Universidad Icesi

Cali, Lunes 12 de Mayo del 2003

Examen Final
Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante: ______________________________

Código:____________________

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de 4 páginas; además, deben tener dos páginas de fórmulas.
3. El examén consta de 4 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las pregutas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. ***Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica.***
7. Usted NO puede emplear calculadora, ni ningún material escrito diferente al examen.
8. Al finalizar su examén entregue su respuestas con las preguntas.
9. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

1. (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte) *

Falso o Verdadero

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2)$

b) Siempre que el supuesto de normalidad del término aleatorio de error es violado en un modelo de regresión multiple, los estimadores MCO son MELI.

c) Un investigador plantea el siguiente modelo para estudiar los determinantes del salario de los asalariados caleños: $w_i = \beta_1 \text{añosDeEstudio}_i + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 \cdot D_{2i} + \varepsilon_i$, donde

$$D_{1t} = \begin{cases} 1 & si \text{ indiv i es hombre} \\ 0 & o.w.. \end{cases} \qquad D_{2t} = \begin{cases} 1 & si \text{ indiv i es mujer} \\ 0 & o.w.. \end{cases}$$

El modelo anterior tiene problemas de multicolinealidad perfecta.

d) El modelo $Y_i = e^{(X_1)^{\beta_1}} (X_{2i})^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i$ es linealizable.

2. (40 puntos)

El econometrista del Departamento de Planeación Nacional (DNP) de la Republica caribeña de Banana Republic se ha enfermado y usted ha sido contratado como remplazo de él. El DNP de la Banana Republic desea estimar el siguiente modelo macroeconmico.

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 r_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_t + u_t \qquad (2)$$

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 I_t + \gamma_3 M_t + \nu_t \qquad (3)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \qquad (4)$$

Donde C_t, Y_t, I_t, M_t, G_t denotan el consumo de los hogares, el producto, la inversión de los privados, la cantidad de dinero y el gasto público. respectivamente. Estas variables estan medidas en billones de pesos. Por otro lado, r_t corresponde a la tasa de interes medida en puntos porcentuales. ε_t, u_t y υ_t corresponden a términos aleatorios de error. Responda brevemente las siguientes preguntas:

a) Identifique las variables endógenas y exógenas del sistema de ecuaciones. **(5 puntos)**

b) Explique brevemente en que consiste el problema de identificación. **(5 puntos)**

c) Determine cuales de las ecuaciones del (1) al (4) están subidentificadas y probablemente sobre o perfectamente indentificadas. **(5 puntos)**

d) Escriba la ecuación estimada por el econometrista. (Los resultados se encuentran al final) ¿Corresponde está ecuación a una ecuación de la forma estructural o de la forma reducida? **(5 puntos)**

e) Interprete y explique brevemente el significado y la significancia de los coefcientes estimados **(5 puntos)**

f) Describa brevemente como probaría usted la siguiente hipótesis: "Las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto" **(5 puntos)**

g) Se cree que en años recesivos el efecto del gasto publico sobre el PIB es positivo, mientras que en años de expansión el gasto público no tiene ningún efecto en el producto. ¿Cómo se podría incluir esta hipótesis en nuestro estudio? Escriba una ecuación de la forma reducida que recoga esta idea y compruebe que el modelo si recoge esta hipótesis. Explique claramente como lo haría y demuestre que su método funcionaría. **(10 puntos)**

3. (40 puntos)

Un empresario de productos lacteos supone que la cantidad vendida y_t de sus productos (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, \ldots.. \qquad (*)$$

donde X_{2t} represta el tiempo de propaganda en televisión en el periodo t (medido en horas) y X_{3t} represta el logaritmo del número de avisos de propaganda en revistas en el periodo t (medido en 100 avisos). Ademas se sabe que:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 (X_{2t})^2 \qquad E(\varepsilon_j \varepsilon_i) = 0 \text{ para todo } i \neq j$$

a) ¿Cúales propiedades deben cumplir el término de error aleatorio para obtener estimadores MELI? **(5 puntos)**

b) ¿Que otros supuestos deben cumplirse para obtener estimadores MELI? **(5 puntos)**

c) ¿Qué supuesto es violado en este caso?¿Cómo solucionaría el problema? **(5 puntos)**

