excavadoras funcionan durante ocho horas al día. Ahora, imagine que la economía entra en una fase de auge económico y la mina está interesada en aumentar su producción de carbón. Para hacerlo, puede implementar un segundo turno de trabajo para que las excavadoras funcionen durante 16 horas al día. Por el contrario, piense ahora que la economía entra en una fase de recesión económica que obliga a la mina a reducir su producción. Es posible que el turno de trabajo se reduzca a cuatro horas diarias. Sin que haya cambiado el número de excavadoras o el número de trabajadores, esos recursos productivos se usan con intensidades muy distintas en las distintas circunstancias que hemos descrito.

Tanto para la mina de la que estamos hablando como para el agregado de toda la economía, se puede pensar en una descomposición de la producción en dos partes: una fracción que está determinada por la cantidad de factores de producción disponibles y otra que depende del uso efectivo de tales factores. La primera de estas fracciones se denomina producto potencial y la segunda se llama producto cíclico, es decir:

$$\checkmark Y = Y^{POTENCIAL} + Y^{CÍCLICO}$$

$Y^{POTENCIAL}$ es el valor del producto agregado que se obtiene si los factores de producción se utilizan bajo circunstancias económicas normales. En cambio, $Y^{CÍCLICO}$ es el efecto sobre el producto agregado debido a la sobreutilización o subutilización de los factores de producción. Esto quiere decir que el uso efectivo de los factores de producción depende del momento del ciclo económico en el cual se encuentra la economía. Durante auges económicos, los factores de producción son sobreutilizados y el efecto del producto cíclico es positivo. Nótese que en

tales circunstancias, el producto agregado es mayor que el producto potencial ($Y > Y^{POTENCIAL}$). En cambio, cuando la economía atraviesa una época de desaceleración o recesión económica, los factores de producción son subutilizados y el efecto del producto cíclico es negativo. Por lo tanto, durante dichas épocas el producto agregado es menor que el producto potencial ($Y < Y^{POTENCIAL}$).

La brecha del producto es la distancia relativa entre el PIB observado y el PIB potencial.

La brecha del producto mide la distancia entre el producto agregado observado y el producto agregado potencial. Por definición,

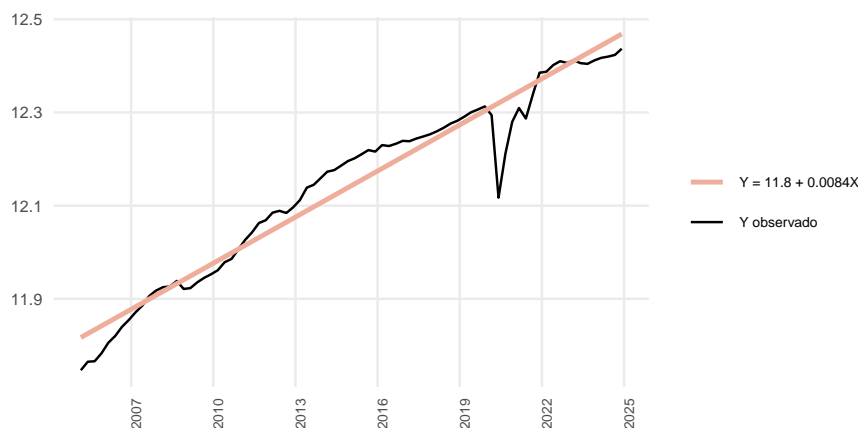
$$\checkmark \text{ Brecha} = \frac{1 - Y^{POTENCIAL}}{Y^{POTENCIAL}} \times 100 = \frac{Y^{CÍCLICO}}{Y^{POTENCIAL}} \times 100$$

es decir, la brecha del producto corresponde al producto cíclico medido como proporción del producto potencial. Dado que el producto cíclico puede ser positivo o negativo, la brecha del producto también puede ser positiva o negativa.

El principal reto metodológico para calcular la brecha del producto consiste en obtener una medida del producto potencial. El producto agregado observado (Y) corresponde al producto interno bruto a precios constantes del sistema de cuentas nacionales. Sin embargo, tanto el producto cíclico como el producto potencial son variables económicas que no se pueden medir de forma directa. Por lo tanto, es necesario estimar por medio de algún procedimiento econométrico el producto potencial. Una vez estimado, el producto cíclico se calcula como el residuo entre el producto observado y el potencial.

