Taller #1
Econometría 06216

Repaso

Profesor: Julio César Alonso
Notas:
- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 10 de agosto.

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. En una reunión un poco aburrida de profesores de estadística se decidió volver un poco interesante la tertulia inventándose un juego. El juego consistía en lanzar dos dados, uno azul y uno rojo, s sobre una superficie plana al mismo tiempo que una moneda de 500 pesos es lanzada al aire. Además, se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado azul es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior del dado rojo es	Remuneración (miles de pesos)
1	-2
2	5
3	-6
4	-20
5	-12
6	-15

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10
Sello	5

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado azul, rojo y la moneda, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X.
b. Calcule el valor esperado de Y.
c. Calcule el valor esperado de Z.
d. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W.

2. Continuando con el ejercicio anterior,
a. Calcule la varianza de X.
b. Calcule la varianza de Y.

c. Calcule la varianza de Z.
d. Calcule la varianza de W.

3. Continuando con el ejercicio anterior,
a. Sea $F = X + Y$, calcule $Cov[W, F]$
b. Sea $Q = ZY$, calcule: $Var[Q]$.
c. ¿Son Q y W (estadísticamente) independientes?
d. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?

4. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 10 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):
a) AB y CB
b) AJ y JA
c) $B^T C$
d) $A^T A$ y $B^T B$

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre
a) $tr(A)$ y $ran(A)$
b) $tr(J)$ y $ran(J)$
c) $\det(CB)$

6. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre
a) $A + J$, $B + C$
b) A^{-1} y $\left[B^T B\right]^{-1}$

Taller #1

Respuestas Sugeridas
Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Carlos I. Patiño
Ana María Lotero

Notas:
- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 10 de agosto.

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. En una reunión un poco aburrida de profesores de estadística se decidió volver un poco interesante la tertulia inventándose un juego. El juego consistía en lanzar dos dados, uno azul y uno rojo, s sobre una superficie plana al mismo tiempo que una moneda de 500 pesos es lanzada al aire. Además, se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado azul es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior del dado rojo es	Remuneración (miles de pesos)
1	-2
2	5
3	-6
4	-20
5	-12
6	-15

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10
Sello	5

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado azul, rojo y la moneda, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, tenemos que:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i \times P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{19}{2}=9.5$$

b. Calcule el valor esperado de Y.

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n} Y_i \times P(Y_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Y_i=-\frac{25}{3}=-8.33$$

c. Calcule el valor esperado de Z.

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n} Z_i \times P(Z_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Z_i=\frac{15}{2}=7.5$$

d. Sea $W=X+Y+Z$, calcule el valor esperado de W.

De acuerdo con las propiedades del valor esperado tenemos que:

$$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

Por lo tanto: $E(W)=9.50-8.33+7.5=\frac{26}{3}=8.67$

2. Continuando con el ejercicio anterior,

a. Calcule la varianza de X.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E\left[A^2\right]-\left[E[A]\right]^2$, tenemos que:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{233}{2}-\frac{361}{4}=\frac{105}{4}=26.25$$

b. Calcule la varianza de Y.

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=139-\frac{625}{9}=\frac{626}{9}=69.56$$

c. Calcule la varianza de Z.

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{125}{2}-\frac{225}{4}=\frac{25}{4}=6.25$$

d. Calcule la varianza de W.

Empleando las propiedades de la varianza tenemos que: $Var(W)=Var(X+Y+Z)=Var(X)+Var(Y)+Var(Z)$, por lo tanto:

$$Var(W)=\frac{105}{4}+\frac{626}{9}+\frac{25}{4}=102.06$$

3. Continuando con el ejercicio anterior,
   a. Sea $F=X+Y$, calcule $Cov[W,F]$

Empleando la definición de la covarianza obtenemos:

$$Cov[W,F]=E[WF]-E[W]\cdot E[F]$$
$$Cov[W,F]=E\left[(X+Y+Z)(X+Y)\right]-E[X+Y+Z]\cdot E[X+Y]$$

Resolviendo se obtiene que $Cov[W,F]=95.81$

   b. Sea $Q=ZY$, calcule: $Var[Q]$.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E\left[A^2\right]-\left[E[A]\right]^2$, tenemos que:

$$Var(Q)=E\left(Q^2\right)-\left(E(Q)\right)^2$$
$$Var(Q)=\left[E\left(Z^2\right)\cdot E\left(Y^2\right)\right]-\left[E(Z)\cdot E(Y)\right]^2$$
$$Var(Q)=4781.25$$

   c. ¿Son Q y W (estadísticamente) independientes?

