Aplicación de la teoría de la Situaciones Didácticas en la resolución de Problemas matemáticos con Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2 en estudiantes de grado Noveno de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali

Jhon Waynes Potes Delgado y Elizabeth Villanueva Gómez

Universidad ICESI

Notas de autor

Jhon Waynes Potes Delgado y Elizabeth Villanueva Gómez, Facultad de Educación, Universidad ICESI

Esta tesis ha sido financiada por el Ministerio de Educación Nacional

La correspondencia de este proyecto debe ser dirigida a Jhon Waynes Potes Delgado y Elizabeth Villanueva Gómez, Facultad de Educación, Universidad ICESI, Cl. 18 #122-135, Cali, Valle del Cauca

Contacto jwpotes@gmail.com, villanuevag.eli@gmail.com

Aplicación de la teoría de las Situaciones Didácticas en la resolución de Problemas matemáticos con Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2 en estudiantes de grado Noveno de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali

Jhon Waynes Potes Delgado

Elizabeth Villanueva Gómez

Tesis presentada para optar al título de Magíster en Educación

Director de Tesis

José Darwin Lenis Mejía

Magíster en Educación y Desarrollo Humano

Universidad ICESI

Facultad de Educación

Santiago de Cali

2017

Agradecimientos

Elizabeth Villanueva Gómez:

A mi compañero de trabajo y amigo Adolfo León Gómez Lenis, quien facilitó el proceso con sus conocimientos, tiempo y paciencia durante la realización de la tesis.

A mi preciosa Marely que me da ejemplo de tenacidad y disciplina, y es el amor de mi vida… Gracias hija.

Jhon Waynes Potes Delgado:

A mi esposa, padres y hermano por la paciencia y el apoyo brindado.

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Anexos

Resumen

Esta investigación sustenta desde conocimientos teóricos, específicamente, desde los fundamentos propios de la matemática y de la pedagogía, la viabilidad y pertinencia de la aplicación de Situaciones Didácticas, tal como las concibe Guy Brousseau, como una herramienta pertinente para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Para lograr esto se realizó la aplicación de una Situación Didáctica en estudiantes de grado 9º de la Institución Normal Superior Santiago de Cali, para seguidamente hacer el análisis correspondiente y obtener conclusiones al respecto.

Introducción

Esta investigación es prerrequisito para obtener el título de magister en Educación de la Universidad ICESI de la ciudad de Cali.

Hemos escogido el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2 porque forma parte de nuestra práctica laboral en las *Instituciones Educativas Normal Superior Santiago de Cali* y *San Vicente* de Buenaventura.

Seleccionamos dentro de la didáctica a las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, motivados por las clases del profesor Bernardo García Quiroga, en las materias de Campo Didáctico de las Matemáticas y Perspectivas Didácticas en Matemáticas. El diseño de la Situación Didáctica, surgió de un ejercicio durante las clases y nos pareció pertinente investigarla aplicándola al grupo 9-5 de la I.E. NSSC.

Somos conscientes del aporte que significa esta investigación a la calidad de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en grado noveno de educación básica. Nos motivó, por tanto, el deseo de implementar esta situación didáctica como parte del currículo en aras de fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Notamos también que los estudiantes necesitan de herramientas didácticas que les facilite la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, ya que desde nuestra experiencia docente podemos dar fe de la dificultad que implica el aprendizaje de este tema para los estudiantes de grado noveno.

En un primer momento creímos firmemente en que la situación didáctica diseñada podría llegar a ser una motivación crucial para la comprensión de las matemáticas en relación con los problemas cotidianos. Efectivamente así fue como puede verse en las conclusiones. La enseñanza habitual de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, generalmente se realiza teniendo en cuenta solamente la semiótica algebraica y geométrica, dejando de lado las situaciones cotidianas que nos sugiere Brousseau.

Todo lo anterior, sin embargo, requiere de la participación activa del docente, quien dará las pautas necesarias para el desarrollo y el aprendizaje buscado. Nos referimos a la guía que el profesor debe dar al estudiante para que este pueda construir su conocimiento a partir de la experiencia cotidiana presentada como un problema.

En este trabajo nosotros estructuramos la siguiente secuencia: inicialmente abordamos los aspectos generales de la investigación con la presentación del problema, su justificación y sus objetivos; para luego entrar al marco teórico, profundizando en el estado del arte, específicamente en el pensamiento variacional, en su didáctica, es decir, en la articulación que lleva a las situaciones didácticas, sin dejar de lado los fundamentos pedagógicos, sus conceptos fundamentales, sus competencias y su evaluación.

Posteriormente se tuvieron en cuenta apartados referidos a conocimientos específicamente matemáticos como ecuación, ecuación lineal, función entre otros y se hizo énfasis en el paso de una representación semiótica a otra. Finalmente se explica la metodología, el modelo, las tareas, para luego entrar en el trabajo de campo, en la aplicación de la situación didáctica, no sin antes hacer una prueba diagnóstica; y por último la evaluación de dicha aplicación y las conclusiones de la investigación.

Esperamos que nuestra investigación sea un aporte a la formación de los estudiantes de las Instituciones Educativas involucradas, al currículo de dichas instituciones y a la práctica por parte de los docentes para beneficio de la enseñanza en la educación básica. También que esta investigación de un caso puntual, es decir de una situación didáctica, sirva a la comunidad educativa, específicamente a los docentes de matemáticas que impartan el tema de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

1. Aspectos Generales De la Investigación

1.1. Presentación Del Problema

Las matemáticas son fundamentales en la formación de los educandos de la República de Colombia. El Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha implementado mediante decretos reglamentarios como la Ley General de Educación 115 (1994), el Decreto 1860 (1994), entre otros criterios y pasos a adoptar en la formación matemática; también ha diseñado estrategias para evaluar la debida aplicación de estos decretos, entre estas encontramos las pruebas SABER aplicadas a los estudiantes de los grados 3º, 5º, 9º y 11°.

Las pruebas SABER son un punto de partida para detectar las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. En la IE Normal Superior Santiago de Cali, se analizan los resultados de estas pruebas en cada una de las áreas. En lo que compete a las matemáticas, específicamente al grado noveno, los resultados de las pruebas SABER 2016 son los siguientes:

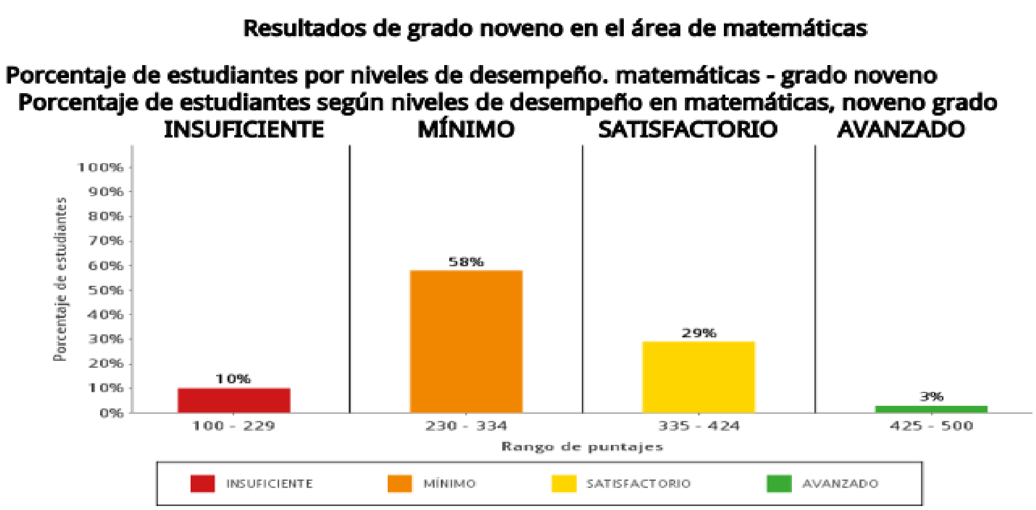


Figura 1. Resultados de la prueba SABER del grado noveno en el área de matemáticas, año 2016.

Tomado de *resultados pruebas SABER 9º - 2016*

Como se puede ver en el gráfico se encuentran dificultades para obtener un porcentaje significativo en el nivel avanzado, el cual solo arroja el 3%. En el nivel mínimo y satisfactorio el porcentaje es del 87%. El porcentaje del nivel satisfactorio es menor al del mínimo, exactamente la mitad. Resulta preocupante tener el 58% de los estudiantes en el nivel mínimo. Estos resultados invitan a realizar acciones para aumentar los niveles satisfactorio y avanzado, partiendo del gran porcentaje que se encuentra en el mínimo.

Ahora bien, en cuanto al análisis comparativo del establecimiento con su ciudad y con el país, se puede evidenciar en el siguiente gráfico, una ubicación aceptable por encima de la media, es decir, que la institución educativa NSSC, tiene mejores resultados tanto en el nivel satisfactorio como en el nivel mínimo con respecto a la ciudad y al país. Sin embargo, en el nivel avanzado está por debajo en un 50% aproximadamente tanto de la ciudad como del país. En cuanto al nivel insuficiente la Institución Educativa, presenta el 50% pero esta vez a favor, con respecto a la ciudad y al país.

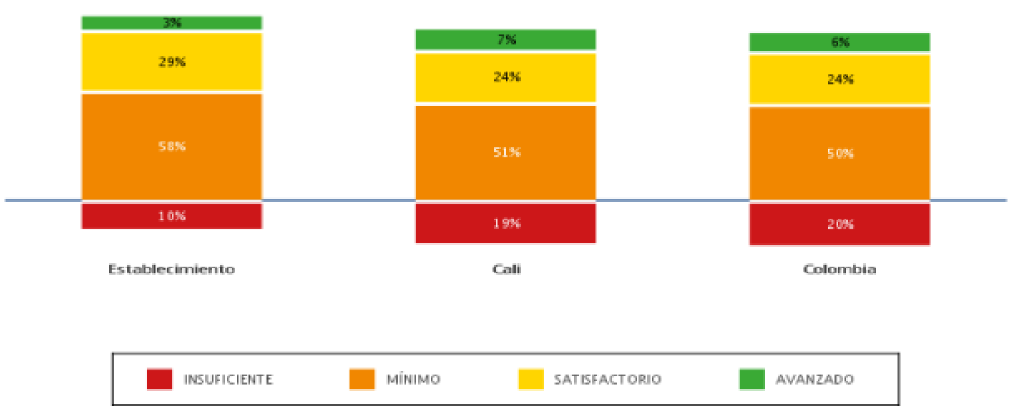


Figura 2. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en el establecimiento educativo, la entidad territorial certificada (ETC) correspondiente y el país. Matemática - grado noveno, año 2016..