Una forma elemental de calcular el producto potencial consiste en estimar una línea de tendencia del PIB (en logaritmos), como se presenta en el Gráfico 8.2 (este gráfico puede verse de manera interactiva en la versión HTML del libro). El uso de logaritmos permite interpretar la pendiente de la línea de tendencia como la tasa de crecimiento trimestral promedio del período: 0,84%. Nótese que esta es la tasa trimestral de crecimiento porque los datos son trimestrales.

Gráfico 8.2
Producto agregado observado y potencial para Colombia
(billones de pesos constantes de 2015 en logaritmos)



Fuente: DANE. Cálculos propios

Ejemplo 8.4 – Cálculo del producto cíclico y brecha del producto.

A continuación aparecen el producto observado y el producto potencial de Colombia para los primeros trimestres entre 2005 y 2024pr (utilizando la misma información del Gráfico 8.2, expresada en billones de pesos constantes de 2015, no en logaritmos).

Cuadro 8.1
Producto observado y producto potencial de Colombia
(trimestral, 2005-2021pr en billones de pesos constantes de 2015)

Periodo	Producto Interno Bruto	Producto potencial
2019 I	217,706	215,098
2020 I	218,463	222,310
2021 I	221,815	229,764
2022 I	239,801	237,469
2023p I	245,756	245,431
2024pr I	247,028	253,660

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales Trimestrales. Cálculos propios.

Con la información anterior, se puede calcular el producto cíclico aplicando la fórmula:

$$Y^{CÍCLICO} = Y - Y^{POTENCIAL}$$

Y, a partir de ahí, se puede calcular la brecha del producto con la ecuación:

$$Brecha = \frac{Y^{CÍCLICO}}{Y^{POTENCIAL}} \times 100$$

Los resultados son:

Cuadro 8.2
Resultados del cálculo del producto cíclico y la brecha del producto

Año-Trimestre	Producto observado	Producto potencial	Producto cíclico	Brecha del producto
2005 I	126,352	135,554	-9,202	-6.8 %
2006 I	134,003	140,099	-6,096	-4.4 %
2007 I	143,099	144,797	-1,697	-1.2 %
2008 I	150,997	149,652	1,346	0.9 %
2009 I	150,707	154,669	-3,962	-2.6 %
2010 I	156,584	159,856	-3,271	-2 %
2011 I	167,135	165,216	1,919	1.2 %
2012 I	177,193	170,755	6,438	3.8 %
2013 I	182,044	176,481	5,563	3.2 %
2014 I	193,494	182,398	11,095	6.1 %
2015 I	199,133	188,514	10,618	5.6 %
2016 I	204,860	194,835	10,025	5.1 %
2017 I	206,566	201,368	5,198	2.6 %
2018 I	210,994	208,120	2,874	1.4 %
2019 I	217,706	215,098	2,608	1.2 %
2020 I	218,463	222,310	-3,847	-1.7 %
2021 I	221,815	229,764	-7,949	-3.5 %
2022 I	239,801	237,469	2,333	1 %
2023p I	245,756	245,431	326	0.1 %
2024pr I	247,028	253,660	-6,632	-2.6 %

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales Trimestrales. Cálculos propios.

De esta manera puede calcularse la brecha del producto en un momento cualquiera. Esta medición es de suma importancia para la política monetaria, porque las presiones inflacionarias tienden a ser mayores entre mayor sea la brecha del producto. Es lógico: los mineros de los que empezamos hablando en esta sección podrán exigir mayores salarios cuando la mina está operando a toda marcha. La política monetaria tendrá esto en cuenta para tratar de “enfriar” la economía si está “recalentada”, es decir si está produciendo más de lo que podría hacerlo en condiciones normales. En estas condiciones, es muy posible que el Banco de la República suba la tasa de interés, para que disminuya el crédito y la demanda agregada, como veremos en el Capítulo 15.

