Taller #1
Econometría 06169
Grupo 5

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Margareth Gonzalez
Sebastián Solanilla

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas. Además es importante recalcar que el trabajo es individual!!!

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo que se lanza una moneda, que está cargada, es decir que tiene más probabilidad de salir cara que sello. Sean:

- X = el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- Y = Es una variable aleatoria que toma el valor de 1 cuando la moneda es cara y 3 cuando es sello. La probabilidad de que salga cara es (2/3) y de que sea sello es (1/3).
- $S = X + Y + 1$
- C = SY

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(S)$ $E(C)$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(S)$ $Var(C)$

1.3. ¿Son S y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

1.4. Halle la covarianza de C y de Y

2. Considere las siguientes matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

2.1 **a)** $A^T A$ **b)** $(A)^{-1}$ **c)** $A \cdot B$ **d)** $B \cdot A$ **e)** $A^T y$ **f)** $B^T B$

g) $y^T y$ **h)** $y y^T$

2.2. **a)** $\left|A^T A\right|$ **b)** $|A|$

2.3. **a)** $ran\left(A^T A\right)$ **b)** $ran(B A)$

3. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

4. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \tan(\alpha) + \beta_1 \ln(X_i) + e^{\beta_2}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right) + \varepsilon_i$ b) $U_t = \alpha\left[\frac{w_t + \varepsilon_t}{(p_t)^{w_t}}\right]^{\beta}$

c) $y_i = \beta_1 \cdot sen(K_i) + \sqrt{\varepsilon_i}$ d) $U_t = \sqrt{\beta} \cdot W_t + \alpha \cdot (X_t)^2 + \gamma \cdot Y_t + \varepsilon_t$

5. Se tiene la siguiente información para estimar el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$:

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 200 \\ 60 \\ 44 \end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad y^T y = 1159$$

donde y_i corresponde al logaritmo de las unidades vendidas de una revista especialida en noticias económicas en la ciudad i, X_{2i} y X_{3i} representan el logaritmo del precio (en \$) de la revista en la ciudad i y el logaritmo del precio (en \$) de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i, respectivamente.

a) Estime por MCO el el siguiente el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$. Es decir, encuentre los estimadores para $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y σ^2.

b) Interprete los valores estimados para $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

c) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_3.

6. Responda las siguientes preguntas empleando la misma información de la pregunta anterior.

a) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{5}$. Explique las implicaciones de su decisión

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

c) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

Taller #1
Econometría 06169
Grupo 5

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Margareth Gonzalez
Sebastián Solanilla

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas. Además es importante recalcar que el trabajo es individual!!!

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo que se lanza una moneda, que está cargada, es decir que tiene más probabilidad de salir cara que sello. Sean:

- X = el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- Y = Es una variable aleatoria que toma el valor de 1 cuando la moneda es cara y 3 cuando es sello. La probabilidad de que salga cara es (2/3) y de que sea sello es (1/3).
- $S = X + Y + 1$
- C = SY

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(S)$ $E(C)$

a. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) = \frac{7}{2}$

b. $E(Y) = \sum_{i=1}^{..} y_i \cdot P(y_i) = \frac{5}{3}$

c. $E(S) = E(X + Y + 1) = E(X) + E(Y) + E(1) = \frac{7}{2} + \frac{5}{3} + 1 = \frac{37}{6}$

d. Note que $C = S \cdot Y = (X + Y + 1)Y = X \cdot Y + Y^2 + Y$. Por tanto,
$E(C) = E(XY + Y^2 + Y) = E(XY) + E(Y^2) + E(Y)$. Así pues necesitamos calcular $E(Y^2)$ y $E(Y \cdot X)$. Es facil mostrar que $E[(Y)^2] = \frac{11}{3}$. Además, es bastante intuitivo reconocer que X y Y son variables aleatorias independientes, luego $E(Y \cdot X) = E(X)\,E(Y)$.
(Asegurese que puede mostrar formalmente este hecho)

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar $E(C)$. Es decir,
$E(C) = E(X) \cdot E(Y) + E(Y^2) + E(Y) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{11}{3} + \frac{5}{3} = \frac{67}{6}$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(S)$ $Var(C)$

a. $Var(X) = \frac{35}{12}$.(En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, está el detalle de este cálculo)

b. $Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}$

c. $Var(S) = Var(X + Y + 1)$. Como X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$. Por lo tanto: $Var(S) = Var(X) + Var(Y) = \frac{35}{12} + \frac{8}{9} = \frac{137}{36}$

d. Ahora note que $Var(C) = E(C^2) - (E(C))^2$. Ya encontramos que $E(C) = \frac{67}{6}$, sólo nos falta encontrar $E(C^2)$. Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a qué es igual C^2. Es facil mostrar que:

$$C^2 = \left[(X \cdot Y + Y^2 + Y)^2\right] = Y^4 + 2Y^3 + Y^2 + Y^2 \cdot X^2 + 2 \cdot X \cdot Y^3 + 2(X \cdot Y)^2$$

Luego,

$$E(C^2) = (E(Y)^4) + 2 \cdot (E(Y)^3) + (E(Y)^2) + (E(Y)^2) \cdot (E(X)^2) + 2 \cdot E(X)\,E(Y^3) + 2 \cdot E(X) \cdot E(Y^2)$$

.