El siguiente cuadro muestra el análisis comparativo de la IENSSC con respecto a las otras instituciones educativas de la ciudad, divididas en: sector rural, urbano y colegios privados; se puede notar que la tendencia en el nivel mínimo es bastante similar entre las instituciones del sector oficial. Con respecto al sector privado el nivel satisfactorio de la IENSSC es prácticamente igual, sin embargo, en el nivel avanzado la distancia a favor del sector privado es considerable.

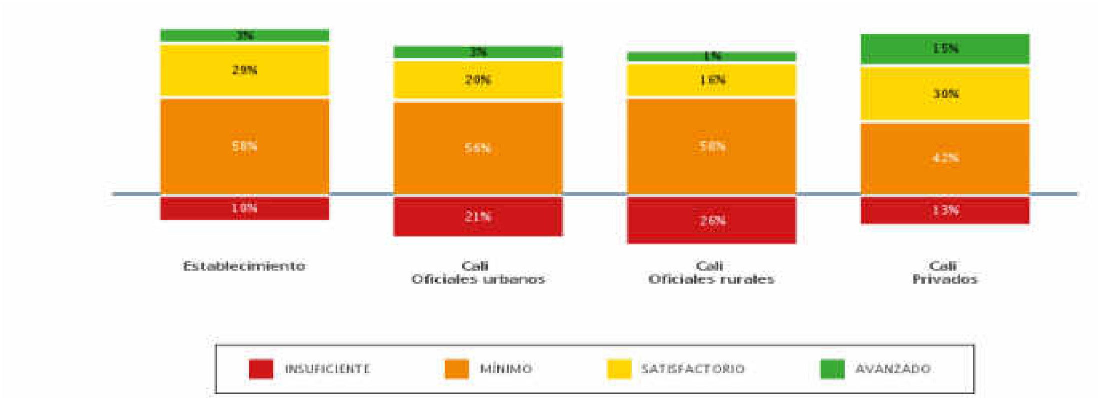


Figura 3. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en el establecimiento educativo y los tipos de establecimientos de la ETC según sector/zona. Matemática - grado noveno, año 2016.Tomado de los resultados pruebas SABER 9° -2016

Se sabe que los cuadros comparativos anteriores arrojan resultados relevantes para la toma de decisiones en lo que tiene que ver con el mejoramiento del currículo, de las metodologías y de las didácticas. Sin embargo, hay un factor que es decisivo en el análisis del rendimiento de las instituciones educativas. Los resultados de las pruebas SABER analizados a la luz de los estratos socioeconómicos, las cuales arrojan diferencias notables que merecen ser tenidas en cuenta. La IENSSC se encuentra ubicada en el barrio Colseguros, que corresponde al estrato 3. Un análisis comparativo entre esta institución con otras ubicadas en el mismo estrato y además con las que están en los estratos 2 y 4, puede dar información pertinente para la detección de los factores que inciden en el rendimiento académico, en sus dificultades y en la prospectiva que permita el mejoramiento de los resultados.

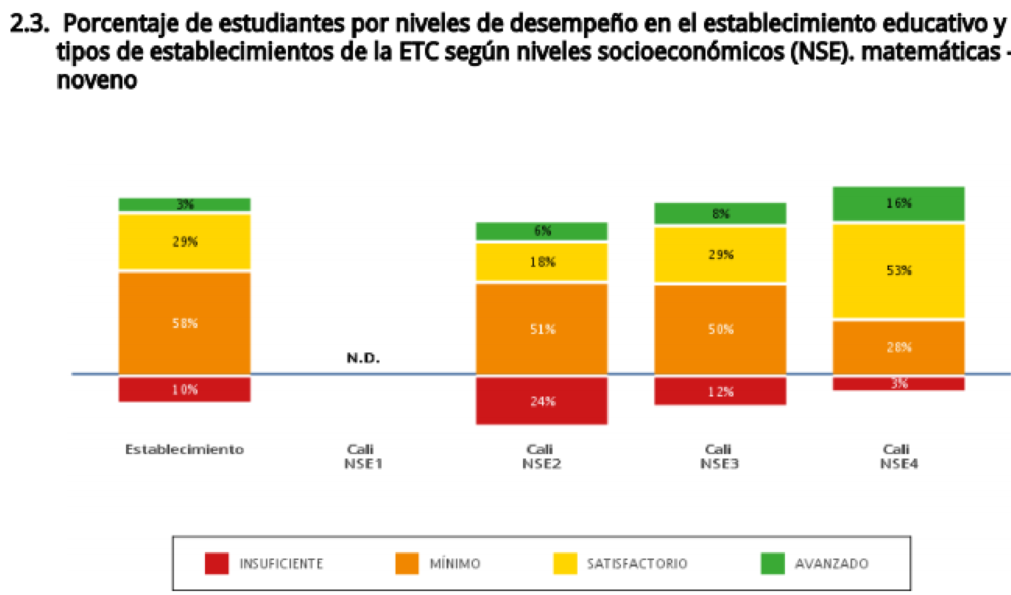


Figura 4. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en el establecimiento educativo y los tipos de establecimientos de la ETC según niveles socioeconómicos (NSE). Matemática - grado noveno, año 2016.Tomado de los resultados pruebas SABER 9° -2016

La IENSSC presenta desempeños similares en los niveles mínimo y satisfactorio con respecto a las otras instituciones de su mismo estrato, sin embargo, en el nivel avanzado está por debajo del promedio alcanzado en el estrato 3. Con respecto al estrato 2, la IENSSC está mejor en los niveles mínimo y satisfactorio, pero en el nivel avanzado está por debajo en un 50%. Ahora bien, en cuanto a la comparación con el estrato 4, las diferencias son considerables, ya que en el nivel avanzado la IENSSC está cinco veces por debajo; y en el nivel satisfactorio el 29% se enfrenta a un 53%. Esto indica que existen dificultades para alcanzar la media del nivel avanzado de estrato 4.

Los siguientes ítems son los resultados sintéticos de los cuadros anteriores propuestos por el ICFES y el puntaje promedio de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali:

El promedio de su establecimiento educativo es:

Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de la entidad territorial certificada donde está ubicado.

Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de Colombia.

Superior al puntaje promedio de los establecimientos educativos oficiales urbanos de la entidad territorial certificada donde está ubicado.

Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de nivel socioeconómico (NSE) 2 de la entidad territorial certificada donde está ubicado.

Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de nivel socioeconómico (NSE) 3 de la entidad territorial certificada donde está ubicado.

Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de nivel socioeconómico (NSE) 4 de la entidad territorial certificada donde está ubicado. (ICFES, 2016)

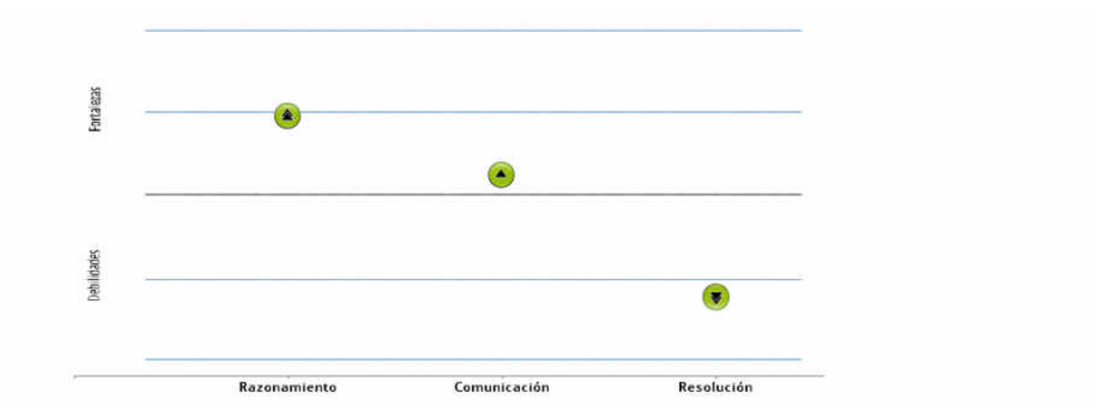


Figura 5. Fortalezas y debilidades relativas en las competencias y componentes evaluados. Matemática - grado noveno, año 2016.Tomado de los resultados pruebas SABER 9° -2016.

La figura anterior muestra los siguientes resultados:

En comparación con los establecimientos educativos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es:

- Muy fuerte en Razonamiento y argumentación
- Fuerte en comunicación, representación y modelación
- Muy débil en Planeamiento y resolución de problemas.

(ICFES, 2016)

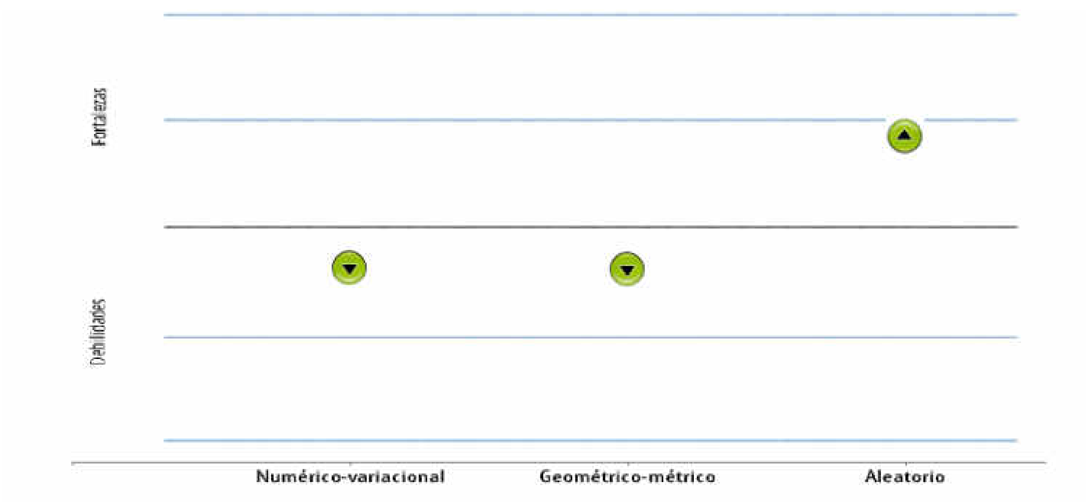


Figura 6. Componentes evaluados. Matemáticas - grado noveno año 2016.Tomado de los resultados pruebas SABER 9° -2016

La figura anterior arroja los siguientes resultados:

En comparación con los establecimientos educativos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es:

- Débil en el componente numérico variacional
- Débil en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación.