8.6 Apéndice: Tasas de crecimiento y elasticidades

En este apéndice se ofrecen algunas reglas prácticas para el manejo de tasas de crecimiento en expresiones que contienen más de una variable. Una demostración formal supera el alcance de este libro. Se remite al lector interesado en un tratamiento más riguroso a cualquiera de los libros de texto de matemáticas citados en la bibliografía al final del capítulo.

8.6.1 Tasas de crecimiento de productos y cocientes

Para resolver muchos problemas económicos es conveniente contar con un método de cálculo de la *tasa de crecimiento de un producto o un cociente* a partir de las tasas de crecimiento de las variables involucradas. Supóngase que el PIB ha sido definido (tautológicamente) como el producto de la productividad media por trabajador, Q por el número de trabajadores, L ,

$$PIB = Q \times L$$

Se trata de determinar la tasa de crecimiento del PIB a partir de las tasas de crecimiento de Q y L . El procedimiento general que se sigue para deducir el método de cálculo es el siguiente:

1. Se deriva totalmente la expresión,

$$\partial PIB = L\partial Q + Q\partial L$$

2. Se divide cada lado de esta ecuación por el respectivo lado de la ecuación original

$$\frac{\partial PIB}{PIB} = \frac{L\partial Q}{QL} + \frac{Q\partial L}{QL}$$

3. Se simplifican los términos del lado derecho y se tiene así el resultado buscado:

$$\checkmark \frac{\partial PIB}{PIB} = \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial L}{L}$$

La tasa de crecimiento de un producto es, por tanto, la suma de las tasas de crecimiento de los factores (nótese que como no estamos usando subíndices de tiempo, aquí y en lo sucesivo las variables en niveles, que aparecen en este caso en el denominador, se refieren al período inicial). Este método sólo es estrictamente exacto cuando las diferencias son de un tamaño infinitesimal y, en consecuencia, corresponden a las derivadas de las variables. Con diferencias de tamaños finitos, se tendría que

$$\Delta PIB = L\Delta Q + Q\Delta L + \Delta Q\Delta L$$

De donde se deduce que

$$\checkmark \frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta Q}{Q} \frac{\Delta L}{L}$$

Por consiguiente, el error resultaría del hecho de que se debería tener en cuenta un tercer término equivalente al producto de las tasas de crecimiento de las dos variables explicativas.

Si se consideran diferencias infinitesimales puede llegarse también al resultado de más arriba por un método alternativo:

1. Se toman logaritmos de la expresión inicial

$$\ln PIB = \ln Q + \ln L$$

2. Se deriva totalmente

$$\checkmark \partial \ln PIB = \partial \ln Q + \partial \ln L$$

Este resultado es igual al anterior para diferencias infinitesimales, toda vez que, en general, una derivada logarítmica es equivalente a una tasa de crecimiento.

$$\partial \ln x = \frac{\partial X}{x}$$

Las tasas de crecimiento para variaciones infinitesimales se conocen con el nombre de “continuas” o *instantáneas*, puesto que realmente corresponden al crecimiento de una variable que cambia de manera continua a través del tiempo y no en forma periódica o en diferencias. Esto hace que las tasas de crecimiento logarítmicas sean ligeramente inferiores a las calculadas para períodos discretos, aunque la diferencia no es significativa cuando se trabaja con tasas próximas a cero y períodos cortos, como a menudo es el caso en análisis económicos. Si se tiene una tasa de crecimiento *discreto*, puede convertirse a una tasa de crecimiento continuo mediante

$$\checkmark g = \ln(1 + r)$$

Donde g es la tasa continua y r la tasa periódica o geométrica. Supóngase ahora que se tiene una variable que se define como un cociente entre otras dos variables, por ejemplo, la productividad por trabajador, Q

$$Q = \frac{PIB}{L}$$

Siguiendo cualquiera de los dos métodos anteriores se establece que

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial PIB}{PIB} - \frac{\partial L}{L}$$

lo que, utilizando la simbología ya introducida en este capítulo, puede escribirse como

$$\checkmark \quad q = g - e$$

Se deducen así dos reglas prácticas y una advertencia:

1. La tasa de crecimiento de un producto es la suma de las tasas de crecimiento de los factores.
2. La tasa de crecimiento de un cociente es la diferencia entre las tasas de crecimiento del numerador menos la del denominador. Éstas son las dos reglas.
3. La advertencia es que tales reglas sólo son estrictamente correctas para tasas de crecimiento continuo, las cuales son ligeramente inferiores a las tasas de crecimiento discreto. Para pasar de éstas a aquéllas se calcula el logaritmo natural de 1 más la tasa discreta, es decir:

$$g = \ln(1 + r)$$

8.6.2 Tasa de crecimiento de sumas

El primero de los dos métodos presentado en la sección anterior sirve para deducir la *tasa de crecimiento de una suma* a partir de las tasas de crecimiento de sus componentes. Considérese, por ejemplo, que el *PIB* es la suma de consumo e inversión

$$PIB = C + I$$

Diferénciese totalmente y divídase cada lado por el *PIB* inicial

$$\frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{\Delta C}{PIB} + \frac{\Delta I}{PIB}$$

Multiplíquese y divídase cada uno de los términos de la derecha por su respectivo valor inicial

$$\checkmark \frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{C}{PIB} \frac{\Delta C}{C} + \frac{I}{PIB} \frac{\Delta I}{I}$$

Se tiene así otra regla práctica: la tasa de crecimiento de una suma es el promedio ponderado de las tasas de crecimiento de los sumandos, donde las ponderaciones son las participaciones de los sumandos en el total. (Esta regla ya había sido aplicada en los Capítulos 1 y 2). El mismo método se usa en expresiones con sumandos negativos, conservándose el signo original.

La última expresión se refiere a diferencias, es decir, a cambios discretos, no a crecimientos continuos. Sin embargo, es igualmente válida en este caso (basta con remplazar por ∂ en todos los términos).

Hay que tener en cuenta que, bien sea con variaciones discretas o continuas, las ponderaciones que deben emplearse son las que resultan del valor de las variables en el período con respecto al cual se calculan los crecimientos. De otra forma, el método no es estrictamente válido.

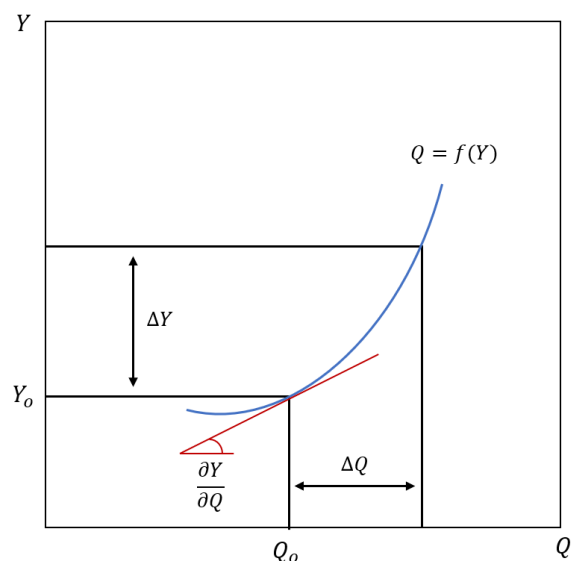
8.6.3 Elasticidades

El uso más importante de las tasas de crecimiento en el análisis económico es en el cálculo de elasticidades. Una elasticidad es simplemente el cociente entre las tasas de crecimiento de dos variables. Así, la elasticidad-ingreso de la demanda de alimentos es el cociente entre la tasa de crecimiento de la cantidad demandada de alimentos y la tasa de crecimiento del ingreso de los demandantes. Si el crecimiento se mide en forma discreta en el tiempo se tendrá

$$\checkmark e_{Y,Q} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_0}}{\frac{\Delta Y}{Y_0}}$$

Esta forma de elasticidad se denomina usualmente elasticidad de arco, porque en un gráfico que relaciona las dos variables, la elasticidad se obtiene a partir del arco que forman las observaciones de las dos variables antes y después del cambio (véase el Gráfico 8.3).