Para los últimos 9 períodos se obtuvieron los siguientes valores:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_{2t})^2} = 16 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2t}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t}{(X_{2t})^2} = 13 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t}{X_{2t}} = 9 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{3t})^2}{(X_{2t})^2} = 10 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t \cdot X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_t)^2}{(X_{2t})^2} = 25$$

d) Forme la matriz $X^T X$ **(5 puntos)**

e) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo;

además estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de los β´s. **(10 Puntos)**

f) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados.**(5 Puntos)**

g) El asesor comercial de esta firma cree que el modelo verdadero esta dado por $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$. ¿Qué problema existiría en las estimaciones relizadas en el punto **e)** si este modelo fuera en efecto el verdadero? **(5 Puntos)**

Estimaciones de EasyReg para la pregunta 2

```
Two-stage least squares:
Dependent variable:
Y = I
Characteristics:
I
 First observation = 1(=1.1)
 Last observation  = 100(=25.4)
 Number of usable observations: 100
 Minimum value: -1.4614000E+001
 Maximum value: 3.8290000E+001
 Sample mean:   1.0564620E+001

X variables, including instrumental variables:
X(1) = r
X(2) = Y
X(3) = M
X(4) = G
X(5) = 1

Endogenous X variable:
Y*(1)= r
Y*(2)= Y

Exogenous X variables:
X*(1)=1

2SLS estimation results for Y = I
Variables                        2SLS estimate   t-value
                                                 [p-value]
r                                     0.735809    10.579
                                                 [0.00000]
Y                                    -1.400203    -7.827
                                                 [0.00000]
1                                     6.678923     1.538
                                                 [0.12393]
[The p-values are two-sided and based on the normal approximation]
Standard error of the residuals = 11.036741E-001
Residual sum of squares (RSS) =   11.815536E+001
Total sum of squares (TSS) =      20.476477E+003
R-square =          0.994230
Adjusted R-square = 0.994111
Effective sample size (n) = 100
```

Econometría 06169, Examen Final

Prof: Julio César Alonso C

Fórmulas

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} \\ & & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \ddots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

$$y^T y = \sum_{i=1}^{2} y_i^2$$

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$$

$$Var\left[\hat{\beta}\right] = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}$$

$$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\overline{Y}^2 \qquad t = \frac{\hat{\beta}_i - c}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

$$F_c = \frac{\left(c - R\hat{\beta}\right)^T \left(R\left(X^T X\right)^{-1} R^T\right)^{-1} \left(c - R\hat{\beta}\right) \Big/ r}{SSE / n-k}$$

$$F_C = \frac{R^2 / (k-1)}{\left(1-R^2\right) / (n-k)} = \frac{MSR}{MSE}$$

$$F_c = \frac{\left(SSE_R - SSE_U\right)/r}{SSE_U / (n-k)} \qquad R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-k} s_{\hat{\beta}_i} \qquad \overline{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k}$$

$$\hat{y}_p = x_p^T \hat{\beta} \ , \quad x_p^T = \begin{pmatrix} 1 & x_{1p} & x_{2p} & \ldots & x_{kp} \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-k} \sqrt{\sigma^2 x_p^T \left(X^T X\right)^{-1} x_p}$$

$$\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-k} \sqrt{\sigma^2 \left[1 + x_p^T \left(X^T X\right)^{-1} x_p\right]}$$

$$\hat{\beta}_j^E = \hat{\beta}_j \frac{s_{X_j}}{s_y} \ , \quad j = 2,3,\ldots,k \qquad E_j = \hat{\beta}_j \frac{\overline{X}_j}{\overline{y}}$$

$$SST = y^T y - n\overline{Y}^2$$

Econometría 06169, Examen Final

Prof: Julio César Alonso C

Test de Heteroscedasticidad

Goldfeld y Quand: $F_{GQ} = \frac{SSE_2}{SSE_1} \sim F_{(n-d-2k, n-d-2k)}$

Breusch-Pagan: $\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \gamma + \delta Z_i + \mu_i$, $BP = \frac{SSR}{2} \sim \chi_g^2$

White: $\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma + \sum_{m=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_s X_{mi} X_{ji} + \mu_i$, $W_a = nR^2 \sim \chi_g^2$

Test de Autocorrelación

Durbin-Watson $DW \approx 2(1-\hat{\rho})$

Ho	***Sí***	***Decisión***
$H_0 : \rho = 0$	$d_u < DW < 4 - d_u$	***A***
No auto +	$0 < DW < d_l$	***R***
No auto -	$4 - d_l < DW < 4$	***R***