- Fuerte en el componente aleatorio

(ICFES, 2016)

En lo que compete a las matemáticas se ha podido evidenciar dificultades en cada uno de los componentes. Para la presente investigación se ha seleccionado el grado noveno, específicamente la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 ya que uno de los principales problemas consiste en el paso del registro verbal al algebraico.

Figueroa en su tesis de maestría advierte a partir de la investigación de Segura (2004): "… existen dificultades para trabajar problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones, […] los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y […] no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales" (Figueroa, 2013, pág. 4).

De otro lado el MEN aporta estándares y lineamientos para la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, estos solo son un insumo valioso que resulta insuficiente para alcanzar los resultados esperados. Por lo que se hace necesario el estudio riguroso de los temas específicos y su manera de enseñarlos.

Dentro de la didáctica de las Matemáticas se pueden encontrar sistemas para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se ha optado por aplicar la Teoría de las Situaciones Didácticas para lograr minimizar las dificultades en dicho proceso.

En síntesis, la pregunta de la investigación es la siguiente: ¿Cómo fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional a partir de la resolución de problemas en los sistemas de ecuaciones lineales 2X2 en el marco de la Teoría de las situaciones didácticas?

Esta pregunta conlleva a la siguiente hipótesis:

Las Situaciones Didácticas (SD) contribuyen en la solución de problemas de ecuaciones lineales en los estudiantes de grado 9 y son una herramienta asertiva para desarrollar el pensamiento variacional.

1.2. Justificación

Los bajos niveles de desempeño en las pruebas SABER (OCDE, 2016) y las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se pueden explicar desde diferentes perspectivas. Los estudiantes que no logran ser competentes en matemáticas por extensión tienen deficiencias en Física y Química. Las oportunidades de acceso a la educación superior y al mercado laboral se reducen por esto (Gómez Hernando, Mitchell Daniel, 2014).

Es necesario repensar la forma en que se están enseñando las matemáticas, porque si este problema persiste se tendrá un déficit de científicos e ingenieros que incidirá en la pérdida de competitividad del país.

"...Son muchas las investigaciones y los trabajos que se han realizado respecto a la temática de ecuaciones lineales, desde los diferentes enfoques tanto a nivel del bachillerato como a nivel universitario lo que nos da pie para ratificar que este es un tema que presenta una gran importancia en el desarrollo de los contenidos específicos de las ciencias" (Arenas, 2013, pág. 19)

Para la presente investigación se ha seleccionado una bibliografía que apunta a desarrollar el contenido matemático en aras de fundamentar el pensamiento variacional, y la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), desarrollada por Guy Brousseau (2017), que permite fortalecer la comprensión del sistema de ecuaciones lineales 2x2.

La función es una parte importante en esta indagación ya que a partir de ella podemos estudiar los fenómenos culturales y naturales acercándonos a la predicción de los mismos. Con la función es posible desarrollar habilidades de observación y de registro de hipótesis susceptibles de ser representadas mediante gráficas. Lo anterior permite identificar las variables correlacionándolas y posibilitando su aplicación en contextos reales (Ministerio de Educación de Educación Nacional, 2006).

Los fenómenos reales son susceptibles de ser interpretados mediante una ecuación lineal, sin embargo, algunos fenómenos son más complejos y requieren de dos o más ecuaciones lineales. Para este caso se dice que se estudian sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

El uso de las gráficas pretende mostrar las tendencias de las funciones lineales comparándolas entre sí; estas son una herramienta muy útil en el análisis de los fenómenos de variación que permite a los estudiantes observar el comportamiento de una función con respecto a la otra, esto ayuda a comprender la tendencia de las funciones en sus correlaciones; y como las funciones remiten a fenómenos reales el estudiante podrá comprender la relación de ellos.

Mediante esta indagación se busca movilizar el currículo de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali, utilizando la Teoría de las Situaciones Didácticas, en relación con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Diseñar y aplicar una SD como estrategia para movilizar el pensamiento variacional en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en estudiantes de grado 9° de la IE Normal Superior Santiago de Cali, de la ciudad de Cali en el año lectivo 2017.

Objetivos Específicos

Diseñar una situación didáctica para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 a estudiantes de grado 9 en la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali.

Aplicar una situación didáctica en la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 a estudiantes de grado 9 en la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali, que contribuya a la comprensión y solución de problemas reales y que potencie en los educandos el pensamiento variacional y las competencias matemáticas representar, argumentar y razonar, utilizando la ayuda del software GeoGebra para su representación gráfica.

Evaluar el grado de efectividad de la aplicación del diseño de una situación didáctica para la resolución de problemas reales a partir de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

2. Marco Teórico

2.1. Estado del Arte

Se entiende por Estado del Arte, las bases teóricas que anteceden a la investigación. Esto incluye no solo las teorías utilizadas, sino también los métodos y las perspectivas que sirven de referente para el desarrollo de la investigación.

Pensamiento Variacional

Pensamiento Variacional.

Se entiende por pensamiento variacional la capacidad de razonar para entender los fenómenos naturales o reales, mediante la percepción de patrones que muestran regularidades en medio de la complejidad de los fenómenos; pero el pensamiento variacional no se queda allí, puesto que por medio de él se pueden predecir, transformar y/o controlar las situaciones y los acontecimientos. Además, se encuentra la manera de representar simbólicamente mediante gráficas, tablas, signos, etc., las regularidades y las repeticiones.

A pesar de que el pensamiento variacional tiene su propia especificidad requiere del apoyo de los otros pensamientos dados en las matemáticas para lograr su propio desarrollo. De otro lado el pensamiento variacional se involucra de manera directa con el funcionamiento de los otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico y aleatorio).

Un concepto clave en la comprensión de pensamiento variacional es la regularidad entendida como unidad de repetición. Las reglas de formación o los criterios con los que descubrimos regularidades llevan a la teoría de conjuntos, debido a que se reconoce una unidad en estas regularidades que se repite por medio de sucesiones o de secuencias. La noción de regularidad es necesaria en la comprensión de las funciones lineales y por ende del pensamiento variacional. Hay diferencias que se repiten, estas también son regularidades. Ahora bien, toda regularidad lleva a un patrón y por consiguiente a una fórmula.

En la educación básica secundaria el pensamiento variacional se desarrolla mediante actividades que involucran, la sucesión de números, las relaciones entre figuras, la visualización, la exploración y la manipulación de objetos que presentan similitudes en las cuales se basa el proceso de generalización.

De otro lado, el pensamiento variacional avanza al involucrar el álgebra como elemento fundamental de su desarrollo, con nociones y conceptos que le son propios como, por ejemplo, la constante, la variable, la función, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra.

> La relación del pensamiento variacional con el manejo de los sistemas algebraicos muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos. (Ministerio de Educación de Educación Nacional, 2006)

Didáctica.

El surgimiento de la Didáctica como teoría se remonta al siglo XVII con la aparición de autores como W.Ratke (1571-1635) y Juan E. Alsted (1588-1638), y principalmente con la obra, *Didáctica Magna* del precursor de la didáctica Juan Amós Comenius quien dejó explícita la relación de la filosofía de la época con una didáctica descriptiva, donde prevalece el saber hacer como un deber. (Pascual, 2011)

Comenio heredó de su maestro Alsted, la conciencia y la intencionalidad de reformar a fondo la enseñanza. Comenio nació en Moravia en 1592, pertenecía a la secta evangélica *Unidad de Hermanos Moravos*, quienes aceptaban los principios luteranos. Sus ideas didácticas pronto llamaron la atención de toda Europa, fue invitado de Polonia a Inglaterra, de Suecia a Hungría y a Transilvania, entre el período 1641 a 1650, con motivo de efectuar reformas escolásticas. También recibió invitaciones análogas de Francia y de la Universidad de Harvard.

El *Orbis* es en occidente el primer texto escolar ilustrado. Esta práctica ha sido acogida hasta ahora como una forma didáctica de acercamiento del educando a la lectura. El fundamento de su pedagogía didáctica es de tinte religioso. Esto quiere decir que todas sus ideas apuntan a la formación moral cristiana. También se encuentra en Comenio un interés muy fuerte por el empirismo de Francis Bacon, quien es el fundador del método científico. Su didáctica no deja de ser una referencia a los problemas cotidianos ni deja de tener como método la referencia a metáforas del contexto rural de la época. (Abbagnano, 2004)

Comenio considera que la comprensión de los saberes se da por auxilio divino, sin embargo, recalca que es la falta de educación la causa de que los hombres se malogren. El hombre necesita de la educación y la gracia nos llega a través de ella, de sus oportunas experiencias; en palabras de Comenio: “el hombre sin enseñanza, en nada se convierte sino en un bruto”. Comenio conocía el caso de los niños salvajes, estos recibieron una educación tardía y sin embargo no pudieron salir de su estado de ignorancia. En cuanto a la educación para todos, para ricos, pobres, gobernantes, gobernados, tiene un ideal pansófico, “enseñarlo todo a todos” como dice ya en el subtítulo de la didáctica Magna. Esto no quiere decir que se deba enseñar de todo a un estudiante, lo cual es inútil por la brevedad de nuestra vida; la intención de Comenio es más realista, desea que la educación sea armoniosa teniendo en cuenta el microcosmos del hombre, pero siempre relacionándolo lo suficientemente con el cosmos. Se trata de plantear orientaciones generales con el fin de que nadie en el mundo quede desorientado y que por ende pueda expresar un juicio a cerca de estas ideas generales y utilizarlas para un fin particular. (Abbagnano, 2004)

Las consideraciones de Comenio apuntan a fortalecer la escuela pública de la época legitimando el poder político establecido, sin embargo, es a partir de este autor que la didáctica es visualizada como una técnica o serie de prácticas preparadas por el profesor en aras de obtener un objetivo simple que sería facilitar el aprendizaje. Posteriormente surge la perspectiva de J. Rosseau (1712-1778) como una tensión al pensamiento didáctico de Comenio que será desarrollada en los siglos posteriores con ayuda de la psicología y la psiquiatría. Una de las novedades que cabe mencionar expresadas en el libro Emilio (1762) es la concepción del infante no como un adulto pequeño, sino como un ser en formación. Esto implica una visión especial y específica para la didáctica, la cual debe considerar que el niño es "un ser sustancialmente distinto al adulto y sujeto a sus propias leyes y evolución". Es a partir de esta diferenciación que se postulan nuevos modelos que respondan a los intereses, habilidades y necesidades de los infantes.