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de C:

- $E(Y^4)$
- $E(Y^3)$

A continuación se calculan estas cantidades:

__Cálculo de__ $E(Y^3)$

Los posibles valores de $(Y)^3$ son $(1^3, 3^3) = (1, 27)$, con una probabilidad de ocurrir de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Siguiendo la definicón, $E(Y^3) = \sum_{i=1}^{n} (y_i)^3 \cdot P[(y_i)^3] = \frac{29}{3}$

__Cálculo de__ $E(Y^4)$

Los posibles valores de Y^4 son $(1^4, 3^4) = (1, 81)$, con una probabilidad de ocurrir de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente . Siguiendo la definicón, $E(X^4) = \sum_{i=1}^{n} (y_i)^4 \cdot P[(y_i)^4] = \frac{83}{3}$

Entonces tenemos que:

$$E(C^2) = E(Y^4) + 2 \cdot E(Y^3) + E(Y^2) + E(Y^2) \cdot E(X^2) + 2 \cdot E(X)\,E(Y^3) + 2 \cdot E(X) \cdot E(Y^2)$$

$$E(C^2) = \frac{83}{3} + 2 \cdot \frac{29}{3} + \frac{11}{3} + \left(\frac{11}{3}\right) \cdot \left(\frac{91}{6}\right) + 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{29}{3} + 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{3}$$

$$E(C^2) = \frac{3593}{18}$$

Así, la varianza de C es:

$$\mathrm{Var}(C) = E\left(C^2\right) - \left(E(C)^2\right)$$

$$\mathrm{Var}(C) = \frac{3593}{18} - \left(\frac{67}{6}\right)^2 = \frac{899}{12} = 74.917$$

1.3. ¿Son S y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que S y Y son independientes si y solamente si $E(SY) = E(S)\cdot E(Y)$ (*).
Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (*).

$$E(S)\cdot E(Y) = E(X + Y + 1)\cdot E(Y)$$

$$E(S)\cdot E(Y) = E\cdot(X)\cdot E(Y) + (E(Y))^2 + E(Y)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (*).

$$E(SY) = E[(X + Y + 1)\cdot(Y)]$$

$$E(SY) = E\left(XY + Y^2 + Y\right)$$

$$E(SY) = E(X)\cdot E(Y) + E\left(Y^2\right) + E(Y)$$

Finalmente, podemos comparar la parte dereacha e izquierda de la ecuación (*):

$$E(SY) = E(S)\cdot E(Y)$$

$$E\cdot(X)\cdot E(Y) + (E(Y))^2 + E(Y) \quad ? \quad E(X)\cdot E(Y) + E\left(Y^2\right) + E(Y)$$

$$(E(Y))^2 \quad ? \quad E\left(Y^2\right)$$

$$(E(Y))^2 \neq E\left(Y^2\right)$$

Como ven, en este caso $E(SY) \neq E(S)\cdot E(Y)$ y por tanto S y Y no son independientes

1.4. Halle la covarianza de C y de Y

$$\mathrm{Cov}(C, Y) = E(C\cdot Y) - E(C)\cdot E(Y) = E[(SY)\cdot Y] - (E(C)\cdot E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(T, Y) = E\left[\left(X\cdot Y + Y^2 + Y\right)\cdot Y\right] - \left(\frac{67}{6}\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(T, Y) = E\left(X\cdot Y^2 + Y^3 + Y^2\right) - \left(\frac{67}{6}\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(T, Y) = E\left(X\cdot Y^2\right) + E\left(Y^3\right) + E\left(Y^2\right) - \left(\frac{67}{6}\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(T, Y) = E(X)\cdot E\left(Y^2\right) + E\left(Y^3\right) + E\left(Y^2\right) - \left(\frac{67}{6}\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(T, Y) = \frac{7}{2}\cdot\frac{11}{3} + \frac{29}{3} + \frac{11}{3} - \left(\frac{67}{6}\cdot\frac{5}{3}\right) = \frac{68}{9}$$