Área de indecisión $d_l < DW < d_u$ ***y*** $4 - d_u < DW < 4 - d_l$

Cantidades Importantes

$\sqrt{2} = 1.414$ $\sqrt{3} = 1.732$
$\sqrt{10} = 3.162$ $\sqrt{13} = 3.606$

d_l y d_u para el test de DW al nivel de significancia del 5%

N	***k-1=1***		***k-1=2***		***k-1=3***	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
50	***1.50***	***1.59***	***1.46***	***1.63***	***1.42***	***1.67***
60	***1.55***	***1.62***	***1.51***	***1.65***	***1.48***	***1.69***
95	***1.64***	***1.69***	***1.62***	***1.71***	***1.60***	***1.73***
100	***1.65***	***1.69***	***1.63***	***1.72***	***1.61***	***1.74***

Universidad Icesi

Cali, Lunes 12 de Mayo del 2003

Examen Final
Respuestas Sugeridas Versión con Asterisco
Econometría 06169

Profesor: Julio César

1. (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte) *

Falso o Verdadero

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2)$

Falso, $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Unicamente en el caso que $E(X) = 0$ tendremos que $\mathrm{Var}(X) = E(X^2)$.

b) Siempre que el supuesto de normalidad del término aleatorio de error es violado en un modelo de regresión multiple, los estimadores MCO son MELI.

Verdadero, El supuesto de normalidad no afecta para nada que los estimadores MCO sean MELI. Recuerden que el supuesto de normalidad no es necesario para que se cumpla el Teorema de Gauss-Markov.

c) Un investigador plantea el siguiente modelo para estudiar los determinantes del salario de los asalariados caleños: $w_i = \beta_1 \text{añosDeEstudio}_i + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 \cdot D_{2i} + \varepsilon_i$, donde

$$D_{1t} = \begin{cases} 1 & si \text{ indiv i es hombre} \\ 0 & o.w.. \end{cases} \qquad D_{2t} = \begin{cases} 1 & si \text{ indiv i es mujer} \\ 0 & o.w.. \end{cases}.$$

El modelo anterior tiene problemas de multicolinealidad perfecta.

Falso, el modelo tiene dos variables dummy y no tiene intercepto. Así no habra problemas de multicolinealidad perfecta.

d) El modelo $Y_i = e^{(X_1)^{\beta_1}} (X_{2i})^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i$ es linealizable.

Falso, Aún tomando logaritmo a ambos lados tendremos:

$\ln(Y_i) = (X_1)^{\beta_1} + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \ln(\varepsilon_i)$. Claramente este no es un modelo lineal.

2. (40 puntos)

El econometrista del Departamento de Planeación Nacional (DNP) de la Republica caribeña de Banana Republic se ha enfermado y usted ha sido contratado como remplazo de él. El DNP de la Banana Republic desea estimar el siguiente modelo macroeconmico.

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 r_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_t + u_t \qquad (2)$$

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 I_t + \gamma_3 M_t + \nu_t \qquad (3)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \qquad (4)$$

Donde C_t, Y_t, I_t, M_t, G_t denotan el consumo de los hogares, el producto, la inversión de los privados, la cantidad de dinero y el gasto público. respectivamente. Estas variables estan medidas en billones de pesos. Por otro lado, r_t corresponde a la tasa de interes medida en puntos porcentuales. ε_t, u_t y υ_t corresponden a términos aleatorios de error. Responda brevemente las siguientes preguntas:

a) Identifique las variables endógenas y exógenas del sistema de ecuaciones. **(5 puntos)**

Variables Endógenas: $C_t \quad Y_t \quad r_t \quad I_t$

Variables Exógenas: $M_t \quad G_t$

b) Explique brebemente en que consiste el problema de identificación. **(5 puntos)**

El problema de identificación se refiere a la posibilidad o no de econtrar los parámetros de las ecuaciones de la forma estructural a partir de la forma reducida. Si una ecuación está perfectamente identificada, esto significa que existe una forma univoca para encontrar los coeficientes de la forma estructural a partir de la forma reducida. Si una ecuación está sobreidentificada, entonces existirá mas de una forma de econtrar los coeficientes de la forma estructural a partir de la forma reducida.

c) Determine cuales de las ecuaciones del (1) al (4) están subidentificadas y probablemente sobre o perfectamente indentificadas. **(5 puntos)**