Es a finales del siglo XIX y XX que se da un impulso significativo al desarrollo de la didáctica como disciplina. I. Nérici, por ejemplo, destaca la didáctica como ciencia y arte basada en datos empíricos; esto implica la necesidad de diseñar o crear procedimientos de acción y comportamientos definidos para la enseñanza. Son muy dicientes sus conceptos: "dirección de aprendizaje", "principios", "procedimientos", "instrucción y educación" que funcionan como principios para la educación. (Pascual, 2011)

> "A partir de los '60 se registran cambios en la sociedad, donde la modernización subordina las estructuras tradicionales a una racionalidad instrumental-estratégica. Avanza la secularización, en la cual la religión será considera parte de lo subjetivo y privado, las ciencias son pensadas y valoradas como productoras de conocimiento y se observa el auge conjunto e interdependiente de la ciencia y la técnica. Ambas, a su vez, son subordinadas ideológicamente a la movilización y avance social que posibilita el progreso científico-técnico". (Pascual, 2011)

Es en este marco que surgen los planteamientos de los años 70, de la filosofía sociológica de J. Habermas (1929-), y de autores muy variados como M. Apple, T. Popkewitz, M. Young, S. Kemis, A. Díaz Barriga, J. Gimeno Sacristán y, S. Barco. Para Barco, la enseñanza y la didáctica en el aula son de forma "micro" y no "macro" con respecto a la realidad social, política, económica, etc., esto significa que prevalece el entorno del "microcosmos áulico" como referente de la didáctica. Podemos sumar la perspectiva crítica de Althusser (1980) quien ve la escuela como un eje fundamental de los aparatos ideológicos de Estado. Esto quiere decir que la pedagogía y la didáctica cumplen una función de reproducción y continuismo social. Este enfoque de Althusser ignora al parecer las teorías de la resistencia social y el alcance de la realidad del aula. Los enfoques macro no tienen en cuenta “los contenidos de aprendizaje específicos, su presentación, desarrollo y articulación didácticas”. (Pascual, 2011)

En los años 80 surge un movimiento en contra de las prácticas educativas influenciado por las películas The Wall, (1982) y La sociedad de los Poetas Muertos (1989), de los directores Alan Parker y Peter Weir respectivamente, en ellas se cuestiona el rigorismo institucional de la educación del siglo XX, la falta de autonomía y participación de los estudiantes en el proceso educativo y los mecanismos de control y de sujeción a los estudiantes.

No hay un consenso entre las teorías anglosajonas y las de Europa Continental sobre la didáctica; sin embargo, existe un consenso sobre su aplicación y su relación con el entorno social, político y cultural. Esto implica modelos éticos y morales acordes al ámbito en el que se circunscriben.

> La didáctica no funciona prescriptivamente, ya que existe una ineteracción constante influenciada por concepciones, construcciones filosóficas, psicológicas, históricas políticas, socio-políticas– entre otras- que no lo permiten, ni hacen posible. Es aquí, de acuerdo con Apple y Popkewitz (1986), veo a la Didáctica en un entorno de principios, especificaciones, procedimientos y técnicas infuidas por los sistemas de valores establecidos en el marco de referencia histórico, que la condicionan. Es decir que las finalidades educativas y por consiguiente las propuestas de realización de los procesos de enseñanza aprendizaje se justificarán por su valor educativo dentro de los conceptos fuertes del pensamiento filosófico imperante dado. (Pascual, 2011)

La fortaleza de la didáctica consiste en su dimensión explicativa y proyectiva. La didáctica pretende y se propone facilitar un entorno para la explicación, delinear un marco para la comprensión y analizar los pasos del proceso en la construcción del aprendizaje, para conseguir intervenciones asertivas que respondan a las finalidades de enseñanza-aprendizaje. (Pascual, 2011)

Situaciones Didácticas De Guy Brousseau.

Parafraseando a Guy Brousseau, se puede definir la teoría de situaciones didácticas como una situación creada por el maestro, en la cual propone al alumno problemas elegidos con un fin determinado, que logre generar en él su propio movimiento, actuar, reflexión y evolución, para que adquiera un nuevo conocimiento; el cual debe poder luego utilizar fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Las situaciones que conforman la situación didáctica, son clasificadas por Brousseau como: *situación de acción, situación de formulación y situación de validación.*

Al parecer la adquisición de un conocimiento pasa por estos tres momentos como un paralelo que se puede encontrar en Quiroga 2001, como: orientación, ejecución y control, equivalentes según García (2015) a: el antes, el durante y el después.

La primera, llamada *situación de acción* "se asume como la fase de concepción u orientación de la actividad, aquí el sujeto la concibe y la representa en su estructura psíquica y emocional". (García, 2015) Se trata entonces, de la "preparación de las condiciones necesarias y suficientes para realizar la acción" Quiroga (2001)

La segunda, situación de formulación "es el proceso de ejecución de la actividad, es el desarrollo de la actividad según se ha concebido" (García, 2015). En palabras de Quiroga "es la transformación producida en el desarrollo de las acciones y operaciones realizadas sobre el objeto"

La tercera, situación de validación "hace referencia a la evaluación y control del proceso y a los resultados de la actividad" (García, 2015) y también a la síntesis, dirigida "a confrontar el desarrollo de la actividad con los resultados obtenidos" Quiroga (2001)

Ahora bien, a continuación, la postura de Brousseau:

Situación de acción.

Es la primera fase. En esta el alumno debe realizar una serie de actividades individuales que lo llevarán a crear conjeturas propias sobre la actividad propuesta por el docente.

Situación de formulación.

En esta segunda fase, los alumnos deben confrontar y comparar con algunos de sus compañeros los procesos realizados y los resultados obtenidos en la situación de acción, hallando coincidencias o tal vez divergencias que les permitirá realizar reflexiones en grupo para acordar conclusiones sobre el proceso de acción.

> De igual manera, en clases de investigación en Ciencias (Hogan y Pressley, 1997), los estudiantes aprenden a dar evidencias que sustenten una posición y también a criticar las conclusiones sin fundamento de sus compañeros de clase: una forma valiosa de retroalimentación. (Shepard, 2006)

Situación de validación.

En la tercera fase los alumnos deben crear argumentos con bases fuertes que les permita afirmar la veracidad y la eficacia de sus teorías.

Posteriormente fue necesaria la institucionalización de los procesos realizados en una situación rescatando los más notables que podrán ser usados luego como una herramienta en nuevas enseñanzas. (Brousseau, Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, 2007)

Institucionalización.

Según Molfino (2010), citado por Castañeda, Rosas y Molina, se entiende por institucionalización, el proceso mediante el cual se conserva el conocimiento, Tiene por objeto preservar el saber para futuras situaciones de aprendizaje. También sirve para organizar detalladamente los pasos secuenciales en la adquisición de las ideas y las intervenciones desarrolladas en los distintos momentos de la situación didáctica. La institucionalización en el aula funciona mediante la utilización de textos escolares, guías, talleres que movilizan, con ayuda de la situación didáctica, los conocimientos matemáticos planeados y ejecutados, la intervención docente en el enfoque o método utilizado para estructurar los problemas planteados, las definiciones y los resultados.

> Brousseau (1986) explica que la función de la institucionalización es la de establecer y dar un estatus oficial al conocimiento referido en una actividad didáctica; particularmente "...define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones 'libres' del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de esas actividades y les da un estatuto" (Brousseau, 1986: 64). (Castañeda Alonso, 2012)

Según Cordero (2006), citado por Castañeda, Rosas y Molina, la institucionalización recoge los productos de los estudiantes, los sintetiza y analiza encontrando generalizaciones, procedimientos y reflexiones en el proceso de adquisición del objeto de saber, en conexión con las orientaciones verbales del docente. "Las cuales constituyen un medio para la construcción de significados en el aula" (R. Cubero et al., 2008). El registro de la institucionalización se sitúa al final de la situación didáctica, es el último momento de conclusión o cierre (Molfino 2010), en donde se sintetiza lo ocurrido, mediante análisis de vídeos, registros escritos, exposiciones, etc. Y se da sentido a todas las acciones realizadas durante la SD. Como es planteado por Brousseau, quien afirma que "…las situaciones de enseñanza tradicionales son situaciones de institucionalización, pero sin que el maestro se ocupe de la creación del sentido: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido" (Brosseau, 1994: 75).

2.2. Fundamentos Pedagógicos para la Enseñanza de las Matemáticas

Para hacer una investigación asertiva en el campo de la enseñanza de las matemáticas, el investigador necesita delimitar sus ámbitos de trabajo y concretar la naturaleza de cada uno precisando y reconociendo los conceptos que le conciernen y que son fundamento. Ahora bien, la didáctica de la matemática concierne directamente a la presente indagación, por lo cual se hace necesario aclarar las nociones y principios propios de este ámbito. (Rico L. , 2012)

Constructivismo.