2. Considere las siguientes matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

2.1 **a)** $A^T A = \begin{pmatrix} 43 & 8 & 76 \\ 8 & 2 & 12 \\ 76 & 12 & 144 \end{pmatrix}$ **b)** $(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 48 & 48 \\ 26 & 30 \\ 43 & 29 \end{pmatrix}$ **d)** $B\cdot A$ no esta definido

e) $A^T y = \begin{pmatrix} 64 \\ 14 \\ 112 \end{pmatrix}$ **f)** $B^T B = \begin{pmatrix} 35 & 27 \\ 27 & 75 \end{pmatrix}$

g) $y^T y = (184)$ **h)** $y\, y^T = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 12 \\ 24 & 144 & 72 \\ 12 & 72 & 36 \end{pmatrix}$

2.2. **a)** $\left|A^T A\right| = 16$ **b)** $|A| = 4$

2.3. **a)** $\mathrm{rank}\left(A^T A\right) = 3$

Noten que $\mathrm{ran}\left(A^T A\right)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn existe n valores propios). Además, tenemos que $\left|A^T A\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, donde λ_i son los correspondientes valores propios. Dado que $\left|A^T A\right| \neq 0$, ninguna de las variables aleatorias serán iguales a cero, por tanto $A^T A$ tendrá rango completo.

b) $\mathrm{ran}(B\, A)$ no esta definido

3. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad asociada con X_2 esta dada por: $\eta(X_2) = \frac{\Delta\%enY}{\Delta\%enX_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}} Y_i = \beta_2 \cdot \beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2 - 1} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i = \beta_2 \cdot \frac{\beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta(X_2) = \frac{\Delta\%enY}{\Delta\%enX_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta(X_3) = \beta_3$.

4. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \tan(\alpha) + \beta_1 \ln(X_i) + e^{\beta_2}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right) + \varepsilon_i$ b) $U_t = \alpha\left[\frac{w_t + \varepsilon_t}{(p_t)^{w_t}}\right]^{\beta}$

c) $y_i = \beta_1 \cdot \operatorname{sen}(K_i) + \sqrt{\varepsilon_i}$ d) $U_t = \sqrt{\beta} \cdot W_t + \alpha \cdot (X_t)^2 + \gamma \cdot Y_t + \varepsilon_t$

a) El modelo $y_i = \tan(\alpha) + \beta_1 \ln(X_i) + e^{\beta_2}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right) + \varepsilon_i$ es un modelo lineal, para verlo m[as claramente, podemos hacer las siguientes transformaciones:

$\gamma = \tan(\alpha)$ $W_i = \ln(X_i)$ $Z_i = \left(\frac{1}{X_{2i}}\right)$ $\psi = e^{\beta_2}$

Así el modelo original es equivalente a:

$$W_i = \gamma + \beta_1 \cdot X_i + \psi Z_i + \varepsilon_i$$

b) Claramente el modelo $U_t = \alpha\left[\frac{w_t + \varepsilon_t}{(p_t)^{w_t}}\right]^{p}$ no es linealizable, pues no existe ninguna transformaci[on que permita te obtener un modelo lineal.

c) El modelo $y_i = \beta_1 \cdot \operatorname{sen}(K_i) + \sqrt{\varepsilon_i}$ es lineal, para verlo más claro hagamos las sigueites transformaciones:

$W_i = \operatorname{sen}(K_i)$ $\mu_i = \sqrt{\varepsilon_i}$

Así el modelo original es equivalente a:

$$y_i = \beta_1 \cdot W_i + \varepsilon_i$$

d) El modelo es lineal, pues si definimos

$\gamma = \sqrt{\beta}$ $Z_t = (X_t)^2$

tendremos que:

$$U_t = \gamma \cdot W_t + \alpha \cdot Z_t + \gamma \cdot Y_t + \varepsilon_t$$

5. Se tiene la siguiente información para estimar el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$:

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 200 \\ 60 \\ 44 \end{pmatrix} \quad X^T X = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad y^T y = 1159$$

donde y_i corresponde al logaritmo de las unidades vendidas de una revista especialida en noticias económicas en la ciudad i, X_{2i} y X_{3i} representan el logaritmo del precio (en \$) de la revista en la ciudad i y el logaritmo del precio (en \$) de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i, respectivamente.

a) Estime por MCO el el siguiente el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$. Es decir, encuentre los estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

Recuerden que

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Sin importar el método que empleen, encontrarán que

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Y por tanto,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 60 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2.5 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para σ^2.

$$s^2 = \frac{y^T y - \text{βhat}^T \cdot X^T y}{n - k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 50$ y $y^T y = 1159$. Así,

$$s^2 = \frac{1159 - \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 60 \\ 44 \end{pmatrix}}{50 - 3} = \frac{1159 - (971)}{47} = 4$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas esta dada por

$$\hat{Var}\left(\hat{\beta}\right) = s^2 \left(X^T X\right)^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Interprete los valores estimados para β_1, β_2, β_3.