Para cada una de las primeras tres ecuaciones tenemos:

$g_1 := 3 \quad g_1 - 1 = 2 \quad k_1 = 2$ Entonces esta ecuación estará prob. **Perfect. Identificada**

$g_2 := 3 \quad g_2 - 1 = 2 \quad k_2 = 2$ Entonces esta ecuación estará prob. **Sobre Identificada**

$g_3 := 2 \quad g_3 - 1 = 1 \quad k_3 = 1$ Entonces esta ecuación estará prob. **Perfect. Identificada**

Noten que la ecuación (4) es una identidad y por tanto no es relevante el problema de identificación para esta identidad.

d) Escriba la ecuación estimada por el econometrista. (Los resultados se encuentran al final) ¿Corresponde está ecuación a una ecuación de la forma estructural o de la forma reducida? **(5 puntos)**

El modelo que fue estimado es $I_t = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_t + u_t$

En especial la ecuación estimada es $\mathrm{Ihat}_t = 6.6789 + 0.7358 \cdot r_t - 1.40 \cdot Y_t$

Esta ecuación estimada corresponde a la forma estructural

e) Interprete y explique brevemente el significado y la significancia de los coefcientes estimados **(5 puntos)**

Noten que esta ecuación coresponde a una función de demanda de inversión. Por tanto

$\beta hat_1 = 6.6789$ Es la inversión que no depende ni de la tasa de interes ni del prodducto. Este coeficiente no es significativo

$\beta hat_2 = 0.7358$ Un aumento de un punto porcentual en la tasa de interés implicara un aumento de 0.7358 billones en la inversión. Este coeficiente es significativo al 1%.

$\beta hat_3 = -1.4$ Un aumento de un billon de pesoso en el PIB implicará una disminución de 1.4 bilones en la inversión planeada. Este coeficiente es significativo al 1%.

f) Describa brevemente como probaría usted la siguiente hipótesis: "Las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto" **(5 puntos)**

Para investigar si las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto, debemos considerar la forma reducida para el producto interno bruto. Es decir,

$$Y_t = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t + \mu_{1t}$$

Ahora, esta hipótesis puede ser probada por medio de la siguiente hipotesis nula: H_0: $\pi_{13} = 0$ versus la hipótesis alterna H_A: $\pi_{13} \neq 0$. Esto se puede hacer facilmente por medio de una prueba t.

g) Se cree que en años recesivos el efecto del gasto público sobre el PIB es positivo, mientras que en años de expansión el gasto público no tiene ningún efecto en el producto. ¿Cómo se podría incluir esta hipótesis en nuestro estudio? Escriba una ecuación de la forma reducida que recoga esta idea y compruebe que el modelo si recoge esta hipótesis. Explique claramente como lo haría y demuestre que su método funcionaría. **(10 puntos)**

Sea

$$D_t = \begin{cases} 1 & si \;\; t \text{ año recesivo} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Ahora consideremos de nuevo la forma reducida para el PIB, pero incluiremos el cambio en la relación del gasto publico y el PIB. Es decir:

$$Y_t = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot D_t \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t + \mu_{1t}$$

Noten que en caso de un año resecivo, $D_t = 1$, y por tanto

$$E(Y_t) = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t$$

Y en caso de que el año sea de expansión tendremos, $D_t = 0$ y por tanto

$$E(Y_t) = \pi_{11} + \pi_{13} \cdot M_t$$

Por tanto prodríamos probar esta hipótesis por medio de una hipótesis nula H_0: $\pi_{12} \leq 0$ versus la hipótesis alterna H_A: $\pi_{12} > 0$.

3. (40 puntos)

Un empresario de productos lacteos supone que la cantidad vendida y_t de sus productos (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ... \qquad (*)$$

donde X_{2t} represta el tiempo de propaganda en televisión en el periodo t (medido en horas) y X_{3t} represta el logaritmo del número de avisos de propaganda en revistas en el periodo t (medido en 100 avisos). Ademas se sabe que:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 (X_{2t})^2 \qquad E(\varepsilon_j \varepsilon_i) = 0 \text{ para todo } i \neq j$$

a) ¿Cúales propiedades deben cumplir el término de error aleatorio para obtener estimadores MELI? **(5 puntos)**

De acuerdo al teorema de Gauss-Markov para obtener estimadores MELI para los párametros β, el término de error debe cumplir las siguientes condiciones:

- Media cero, es decir $E(\varepsilon_t) = 0$
- Varianza constante (Homocedasticidad) ($Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$), y
- Linealmente independientes entre si (No - Autocorrelación) ($E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0$ para todo $i \neq j$)

b) ¿Que otros supuestos deben cumplirse para obtener estimadores MELI? **(5 puntos)**

De acuerdo al teorema de Gauss-Markov para obtener estimadores MELI para los párametros β, además se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Exista una relacion lineal entre y y las X´s
2. Las X´s son no estocasticas y linealmente independientes entre si.

c) ¿Qué supuesto es violado en este caso?¿Cómo solucionaría el problema? **(5 puntos)**

En este caso se viola el supuesto de homoscedasticidad. Es decir el término de error no tiene varianza constante. El problema se puede solucionar facilmente empleando los mínimos cuadrados ponderados. Es decir, dividiendo todo el modelo por X_{2t}.

Para los últimos 9 períodos se obtuvieron los siguientes valores:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_{2t})^2} = 16 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2t}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t}{(X_{2t})^2} = 13 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t}{X_{2t}} = 9 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{3t})^2}{(X_{2t})^2} = 10 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t \cdot X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_t)^2}{(X_{2t})^2} = 25$$

d) Forme la matriz $X^T X$ **(5 puntos)**

Es facil obtener

$$X^T X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo; además estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de los β´s. **(10 Puntos)**

La correspondiente matriz inversa es

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Primero debemos armar la matriz $X^T y$. En este caso tenemos que:

$$X^T y = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que:

$$\beta_{hat} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Noten que

$$\beta hat = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Además

$$s^2 = \frac{y^T \cdot y - \beta hat^T \cdot X^T \cdot y}{n}$$

Nota: Recuerden que el denominador del estimador de MV para la varianza es n y no $n - k$

En este caso $y^T y = 25$, entonces

$$s^2 = \frac{25 - \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{16} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}}{9} = \frac{25 - \frac{1693}{80}}{9} = \frac{307}{720} = 0.426$$

Y la matriz de varianzas y covarianzas delos estimadores MCO es

$$s^2 \cdot \left(X^T X\right)^{-1} = \frac{307}{720} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

f) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados.**(5 Puntos)**

Antes encontramos que

$$\beta hat = \begin{pmatrix} \beta hat_2 \\ \beta hat_1 \\ \beta hat_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La interpretación de estos resultados es la siguiente:

$\beta hat_2 = 1$**,** un aumento de una hora de propagandas de televisión aumentará las ventas en 100,000 unidades

$\beta hat_3 = \frac{2}{5} = 0.4$, un aumento del 1% en los avisos de prensa aumentará las ventas en 40,000 unidades

$\beta hat_1 = \frac{13}{16} = 0.813$, este coeficiente no tiene interpretación económica

g) El asesor comercial de esta firma cree que el modelo verdadero esta dado por $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$. ¿Qué problema existiría en las estimaciones relizadas en el punto **e)** si este modelo fuera en efecto el verdadero? **(5 Puntos)**

En este caso estaríamos incluyendo más variables de las necesarias. Como vimos, los EMCO aún son insesgados, pero no son eficientes.

Estimaciones de EasyReg para la pregunta 2

```
Two-stage least squares:
Dependent variable:
Y = I
Characteristics:
 I
  First observation = 1(=1.1)
  Last observation  = 100(=25.4)
  Number of usable observations: 100
  Minimum value: -1.4614000E+001
  Maximum value: 3.8290000E+001
  Sample mean:   1.0564620E+001

X variables, including instrumental variables:
X(1) = r
X(2) = Y
X(3) = M
X(4) = G
X(5) = 1

Endogenous X variable:
Y*(1)= r
Y*(2)= Y

Exogenous X variables:
X*(1)=1

2SLS estimation results for Y = wdot
Variables                    2SLS estimate   t-value
                                             [p-value]
r                                0.735809    10.579
                                            [0.00000]
Y                               -1.400203    -7.827
                                            [0.00000]
1                                6.678923     1.538
                                            [0.12393]
[The p-values are two-sided and based on the normal approximation]
Standard error of the residuals = 11.036741E-001
Residual sum of squares (RSS) =   11.815536E+001
Total sum of squares (TSS) =      20.476477E+003
R-square =          0.994230
Adjusted R-square = 0.994111
Effective sample size (n) = 100
```