A comienzos del siglo XX se desarrolló un movimiento llamado escuela nueva conocido también con el nombre de escuela moderna, uno de sus máximos representantes fue Freinet, quien concebía la escuela activa como la prioridad en el reconocimiento del papel del educando en el proceso de enseñanza- aprendizaje. El niño es el agente y sujeto principal en la construcción del conocimiento y no es un receptáculo vacío el cual se debe llenar. Motivado por la libertad el niño aborda los saberes atendiendo a sus necesidades. El trabajo docente consiste entonces, en guiar o ayudar a desarrollar el interés en un ambiente adecuado. El constructivismo es una forma post moderna de ver la escuela nueva o escuela moderna; conserva el énfasis en la importancia del alumno en la construcción de su conocimiento.

> El saber no puede transmitirse unilateralmente del maestro "que sabe" al alumno que no lo hace. El niño, a partir de lo que sabe y conoce adquiere otros saberes, al mismo tiempo que pone en marcha un método de búsqueda, medios de adquisición, un espíritu crítico, un método de análisis y de síntesis. - Vida cooperativa y participativa: El niño aprende a realizar las tareas escolares escritas y prácticas ayudando a los demás en trabajos de equipo. Esto les da el sentido de la responsabilidad. (Chourio Muñoz, 3 MARZO 2008)

Según Carretero, el constructivismo es un modelo pedagógico que tiene en claro el papel fundamental del ser humano en la construcción del conocimiento. Se sabe que el medio tiene gran influencia en nosotros, pero este medio no se llamaría así sin la participación activa del ser humano. Se construyen conocimientos a partir de los preconceptos que se tienen y que se han elaborado a lo largo de la vida relacionándolos con el entorno. (Carretero, 1999)

Según Juan Delval, por el constructivismo el niño construye su propia realidad utilizando representaciones propias diferentes a las de los adultos. De hecho, el niño realiza la construcción de su conocimiento utilizando los instrumentos intelectuales de que dispone. El énfasis está en la capacidad racional del niño para construir su realidad. Sin embargo, este constructivismo entra en juego con las representaciones sociales y las influencias ambientales. (Delval, 2012)

Educación Matemática.

Rico cita a Mead para expresar el concepto de educación de la siguiente manera: se entiende por educación el proceso mediante el cual un sujeto en formación es culturalizado mediante la transmisión de los conocimientos y prácticas de un pueblo. (Mead, 1985, p. 191)

Rico dice que la educación matemática es una herencia cultural recibida de un sistema social mediante una educación estructurada. Las matemáticas forman parte esencial de los conocimientos heredados y por ello son consideradas en el sistema educativo para conservar los legados culturales. En su especificidad la educación matemática transmite las primeras nociones, tales como número y forma, y seguidamente razonamiento, prueba y estructuras matemáticas.

> Desde la perspectiva del especialista consideramos la educación matemática como conjunto de ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional. La educación matemática que se transmite por medio del sistema escolar tiene rasgos epistémicos de actividad científica básica (…) También la actividad de los profesores y los procesos para su formación como profesionales quedan comprendidos dentro de la educación matemática (Rico, Sierra, & Castro, 2000, pp. 352- 353). 3.2. Ámbitos de trabajo en educación matemática Con educación matemática expresamos que nuestro foco de estudio se encuentra en las ciencias del hombre, establecemos su raíz antropológica y subrayamos su dimensión social. (Rico L. , 2012)

Rico formula tres significados de la educación matemática. En el primero dice que abarca un conjunto de "conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores" transmitidos mediante el sistema educativo. Este punto se refiere a la relación de la matemática con la enseñanza y el aprendizaje.

El segundo significado se relaciona con el sistema social articulado a instituciones y profesionales. En este sentido la educación matemática se entiende como las acciones y procesos que posibilitan la enseñanza, la organización que permite la profesionalización docente y facilita la interacción del conocimiento matemático entre profesores y alumnos.

El tercer punto es importante porque no solo se trata de la capacitación de profesionales idóneos para la enseñanza de la matemática, sino también de la investigación y la difusión de las nuevas teorías didácticas y de los sistemas matemáticos. Se hace referencia aquí a la didáctica de las matemáticas como disciplina científica y "La Didáctica de la Matemática tiene como objeto delimitar y estudiar los fenómenos que se presentan durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático" (Rico L. S., 2000)

Objeto Matemático.

El primer momento del conocimiento matemático es la percepción del objeto matemático, la naturaleza de los objetos matemáticos no es tangible, sin embargo, la percepción de este objeto matemático va acompañado del concepto que le es intrínseco. Bruno D`Amore (2005) citado por Ortiz y Murillo, "Precisa que en las matemáticas los conceptos tienen un matiz especial, ya que remiten a objetos no tangibles, abstractos, colmados de representaciones y variados significados." Siguiendo este orden se prefiere la expresión objeto matemático que concepto matemático, este último está unido a una construcción constante del significado llamado "conceptualización". El objeto matemático adopta diferentes representaciones y conceptos susceptibles de registros específicos acordes a la comprensión de cada sujeto. Los significados que de aquí se derivan no son únicos debido al contexto y a los saberes previos del "sujeto que aprende". El concepto matemático no es estático, va cambiando en la medida en que se requiera de un lenguaje matemático más especializado, esto significa que el concepto en su nivel de formalización hasta llegar a ser tan abstracto que "el objeto matemático ya no depende de los diferentes registros de representación semiótica que lo conceptualizaban." D`Amore aclara que debido a esto que los estudiantes no asimilan el objeto matemático propiamente dicho, sino, las situaciones y el contexto en las cuales se da este objeto matemático. (Ortiz Bravo, 2017)

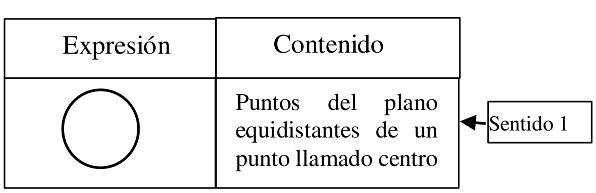
Toda reflexión matemática implica una transformación de signos equivalentes a series de sistemas semióticos dados en cultura determinada, esto quiere decir que el aprendizaje en matemáticas es una actividad semiótica. Se entiende el uso de los signos mediante la identificación de la "actividad reflexiva mediada" que funciona como trasfondo de "la coordinación de sistemas semióticos". Dicho de otra manera, los sistemas activan "configuraciones cognitivas". Desde una mirada amplia, el concepto de un objeto matemático es propiedad de la cultura y trasciende la individualidad del sujeto (Radford, 2006), mientras tanto en el sujeto el significado atribuido a un objeto matemático depende de él mismo y de su contexto. (Rojas Garzón, 2015)

"En términos operativos, planteamos que el sentido de un objeto matemático primario dado es el contenido de la función semiótica que asume dicho objeto primario como expresión (diagrama). (Rojas Garzón, 2015)

Expresión	Contenido
Objeto primario	Sentido del objeto primario

Diagrama Sentido asignado a un objeto matemático primario.

Puede haber diferentes sentidos de un mismo objeto primario (diagrama). Por ejemplo:



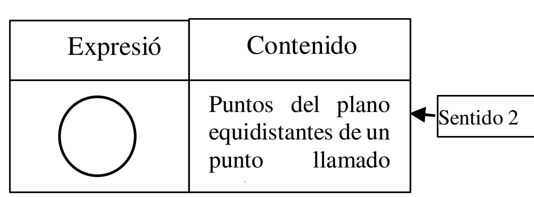


Diagrama Diferentes sentidos de un objeto, que institucionalmente se espera construyan (Rojas Garzón, 2015)

Figura 7. Diagrama sentido asignado a un objeto matemático.

Competencia Matemática Representar (CMR).

En Abrantes citado por García, Coronado y Giraldo (2015 p. 54), la competencia matemática representar puede ser entendida de una manera simple como la capacidad de comunicar mediante lenguaje escrito u oral pensamientos matemáticos. Según Duval, la CMR es para Abrantes la primera función que cumple toda representación semiótica (García, 2015). En esta función se forma la comprensión cognitiva, dicho de otra manera, se trata de fragmentos perceptibles utilizados para comunicar lo representado.

Se puede encontrar un indicio de la CMR en Aristóteles cuando define al hombre como un ser social por naturaleza, esto implica la necesidad de comunicar y por consiguiente la utilización de conceptos, signos, figuras, símbolos, señas, etc., que funcionan como representación de pensamientos e ideas, aún en los casos en donde no es posible una correspondencia con objetos reales, según Sierra González y López (1998), citado por García.

Según García, Heiber y Carpenter (1992) y también Niss y Hojgaard (2011) para comunicar lo que se piensa en matemáticas es necesario acudir a representaciones diversas que den cuenta de los objetos matemáticos; esto implica la utilización del lenguaje oral o escrito, de dibujos y signos.

CONCEPTO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA REPRESENTAR

Proceso de participación en la que los estudiantes movilizan sus aspectos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción, con el propósito de intervenir en el desarrollo o en las soluciones de problemas que se presentan en los diferentes entornos en los que realiza su proyecto de vida y requieran de procesos de codificación, descodificación, traducción y persistencia.

ASPECTOS DEL DESARROLLO HUMANO ASOCIADOS A LA COMPETENCIA MATEMÁTICA REPRESENTAR

COGNITIVO

Conformado por procesos mentales requeridos en la construcción del conocimiento o saber matemático

CODIFICACIÓN. Proceso mental que demanda de signos o gráficos (códigos) para expresar, representar o comunicar de manera general información matemática.

DECODIFICACIÓN. Actividad de pensamiento que requiere de signos o gráficos para expresar, comunicar o representar la información matemática que ha sido codificada.

TRADUCCIÓN. Transformación en la representación de la información matemática al interior de un sistema de representación o de otro sistema de representación.

AFECTIVO

Focaliza su interés en la disposición, en la voluntad y el deseo que muestra el estudiante para responder a una determinada solicitud de conocimiento que puede ser externa o interna

DISPOSICIÓN. Resultado temporal y dinámico; producto de la aplicación de procedimientos, operaciones, estrategias y actividades, que pensadas, reflexionadas y direccionadas por el ser humano determinan su actuar de acuerdo con las situaciones y los contextos en los que actúa.