Gráfico 8.3
Elasticidad de arco y elasticidad puntual en una función de demanda



Cuando se toma crecimiento continuo, la elasticidad es el cociente de las derivadas de los logaritmos y se le denomina *elasticidad puntual* o instantánea, porque en un gráfico similar al anterior puede obtenerse a partir de la pendiente y los valores en un punto (véase el mismo gráfico).

$$\checkmark e'_{Y.Q.} = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln Y}$$

Finalmente, es conveniente saber que la tasa de crecimiento de una variable dependiente es igual a la suma de los productos de las elasticidades parciales de esa variable con respecto a las independientes por las tasas de crecimiento de las variables independientes. Supóngase que la demanda de alimentos es función del ingreso de los demandantes y el precio de los alimentos

$$Q = f(Y, P)$$

Entonces, si se diferencia totalmente

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial Y} dY + \frac{\partial Q}{\partial P} dP$$

Y se divide por Q todos los términos, y se multiplican y dividen los términos de la derecha por su respectiva variable independiente:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}}{\frac{\partial Y}{Y}} \frac{dY}{Y} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial P}}{\frac{\partial P}{P}} \frac{dP}{P}$$

o mediante una simbología más compacta:

$$\dot{Q} = e_Y \dot{Y} + e_P \dot{P}$$

donde el símbolo e representa *elasticidades parciales* y el punto encima de una variable significa que se trata de su tasa de crecimiento.

Conceptos clave

Indicadores de desarrollo económico

Producto per cápita, o *PIB* per cápita

PIB per cápita relativo

Tasa de convergencia

Indicadores de productividad

Productividad media del trabajo

Relación capital-producto

Relación marginal capital-producto

Relación capital-trabajo

Contabilidad del crecimiento y la productividad total de los factores

Por fuentes de demanda

Por acumulación de factores y productividad

- Función de producción Cobb-Douglas

- Productividad total de los factores, *PTF*

- Residuo de Solow o crecimiento de la *PTF*

Descomposición sectorial del aumento de la productividad laboral

- Por productividad dentro de los sectores

- Por reasignación laboral entre sectores

Métodos actuales de medición de la *PTF*

- Método de la OECD y KLEMS: residuos de los servicios que prestan el trabajo y el capital

- Método de *Penn World Table*: *PTF* relativa a Estados Unidos

Medición del ciclo económico

Producto observado

Producto potencial

Producto cíclico

Brecha del producto

Recursos matemáticos

Descomposición de tasas de crecimiento de productos y cocientes

Descomposición de tasas de crecimiento de sumas

Elasticidades

- De arco

- Puntuales

- Parciales

Preguntas y Ejercicios

Pregunta 8.1

¿Cuál es la tasa continua de crecimiento del producto si la productividad del trabajo crece a una tasa continua del 2% anual y el empleo aumenta a la tasa, también continua, del 1,5% anual? ¿Cuál sería su respuesta si las anteriores tasas fueran geométricas?

Pregunta 8.2

Suponga que la economía está compuesta por dos sectores que en el momento tienen el mismo tamaño en términos de valor agregado. ¿Cuál es la tasa de crecimiento del *PIB* si uno de los sectores crece a razón del 20% anual y el otro a razón del 5%? ¿Obtendría el mismo resultado para el segundo año?

Pregunta 8.3

¿Cuál es la elasticidad del valor agregado de cada uno de los dos sectores con respecto al *PIB* en el primer año? ¿Y en el segundo? Muestre que la suma ponderada de las elasticidades de los dos sectores es igual a uno. ¿Por qué tiene éste que ser el caso?

Pregunta 8.4

Suponga ahora que a partir del segundo año el crecimiento del *PIB* permanece constante y que las elasticidades del segundo año no se modifican. ¿Cuál será la participación de cada sector cinco años más tarde, es decir, en el séptimo año?

Pregunta 8.5

A partir de la siguiente información descomponga el crecimiento económico anual promedio para el período completo 2014-2023 según las fuentes de demanda agregada (miles de millones de pesos constantes de 2015):

	2014	2023p
Producto Interno Bruto (PIB = C + G + I + X - M)	762,903	1,584,562
Consumo de hogares (C)	503,294	1,166,729
Consumo final del gobierno (G)	108,666	232,203
Formación bruta de capital (I)	183,122	260,497
Exportaciones totales (X)	126,907	282,554
Importaciones totales (M)	159,086	357,421

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales.