- $\text{βhat}_2 = -\frac{5}{2}$, un aumento de un uno porciento en el precio de la revista provocará una disminución del 2.5% en las revistas vendidas.
- $\text{βhat}_3 = \frac{11}{4}$, un aumento de uno porciento en el precio de la competencia provocará un aumento del 2.75% en las revistas vendidass.
- $\text{βhat}_1 = 5$, este coeficiente carece de interpretación económica.

c) Contraste la hipótesis nula $H_o : \beta_2 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos probar la siguiente hipótesis nula $H_o : \beta_2 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A : \beta_2 \neq 0$. Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \frac{\text{βhat}_2}{s(\text{βhat}_2)}$. En este caso tenemos

$$t_c = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{-5}{2} \cdot \sqrt{2} = -3.536$$

Este t_c lo tenemos que comparar con el $t_{0.025,47} = 2.012$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.05,47} = 1.678$ y $t_{0.005,47} = 2.685$). Note que siempre | t cal | es mayor que el valor crítico, por lo tanto hay suficiente evidencia para decir que el coeficiente asociado con el precio de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i es significativamente diferente de cero. En otras palabras, podemos decir con un 99% de confianza que el precio de la competencia ayuda ha explicar la variabilidad en la variable dependiente.

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_3.

Un intervalo de confianza del 95% para β_3 esta dado por

$$\left(\frac{11}{4} - t_{0.025,47} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}, \frac{11}{4} + t_{0.025,47} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\left(\frac{11}{4} - 2.012 \cdot \frac{1}{2}, \frac{11}{4} + 2.012 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(1.744, 3.756)$$

6. Responda las siguientes preguntas empleando la misma información de la pregunta anterior.

a) Contraste la hipótesis nula $H_o : \beta_2 + \beta_3 = \frac{1}{3}$. Explique las implicaciones de su decisión

(Nota: Esta Hipótesis podía ser probada tambien por medio de una prueba t, en todo caso la decisión sería la misma)
Esta hipótesis nula puede ser escrita en la forma $R\cdot\beta = C$. Como sólo existen una restricción y tenemos tres parametros estimados, entonces la matriz R tendrá dimensiones 1x3. En este caso $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \frac{1}{5}$. Así, el F calculado está dado por

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{((C-R\cdot\beta hat))^T\cdot\left[R\cdot\left((X)^T\cdot X\right)^{-1}\cdot R^T\right]^{-1}\cdot(C-R\cdot\beta hat)}{r}}{s^2}$$

Del taller anterior sabemos que:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \qquad s^2 = 4$$

Entonces tenemos que

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{\left[\frac{1}{5}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}\right]^T\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{1}{5}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}\right]}{1}}{4}$$

$$F_{calculado} = \frac{\left(-\frac{1}{20}\right)^T\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{20} & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot-\frac{1}{20}}{4} = \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^T\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{20}}{4} = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$$

$$F_{calculado} = 3.333\times 10^{-3}$$

Este $F_{calculado}$ lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(1,37)} = 4.047$. Claramente el $F_{calculado}$ es mayor que el F de la tabla y por tanto existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula que $\beta_2 + \beta_3 = 0.2$.

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

Sabemos que la tabla ANOVA viene dada por:

Tabla ANOVA

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\bar{Y}^2$	$k-1$	$\frac{SSR}{k-1}$
Error (Residuos)	$SSE = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y$	$n-k$	$\frac{SSE}{n-k}$
Total	$y^T y - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 50$, $y^T y = 1159$, $\beta hat^T\cdot X^T y = (971)$ y $Ybar = \frac{200}{50} = 4$. Asi, la tabla Anova es

Tabla ANOVA

Fuente de variación	SS	G de L	
Regresión	$971-\left[50\cdot(4)^2\right] = 171$	$3-1 = 2$	$\frac{171}{2} = 85.5$
Error (Residuos)	$1159-971 = 188$	$50-3 = 47$	$\frac{188}{47} = 4$
Total	$1159-50\cdot(4)^2 = 359$	49	

c) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

Sabemos que $R^2 = \frac{SSR}{SST}$. Entonces, en este caso tenemos que el R^2 será $\frac{171}{359} = 0.476$.

Esto implica que el 47.6% de la variación de Y es explicada por nuestro modelo.

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

Existen varias formas de hacer esta pregunta. Una de las formas es usando la información de la tabla ANOVA. Sabemos que el F calculado para pobar dicha Ho esta dado por

$$F_{calculado} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{\frac{171}{2}}{4} = \frac{171}{8} = 21.375$$

El F de la tabla par este caso es $F_{0.05,(2,37)} = 3.252$. Como el

$$F_{calculado} > F_{0.05,(2,37)} = 3.195,$$

entonces hay suficiente evicencia para rechazar la Ho. Así podemos decir que ambas variables son importantes en nuestro modelo, es ddecir que son son significativamente distintas de cero.