TENDENCIA DE ACCIÓN

Particularidades propias o inherentes a todo "hombre", incluye formas de pensar, sentir y actuar; son diferentes en cada persona y son determinadas por sus preferencias, inclinaciones, propensión y disposición

PERSISTENCIA. Es la continuación voluntaria de una acción orientada a una meta, sin importar los obstáculos, dificultades o desánimos.

COMPONENTES DE LA CMR

PROCESOS

Acciones que realiza el ser humano de manera voluntaria, libre y consciente para avanzar o progresar de acuerdo a intereses y objetivos planificados

TAREAS

Conjunto de problemas que hacen parte de una situación problémica significativa para el estudiante

NIVELES DE COMPLEJIDAD

Los niveles de complejidad de la CMR se encuentran estrechamente ligados a los niveles de complejidad de los procesos y de las tareas.

Los niveles de complejidad de las tareas dependen de las demandas cognitivas, afectivas y de tendencia de acción, y de los requerimientos de los procesos asociados a estas: codificación Descodificación, traducción, disposición y persistencia

Elementos teóricos de la competencia matemática representar en *Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas*, p. 78

Figura 8. Concepto de competencia Matemática Representar

Competencia Matemática Razonar y Argumentar.

Desde la aparición de las pruebas Pisa en 2013, se emplea en las matemáticas la competencia unificada de: razonar y argumentar; antes de esto se solía hablar de pensar y razonar. Efectivamente no es posible argumentar sin razonar. Ahora bien, razonar implica pensar matemáticamente, y pensar aquí significa examinar, reflexionar, relacionar y por supuesto formar ideas. En cuanto a "razonar", es entendida como discurrir, como el proceso mediante el cual la mente ordena las ideas para llegar a una conclusión. Tanto razonar como pensar implican operaciones mentales. Según Rico y Lupiañez (2008) las competencias nombradas son propias de la actividad matemática y se utilizan en la comprensión de sus preguntas y respuestas. Además, esta competencia posibilita el planteamiento y desarrollo de estrategias y la comprensión en el seguimiento de instrucciones de carácter matemático. (García, 2015)

Las bases de esta competencia se remontan a Aristóteles, específicamente a los silogismos demostrativos de su lógica, en estos se encuentran de una manera inductiva desde la competencia representar hasta la competencia razonar y argumentar. Los elementos que utiliza Aristóteles en esta construcción explicativa de conocimiento son: el concepto, el juicio y el silogismo. Entendiendo por silogismo un razonamiento legítimo que consta de dos premisas, una conclusión y además un término medio que permite el nexo y la inferencia.

En concordancia con lo anterior el MEN plantea los alcances de las competencias representar, razonar y argumentar de la siguiente manera:

> "… dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problemas, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamientos y distinguir y evaluar cadena de argumentos." (MEN, 2014)

CONCEPTO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA RAZONAR Y ARGUMENTAR

Procesos de pensamiento que involucra el conocimiento matemático, los procesos de comunicación y representación, con el apoyo del dominio afectivo y cierto tipo de disposición, hacia el potente apoyo de establecer estrategias y justificaciones en el planteamiento y solución de problemas en una variedad de situaciones o contextos.

ASPECTOS DEL DESARROLLO HUMANO ASOCIADOS A LA COMPETENCIA MATEMÁTICA RAZONAR Y ARGUMENTAR

COGNITIVO
Es un aspecto fundamental del desarrollo humano, susceptible de ser estimulado, promovido y desarrollado: lo cognitivo es aquello que pertenece o está relacionado con el conocimiento, este a su vez, es la apropiación de la información que se dispone gracias a un proceso de aprendizaje.

PROCESOS MENTALES. Actividad cognitiva que la mente tiene que realizar cuando se piensa.

REPRESENTACIÓN. Aspecto fundamental en los procesos de aprendizaje y en forma especial en el aprendizaje de las matemáticas; de hecho, es parte inherente del contenido matemático y de las cogniciones asociadas a la actividad matemática, permitiendo mostrar y avanzar.

COMUNICACIÓN. Parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. La comunicación es un camino para compartir y aclarar ideas matemáticas. A través de la comunicación, los conceptos y procedimientos matemáticos llegan a ser objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación.

AFECTIVO
Es un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición.

DISPOSICIÓN. Es una inclinación o actitud que se tiene hacia la realización de algo; un concepto vinculado a disponer, un verbo que refiere a la disposición anticipada de alguna cosa; es un concepto asociado a la intención o voluntad del sujeto.

TENDENCIA DE ACCIÓN
Propensión, inclinación, preferencia, predilección, disposición, querencia del ser humano de manera natural a realizar cualquier actividad.

PERSISTENCIA. Mantenerse constante en la prosecución de lo comenzado, en una actitud o en una opinión; durar permanentemente o por largo tiempo en la realización de determinada actividad.

COMPONENTES DE LA CMRA

PROCESOS
Acciones que realiza el ser humano de manera voluntaria, libre y consciente para avanzar o progresar de acuerdo a intereses y objetivos planificados.

TAREAS
Propuesta de acción que se les plantea a los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas . Ellas dan información sobre el significado de determinado s conceptos y dirigen su atención hacia un dominio matemático particular.

NIVELES DE COMPLEJIDAD
Los niveles de complejidad de la competencia razonar y argumentar se encuentran estrechamente ligados a los niveles de complejidad de los procesos y de las tareas.

Los niveles de complejidad de las tareas dependen de las demandas cognitivas, afectivas y de tendencia de acción, y de los requerimientos de los procesos asociados a estas: mentales.

Elementos teóricos de la competencia matemática razonar y argumentar en *Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas*, p. 100

Figura 9. Concepto de competencia Matemática Razonar y Argumentar

Concepto de Situación Didáctica.

Las situaciones didácticas son una estrategia fundamental en la formación escolar. Según Panizza (2004) “se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea” (p.60). (Figueroa, 2013)

Las situaciones didácticas son una adaptación del medio del educando a una situación problemática dada en lenguaje matemático. La intervención del docente consiste en el diseño de esta situación didáctica teniendo en cuenta el entorno del estudiante y su posibilidad de vivir la situación planteada. La intención del profesor consiste en lograr que el estudiante se familiarice con las situaciones matemáticas por medio de situaciones reales que este identifica y conoce de antemano.

Wood, Bruner y Ross (1976) llaman andamiaje a la intervención docente dada por medio de guías, indicaciones o estímulos ubicados en la zona de desarrollo próximo (ZDP) con la intención de que los alumnos desarrollen logros que de otra manera serían difíciles de adquirir y, en el peor de los casos inalcanzables. (Shepard, 2006)

Evaluación.

No hay quizá un tema más controvertido que la evaluación en el campo educativo. Desde sus comienzos estuvo vinculada al paradigma de la productividad, específicamente a la búsqueda de la eficiencia del sector empresarial. La principal controversia está en la disputa entre la evaluación cualitativa y la evaluación cuantitativa. Al parecer la evaluación cuantitativa descuida la cualitativa y viceversa. Además los parámetros de la evaluación pueden ser bastante complejos. Se puede hablar de la evaluación del aprendizaje, de la evaluación para el aprendizaje, de la evaluación como aprendizaje o de la evaluación desde el aprendizaje y también se puede considerar la evaluación colaborativa, teconológica, automática, entre otras. Sea lo que fuere, la evaluación no deja de observar procesos y de medir resultados.

La presente investigación cosidera importante la evaluación como aprendizaje, busca fomentar el análisis matemático y la reflexión a partir de la comprensión de una situación didáctica específica. Sin embargo, esto no significa que no sea importante la evaluación del aprendizaje, es decir, del saber, de las competencias desarrolladas, específicamente las competencias representar, razonar y argumentar. Esta indagación además considera la evaluación desde el aprendizaje en tanto que tiene en cuenta los presaberes del educando como punto de partida de la reflexión de la situación didáctica.

Shepard cita a Vygotsky, para enunciar su idea de "la Zona de Desarrollo Próximo" planteada por este en el año 1978, con la cual revolucionó las formas de abordar el aprendizaje y la evaluación; desde entonces quedó claro que cada individuo tiene su propia ZDP, desde la cual puede progresar solo o con ayuda de otro (Shepard, 2006). La diferenciación de las ZDP entre los diversos estudiantes plantea un problema difícil de solucionar al diseñar pruebas estandarizadas. El docente no tiene tiempo suficiente para diseñar pruebas individualizadas acorde a la ZDP de cada estudiante. Esto no significa que el docente no tenga en cuenta un diagnóstico que se acerque en sentido general a una ZDP grupal. El diseño de una SD que sirva como aprendizaje puede ser una respuesta a este problema. Este diseño se basa en situaciones reales conocidas por todo el grupo de estudiantes; para este caso se escogieron dos transportes urbanos (Mio y Ermita), conocidos en el medio y utilizados por la mayoría de los estudiantes. Esto facilita la representación (CMR) del problema por parte del estudiante y le permite razonar y argumentar en torno al sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Es evidente que la evaluación hace parte de la formación, por tanto no se le debe minimizar utilizando evaluaciones fáciles o simples, ya que al hacerlo, se aleja al educando de los verdaderos objetivos que quizá solo se puedan alcanzar mediante una buena evaluación. Estos objetivos no son otros que alcanzar los saberes o contenidos propuestos. La SD de la presente investigación se apropia de evaluación como parte integral de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

De igual modo, en Ciencias, si queremos que los estudiantes sean capaces de razonar y usar el conocimiento científico, entonces debemos darles la oportunidad de explicarse cómo funcionan las cosas, realizando investigaciones y elaborando explicaciones con sus propias palabras, para que así conecten sus experiencias con las teorías del libro de texto. La evaluación, entonces, debe realizarse como parte de estas actividades de aprendizaje significativo. Si los estudiantes realizan un proyecto de investigación en Historia o muestran a la clase cómo resolvieron un problema de Matemáticas, entonces la tarea de la enseñanza es la labor de la evaluación. (Shepard, 2006)

Problemas matemáticos.