Pregunta 8.6

A partir de la expresión presentada en el texto:

$$Y = \dot{C} \times c + \dot{I} \times i + \dot{G} \times g + \dot{X} \times x - \dot{M} \times m$$

Supóngase que por cada peso de ingreso total el consumo aumenta siempre 0.7 y que para lograr un peso de producción adicional siempre es preciso importar 0.2. Supóngase que los demás componentes de la demanda son exógenos (es decir, no dependen de Y ni de ninguna otra variable del modelo). ¿Cuánto sería el crecimiento económico si estos componentes exógenos de la demanda aumentaran todos 10%? ¿En cuántos pesos aumenta Y por cada peso que aumentan estos componentes exógenos?

Pregunta 8.7

Demuestre que si cada factor recibe por remuneración su productividad marginal, la función de producción Cobb-Douglas implica que α es la participación del capital en el ingreso (y $1 - \alpha$ es la participación del trabajo).

Pregunta 8.8

A partir de la siguiente información calcule la contribución del capital, el trabajo y la productividad al crecimiento económico colombiano en las décadas de 1970, 1980 y 1990, suponiendo que la participación del trabajo en el ingreso es 65%.

	Producto	Trabajo	Capital
1961-1970	5.26%	3.19%	4.06%
1971-1980	5.51%	3.23%	4.94%
1981-1990	3.38%	2.82%	4.36%
1991-2000	2.68%	2.36%	4.09%

Fuente: Norman Loayza, Pablo Fajnzylber y César Calderón. Economic Growth in Latin America and the Caribbean: Stylized Facts, Explanations and Forecasts, Banco Mundial, Washington, D.C., junio 2002.

Pregunta 8.9

Téngase en cuenta ahora que la educación promedio de la fuerza de trabajo tuvo las siguientes tasas de crecimiento y respóndase nuevamente la pregunta anterior:

Años	Tasas de crecimiento
1961-1970	-0.36%
1971-1980	2.37%
1981-1990	0.58%
1991-2000	0.90%

Fuente: Norman Loayza, Pablo Fajnzylber y César Calderón. Economic Growth in Latin America and the Caribbean: Stylized Facts, Explanations and Forecasts, Banco Mundial, Washington, D.C., junio 2002.

Pregunta 8.10

¿Cómo ajustaría los cálculos del ejercicio anterior para tener en cuenta que el trabajo no se utiliza plenamente? Por ejemplo, suponga que la tasa de desempleo estuvo constante en 10% hasta 1990 y que durante los noventa aumentó un punto porcentual por año. ¿Cuál fue entonces la contribución de la productividad (el residuo) en los noventa? ¿Cambia con esto el cálculo de décadas anteriores?

Explique cómo ajustaría los cálculos anteriores para tener en cuenta: (a) los cambios en la utilización de la capacidad instalada, y (b) el número de horas trabajadas por persona. Sugiera otros ajustes que podrían hacerse para tener medidas más exactas de los cambios en la productividad total de los factores.

Pregunta 8.11

Considere la siguiente información sobre una economía de muy bajo nivel de desarrollo en 2010, que ha tenido crecimiento sostenido en más de una década:

	2010	2023
Fuerza de trabajo (millones de personas)		
- Sector tradicional	200	180
- Sector moderno	100	220
Productividad laboral per cápita (millones de pesos constantes)		
- Sector tradicional	4	6
- Sector moderno	12	15
Relación capital/trabajo (millones de pesos constantes de capital por trabajador)		
- Sector tradicional	0.5	1
- Sector moderno	4	6

Calcule lo siguiente:

- (a) tasa de crecimiento anual de esta economía
- (b) tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo
- (c) tasa de crecimiento de la productividad laboral total, del sector tradicional y el moderno
- (d) descomposición de la productividad laboral (por reasignación, dentro de los sectores y efecto interacción).

Pregunta 8.12

Aplique la siguiente expresión a la información del ejercicio anterior,

$$q = a + \left(\frac{\dot{K}}{L} \right) \alpha$$

para obtener la contribución de la productividad total de los factores al crecimiento (suponga que la remuneración al trabajo ha tenido una participación estable en el ingreso del 60%). Explique el resultado.