Q y W son independientes si $Cov[Q,W]=0$, es decir, si y solamente si $E(QW)=E(Q)\cdot E(W)$. Consideremos inicialmente el lado izquierdo, es decir

$$E(QW)=E\left[Q(X+Y+Z)\right]=E(QX)+E(QY)+E(QZ)$$
$$E(QW)=E(ZYX)+E\left(ZY^2\right)+E\left(Z^2Y\right)$$
$$E(QW)=-72.0833$$

Ahora el lado derecho:

$$E(Q)\cdot E(W)=-\frac{1625}{3}$$

Dado que $E(QW)\neq E(Q)\cdot E(W)$ se puede decir que Q y W no son estadísticamente independientes.

   d. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?

W^2 y W son independientes si y sólo si $E(W^2W)=E(W^2)\cdot E(W)$. Así, debemos probar si esto es cierto. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(W^2W)=E\left[(X+Y+Z)^2\cdot(X+Y+Z)\right]$$
$$E(W^2W)=E\left[\left(X^2+Y^2+Z^2+2XY+2XZ+2YZ\right)\cdot(X+Y+Z)\right]$$
$$E(W^2W)=\frac{10265}{3}=3421.67$$

Ahora veamos a que es igual el lado derecho:

$$E(W^2)\cdot E(W)=E\left[(X+Y+Z)^2\right]\cdot E(X+Y+Z)$$
$$E(W^2)\cdot E(W)=\left[E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)+E\left(Z^2\right)+2E(XY)+2E(XZ)+2E(YZ)\right]\cdot\left[E(W)\right]$$
$$E(W^2)\cdot E(W)=\frac{13819}{9}=1535.44$$

Por lo tanto, $E(W^2W)\neq E(W^2)\cdot E(W)$ y se concluye que W^2 y W no son independientes.

4. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 5 & 2 & 10\\ 1 & 9 & 8\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 10\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}4 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 5 & 10 & 10\\ 3 & 4 & 12\end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a) AB y CB

$$AB=\begin{bmatrix}86\\ 122\\ 136\end{bmatrix}\qquad CB=76$$

b) AJ y JA

$$AJ = \begin{bmatrix} 39 & 66 & 118 \\ 45 & 70 & 170 \\ 70 & 124 & 192 \end{bmatrix} \qquad JA = \begin{bmatrix} 17 & 62 & 74 \\ 65 & 130 & 210 \\ 35 & 128 & 154 \end{bmatrix}$$

c) $B^T C$

Esta matriz no es conformable.

d) $A^T A$ y $B^T B$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 27 & 23 & 64 \\ 23 & 101 & 116 \\ 64 & 116 & 200 \end{bmatrix} \qquad B^T B = 140$$

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) $tr(A)$ y $ran(A)$

$tr(A) = 1 + 2 + 8 = 11$

$ran(A) = 3$, pues el $ran(A)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn, existen n valores propios). Además $|A| \neq 0$, es decir que A tiene rango completo, es decir $ran(A) = 3$.

b) $tr(J)$ y $ran(J)$

$tr(J) = 1 + 10 + 12 = 23$

$ran(J) = 3$

c) $\det(CB)$

$$\det(CB) = 76$$

6. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) $A + J$, $B + C$

$$A + J = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 10 & 12 & 20 \\ 4 & 13 & 20 \end{bmatrix}$$

$B + C$ no es conformable.

b) A^{-1} y $\left[B^T B\right]^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1563 & 0.3438 & 0.4375 \\ -0.4688 & 0.0313 & 0.3125 \\ 0.6719 & -0.0781 & -0.2813 \end{bmatrix} \qquad \left[B^T B\right]^{-1} = \frac{1}{140} = 0.0071$$