El término “problema” y la expresión “resolución de problemas” se abordan desde diferentes enfoques por autores como Pino (2013), Puig (2008), Blanco (1993), Schroeder y Lester (1989), Gaulin (1986) y Schoenfeld (1985), de ellas se destacan: enseñanza para la resolución de problemas; enseñanza sobre la resolución de problemas y enseñanza vía resolución de problemas (*teaching via problem solving*). (Blanco Nieto L. J., 2013)

Se evidencia la existencia de un problema cuando aparece la duda sobre cómo solucionar una situación real. Seguidamente se imaginan formas de solucionar la incertidumbre generada. Aunque la expresión *problema matemático* no tiene una definición única, existe la creencia popular de que este es un enunciado escrito con signos matemáticos que se resuelve mediante procedimientos algorítmicos previamente adquiridos Pino (2013) (Arcavi y Frielander, 2007) esto también fue considerado por Leif y Dezaly (1961) al plantear que los problemas son solucionados con los conocimientos previamente adquiridos.

En palabras de Leif y Dezaly “asegurar el paso desde el conocimiento a su utilización práctica”. Efectivamente los problemas matemáticos no se reducen a expresiones matemáticas, sino que muchas veces, las situaciones cotidianas y reales, entendidas como problemas pueden ser expresadas en lenguaje matemático. Es necesario distinguir los ejercicios dados mediante expresiones matemáticas de los problemas matemáticos representados mediante una situación didáctica. “Un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá, con certeza, a la solución” (Kantowki, 1981, p. 113) Los problemas difieren por su complejidad.

En la educación básica primaria se pueden plantear problemas que reemplazan la suma o la resta, estos se dan únicamente como problemas en las primeras resoluciones, los educandos adquieren la mecánica de la solución de este tipo de problemas simples. Otra cosa muy distinta sucede en la básica secundaria, específicamente en noveno grado, donde no por solucionar una situación didáctica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 el estudiante está facultado para resolver inmediatamente otros problemas sin recurrir antes a las competencias representar, razonar y argumentar. (Blanco Nieto L. J., 2015)

Ecuación Lineal.

En la sesión: Ecuación Lineal del texto *Ecuación Lineal y la función Afín – la recta*, se define la ecuación de primer grado o ecuación lineal como “un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia. En el sistema cartesiano representan rectas". (Calameo)

La siguiente definición de sistemas de ecuaciones lineales se encuentra en Algebra Lineal y Geometría I. Curso 2010/11. Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, tomada de las notas del profesor Manuel Jesús Gago Vargas: "Sea $n \geq 1$ un número natural. Una ecuación lineal es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son números conocidos y x_1 $x_2, \ldots, x_n$ son incógnitas. Los números a_i se denominan coeficientes de la ecuación, mientras que b es el término independiente." (Gago Vargas, 2010/11)

Como se puede ver en el párrafo anterior, los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser de dos o más ecuaciones y con dos o más variables. Esta investigación está enfocada en los sistemas de ecuaciones lineales 2x2; es decir en aquellos conformados por dos ecuaciones con dos variables.

Representaciones semióticas.

Según Raymond Duval (2004) si se quiere indagar la cognición humana, el campo de las matemáticas es idóneo para este tipo de análisis; se encuentran en este estudio de actividades cognitivas matemáticas elementos como "la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos". En dicha indagación se pueden encontrar diversos tipos de lenguaje y de registros de representación o de expresión.

Las matemáticas brindan diversas formas de escritura de sus objetos matemáticos mediante signos, notaciones simbólicas, escrituras algebraicas expresadas mediante figuras, gráficos, símbolos, etc. Las matemáticas posibilitan diferentes formas de representación semiótica, o si se quiere actividades de formación dadas por medio de signos. La facultad de la utilización de operaciones para variar las formas por medio de la cual se entiende un conocimiento es crucial debido a que implica el desarrollo de acciones cognitivas básicas relacionadas con las dificultades y con la comprensión conceptual. La habilidad de comprensión de varios registros de representación semiótica coadyuva la identificación y solución de obstáculos.

Los objetos matemáticos no son reales y por tanto es necesario acudir a diferentes representaciones semióticas para su estudio. Existe el peligro de confundir el objeto matemático con sus representaciones semióticas, lo que podría no permitir la comprensión matemática. De otro lado, existe el error de confundir las representaciones semióticas con las mentales. Es muy común el hábito de olvidar los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas reemplazándolos con imágenes o concepciones sobre el objeto o la situación.

Las representaciones semióticas tienen doble función; de un lado sirven para estudiar y comprender un objeto matemático específico y de otro lado para comunicar el conocimiento de este objeto matemático de generación en generación. Los diversos sistemas de representación semiótica dan luz a los objetos matemáticos, estos serían difícilmente cognoscibles sin aquellos y su tipo de comprensión depende directamente de la representación utilizada. No es igual pensar fraccionariamente que binariamente o que decimalmente, etc. El surgimiento de nuevas representaciones semióticas tiene necesariamente en cuenta al igual que sus predecesoras el lenguaje natural. "La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca" (Duval- 2004). (Oviedo, 2012)

Es muy importante conocer diferentes formas de acceder a un problema matemático, debido al beneficio del desarrollo de múltiples formas cognitivas en los educandos (noética). Es entonces crucial para los especialistas de didáctica de la matemática, saber escoger las condiciones de organización de los cambios de registro; esto con el fin de facilitar el aprendizaje de las distintas formas de representación semiótica de un mismo objeto matemático. (Oviedo, 2012)

La semiótica implica la noética. Es la serie de representaciones semióticas la que posibilita la comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes. No hay aprendizaje sin el debido manejo y comprensión de varios sistemas semióticos de representación. La identificación de la coordinación entre los sistemas semióticos de representación matemática, lleva al estudiante a un aprendizaje con sentido. La dificultad de los estudiantes estriba por lo general, en el hecho de que los objetos matemáticos no son cosas "reales" (no es una cosa como explica Aristóteles), de ahí que sea importante la adquisición de distintas representaciones semióticas correlacionadas.

La percepción en matemática dista mucho de la percepción de objetos físicos o materiales; esto hace de la matemática un campo de objetos abstractos que implican una percepción especial y diferenciada que requiere de representaciones semióticas, símbolos, gráficas, expresiones algebraicas. Esto nos lleva a la paradoja de las matemáticas, la cual consiste en que las representaciones semióticas, que funcionan a la manera de significantes pretenden expresar y comunicar lo incomunicable, es decir, pretenden ser en este caso el objeto matemático mismo.

Lo cierto es que la paradoja funciona y los seres humanos somos capaces de hacer el salto de la semiótica al objeto matemático. "Las representaciones semióticas posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos". Es fácil caer en la confusión entre los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas. Esto sucede cuando el estudiante no tiene concepto alguno del objeto matemático estudiado, se necesita que haya adquirido previamente alguna noción relacional de este objeto, de lo contrario "¿cómo se logra el dominio de los tratamientos matemáticos, ligados a las representaciones semióticas si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos?"

"Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento. Representaciones semióticas y registros semióticos Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis: 1) La presencia de una representación identificable. 2)El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada... 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...". (Oviedo, 2012)

Representación Semiótica de una Función Lineal.

Tipos de registros con diferentes representaciones:

"Concepto: Función Lineal

Registro semiótico r^1: lenguaje algebraico

Representación semiótica $R^1{}_1$: $\{(x, y) / y = -6x +1, x \in R\}$ (escritura conjuntista).

Representación semiótica $R^{1}{}_{2}$: y = f(x): x →-6x +1 (escritura funcional).

Registro semiótico r^2: esquema gráfico

Representación semiótica $R^{2}{}_{1}$:

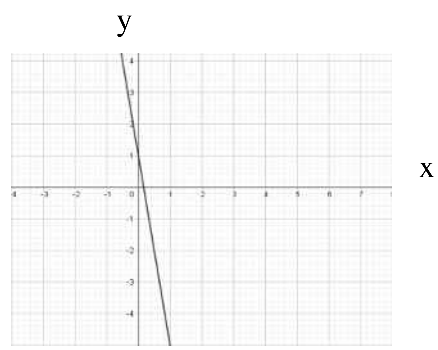


Figura 10. Representación semiótica de una función lineal

Registro semiótico r^4: lenguaje coloquial

Representación semiótica $R^{4}{}_{1}$: Una recta de pendiente -6 y ordenada al origen 1.

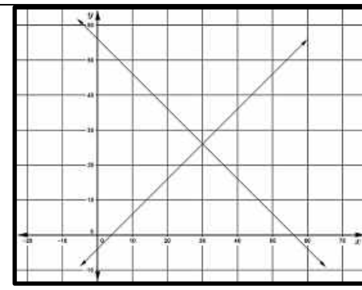
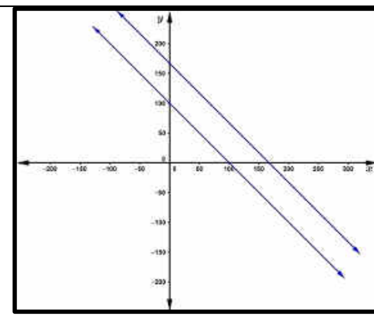
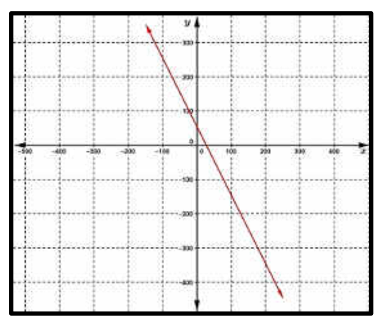
Representación semiótica $R^{4}{}_{2}$: a la variable y se le asigna el valor de la variable x multiplicada por -6 y sumado 1.

Representación semiótica $R^{4}{}_{3}$: Es la recta que corta al eje y en 1 y al eje x en $\frac{1}{6}$ " (Oviedo, 2012)

Ejemplos de representación semiótica de sistema de ecuaciones lineales 2x2.

D´more cita a Duval: "En matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas". En la tabla 2 se muestran diferentes representaciones del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en diferentes registros de representación semiótica que es una adaptación de un cuadro presentado por Segura (2004).