Pregunta 8.13

Compruebe que puede llegar al mismo resultado a partir de la ecuación del residuo de Solow,

$$a = g - \alpha\dot{K} - (1 - \alpha)\dot{L}$$

Pregunta 8.14

Calcule cuál sería la remuneración por trabajador en 2010 y en 2023 Interprete el resultado.

Pregunta 8.15

Deduzca una expresión para descomponer los aumentos de la productividad laboral total para tres o más sectores en (a) por reasignación del empleo entre sectores, (b) por aumento de la productividad dentro de los sectores, y (c) por interacción entre los efectos anteriores.

Pregunta 8.16

Regrese al Ejemplo 8.4 presentado en el capítulo.

- a) Con los cálculos allí obtenidos, ¿en qué momento se tuvo el menor uso de los recursos potenciales de la economía, y el mayor?
 - b) Calcule ahora usted con un método sencillo el *PIB* potencial a partir de los datos del producto observado incluidos en el ejemplo. (Sugerencia: pase los datos a logaritmos y calcule la tasa promedio de crecimiento de la serie en logaritmos).
 - c) Habrá observado que sus cálculos del *PIB* potencial son diferentes de los presentados en el ejercicio. Explique a qué puede deberse esto.
 - d) Calcule ahora el producto cíclico y la brecha del producto, y compare sus resultados con los obtenidos originalmente en el ejercicio. Intente responder nuevamente la pregunta a) y explique por qué su nueva respuesta es diferente de la inicial.
-

Bibliografía

Libros de texto

Barro, Robert y Xavier Sala-i-Martin. *Crecimiento económico*, Reverté, Barcelona. 2018. Uno de los libros de texto más populares sobre crecimiento económico a nivel intermedio.

Cárdenas, Mauricio. *Introducción a la economía colombiana*. Fedesarrollo- Alpha Editorial, cuarta edición, 2020. El mejor y más completo libro de texto de economía colombiana. El Capítulo 3 está dedicado al crecimiento económico.

Lora, Eduardo. *Economía esencial de Colombia: Las raíces de la crisis*. Debate, Penguin Random House, Segunda edición, 2021. El capítulo 3 es una introducción muy básica al problema del crecimiento en Colombia.

Mankiw, N. Gregory. *Principles of Economics*. Cengage Learning, 2020. Es el libro de texto de introducción a la economía más utilizado en el mundo. El capítulo 14 está dedicado al crecimiento económico.

Aplicaciones, métodos y fuentes de información

DANE. Boletín Técnico: Productividad Total de los Factores (PTF) 2021pr. Presenta los resultados y explica la metodología más reciente siguiendo el primero de los enfoques presentados en la sección 8.4

Inklaar, Robert, and Marcel P. Timmer. “Capital, Labor and TFP in PWT8. 0.” University of Groningen (unpublished) (2013): 23-24. Explican de forma muy clara y sencilla la metodología de medición de la productividad total de los factores que usa la Penn World Table, según el segundo de los enfoques de la sección 8.4

LAKLEMS (2021). LAKLEMS: Crecimiento Económico y Productividad en América Latina. Julio de 2021. Base de datos disponible en: <http://www.laklems.net/> Contiene las bases detalladas de los cálculos de la productividad total de los factores para países latinoamericanos según el primero de los dos enfoques de la sección 8.4. Penn World Table, version 10.0 (2021): <https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/> Contiene las series históricas por país de la productividad total de los factores según el segundo de los enfoques de la sección 8.4.

Rodríguez, Norberto, José Luis Torres y Andrés Velasco. “La estimación de un indicador de brecha del producto a partir de encuestas y datos reales”. Serie *Borradores de Economía*, Banco de la República, abril 2006.

The Conference Board. “Total Economy Database™ Summary Tables”, April 2022. <https://www.conference-board.org/data/economydatabase/total-economy-database-productivity> Explica los métodos básicos y resultados de cálculo de la productividad total de los factores según el primero de los enfoques explicado en la sección 8.4.

Torres, José Luis. “La estimación de la brecha del producto en Colombia.” *Borradores de Economía*; No. 462 (2007).