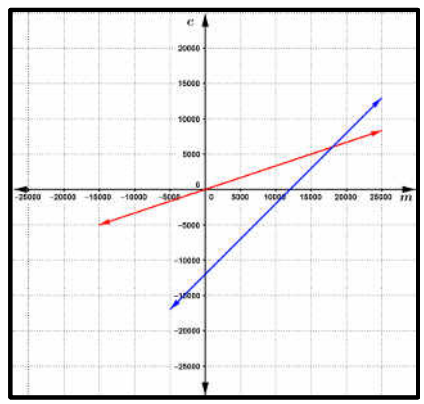
Tabla 1. Representación Semiótica de Objetos Matemáticos

Tabla 1.			
Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de ecuaciones lineales 2 X 2, su solución es un conjunto unitario.	El perímetro de un rectángulo es 56 cm y la diferencia entre su longitud y su ancho es 4 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?	$\begin{cases} x + y = 56 \\ x - y = 4 \end{cases}$	
Sistema de ecuaciones lineales 2 X 2, su solución es un conjunto vacío (no tiene solución)	La suma de dos números es 100 y el triple de su suma es 500. ¿Cuáles son los números?	$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3(x + y) = 500 \end{cases}$	
Sistema de ecuaciones lineales 2 X 2, su solución es un conjunto infinito (infinitas soluciones)	El perímetro de un triángulo isósceles es de 54 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 27. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$\begin{cases} 2x + y = 54 \\ x + \frac{1}{2}y = 27 \end{cases}$	

"En los casos de sistemas de ecuaciones lineales, el tratamiento de una representación en el registro verbal implica otro en el algebraico, pero no en el gráfico" (Segura, 2004, pág. 55)

A continuación, se presenta la adaptación de un ejemplo de coordinación entre las representaciones de los tres registros propuesta por Segura (2004).

Tabla 2. Representación Semiótica en registro verbal

Tabla 2.		
Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
El valor de la entrada al cine cuesta el triple del valor de la entrada al Museo de Arte Moderno. Además, el cine cuesta \$12.000 más que la entrada al museo. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al museo?	$\begin{cases} c = 3m \\ c = m + 12000 \end{cases}$	
El valor de la entrada al Museo de Arte Moderno cuesta la tercera parte del valor de la entrada al cine. Además, la entrada al museo cuesta \$12.000 menos que la entrada al cine. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al museo?	$\begin{cases} m = \frac{1}{3}c \\ m = c - 12000 \end{cases}$	
El valor de la entrada al cine menos el triple del valor de la entrada al Museo de Arte Moderno es cero. Además, la diferencia entre el valor de la entrada al cine y el valor de la entrada al museo es de \$12.000. ¿Cuánto cuestan las entradas al cine y al museo?	$\begin{cases} c - 3m = 0 \\ c - m = 12000 \end{cases}$	

Algo de Historia sobre el Concepto de Función.

Vargas Nuñez (2011) explica que el origen del concepto de función se remonta a los babilonios, posteriormente a los griegos y árabes quienes hacen sus aportes respectivos; luego se encuentran desarrollos del término en Oresme, Galileo, Descartes, Leibniz, Newton, Euler, entre otros, y posteriormente surgen las concepciones relacionadas con la teoría de conjuntos. Para la presente investigación se hará un rastreo de algunos de los conceptos históricos que son pertinentes y sobre todo didácticos.

El lento desarrollo de este concepto, obedece a que las investigaciones matemáticas y los aportes de estos autores se encaminaron a otros temas tales como "la inconmensurabilidad, la proporcionalidad, la disociación entre número y magnitud." Sin embargo no dejaron de aparecer desarrollos en aras del perfeccionamiento del simbolismo algebraico, tales como la trigonometría, la astronomía y la mecánica. (Vargas Núñez, 2011). Dos ejemplos concretos de los obstáculos en el desarrollo del concepto de función, se encuentra en la edad antigua y media:

> Los principales obstáculos epistemológicos que se presentaron en esta etapa fueron la disociación entre número y magnitud; los números eran discretos mientras que la magnitud se consideraba continua. La inconmensurabilidad, la proporcionalidad, la tradición euclidiana, la visión estática de la matemática, la comparación de magnitudes de la misma naturaleza que impedía encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes. La fuerte dependencia de la geometría también se considera un obstáculo que fue superado más adelante con la interpretación de Descartes...
>
> La concepción de variabilidad como una característica exclusiva de las magnitudes físicas se constituye en un obstáculo epistemológico; los matemáticos de esta época consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Existía un nivel desproporcionado entre el nivel de abstracción de las teorías y la falta de un instrumento matemático para su desarrollo. Continuaba también la disociación entre número y magnitud. (Sánchez y Valdés 2007) citados por (Vargas Núñez, 2011)

Vargas Nuñez cita una definición de Euler (1707 – 1783), donde se evidencia la comprensión en lenguaje natural de lo que es una función: “Si algunas cantidades dependen de otras cantidades de modo que, si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es de naturaleza amplia e incluye cada método por el cual una cantidad pudiera ser determinada por otras. Si por consiguiente, denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual depende de en cualquier manera o este determinada por ella es llamada una función de ella” (Vargas Núñez, 2011)

Una definición moderna que es utilizada actualmente y que ha sido preferida para la enseñanza del cálculo es la de Hankel (1839-1873), según Sánchez y Valdés (2007), citados por Vargas Núñez (2011): “se dice que y es función de x si a cada valor de x de un cierto intervalo corresponde un valor bien definido de y, pero sin que esto exija que, y sea definida sobre todo el intervalo por la misma ley en función de x, ni tampoco que y sea definida por una expresión matemática explícita de x”

Por último, una definición relacionada con la teoría de conjuntos, escrita por Bourbki (1939):

> “Sean E y F dos conjuntos, diferentes o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice relación funcional de E hacia F, si, cualquiera que sea x de E, existe un elemento y de F, y uno solo, que esté en la relación considerada con x. Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento x de E el elemento y de F que se encuentra en la relación dada con x; se dice que, y es el valor de la función para el elemento x, y que la función está determinada por la relación funcional determinada” Azcárate, Carmen (1996), Ruiz Luisa (1998) y Sánchez & Valdés (2007) citados por Vargas Núñez (2011)

Función lineal.

En los estándares de competencias básicas el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aparece en los conjuntos de grado 8° y 9° como se ilustra en la siguiente tabla:

Tabla 3. Estándar de competencia básico

Pensamiento matemático	Estándar	Conjunto de grados
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.	8° y 9°

"Este pensamiento [matemático] cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (Ministerio de Educación de Educación Nacional, 2006, pág. 66).

En la fenomenología de otras ciencias, por extensión los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 son utilizados en la Biología, Sociología, Física, ingeniería, economía, nutrición y dietética, para resolver una amplia variedad de problemas, porque facilitan el análisis y la predicción de diferentes fenómenos.

Un nutricionista puede proponer dietas balanceadas a partir de tablas nutricionales que cumplan con unos requerimientos adecuados de vitaminas. En métodos cuantitativos para los negocios o Investigación de operaciones se formulan problemas de programación lineal para optimizar las utilidades de una empresa.

En la fenomenología de lo cotidiano los sistemas de ecuaciones lineales tienen utilidad en la determinación del valor de dos datos desconocidos, conocidas dos relaciones lineales entre ellos. (Garriga, 2011)

3. Metodología

Este trabajo de investigación se utilizará el apoyo del software matemático GeoGebra, creado por Markus Hohenwarter en el año 2002; para facilitar las representaciones visuales de las funciones, propiciando en los educandos una mejor comprensión de los fenómenos reales.

Se aplicará una Situación Didáctica para articular representaciones gráficas de las funciones con su respectivo pensamiento variacional y las competencias matemáticas representar, razonar y argumentar, las dos últimas de acuerdo a los estándares curriculares del MEN.

Estos conocimientos y procedimientos didácticos serán aplicados a los estudiantes de grado noveno (9) de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali con la intención de facilitar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en aras de mejorar la calidad de la educación matemática en esta institución.

Modelo teórico a priori (MTP).

Antes de Kant y de su crítica de la razón pura, las investigaciones seguían el modelo del empirismo de Locke principalmente. Kant instaura en la investigación científica la importancia del sujeto como origen. Para ello explica su concepto de: a priori, como aquello que el sujeto hace sin necesidad de acudir a la experiencia. Esto es muy diferente a decir que a priori es antes de la experiencia. Una cosa es una idea seguida de una experiencia y otra una idea que no involucra la experiencia. En este universo kantiano la experiencia entonces se reduce a una idea. Efectivamente lo que nosotros llamamos experiencia no puede ser otra cosa que una concepción teórica de la misma. Es esto precisamente lo que se entiende por la revolución copernicana en filosofía. El cambio de eje del objeto al sujeto. Ya no es el objeto el que ilumina nuestro entendimiento, sino el entendimiento el que ilumina los objetos del mundo, “La mente lleva ya las categorías y son las cosas las que se conforman a ella” (Gómez Lenis, 2004)

Ahora bien, el modelo teórico a priori (MTP) se debe entender como una estructura, como un orden descriptivo, explicativo de la mente que articula “los componentes de las competencias matemáticas con la actividad matemática de aprendizaje”. Su propósito fundamental es la planeación que permita el desarrollo de las competencias matemáticas del educando mediante tareas que involucran procesos cognitivos. El modelo Teórico es a priori no solo porque es previo a la aplicación de la tarea en el aula (García, 2015), sino también porque es una construcción mental de categorías y competencias matemáticas que se articulan en una fenomenología donde es tenida en cuenta la experiencia. Pero no se trata de la experiencia del empirismo de Locke, sino de las categorías racionales que hacen posible la comprensión de la idea de experiencia.

Se evidencia en el MTP que se parte de asumir el desarrollo articulado de los componentes de una Competencia Matemática (Solar, 2009). Es decir, aplicar el modelo significa que se ha planificado el qué y el cómo de este proceso: el estudiante desarrolla actividad matemática de aprendizaje cuando aborda el proceso de solución de las tareas matemáticas, desarrolla procesos matemáticos, afectivos y de tendencia de acción de complejidad cada vez mayor…” (García, 2015, pág. 32)

El MTP es una estrategia general que respalda la TSD planteada por Guy Brousseau.

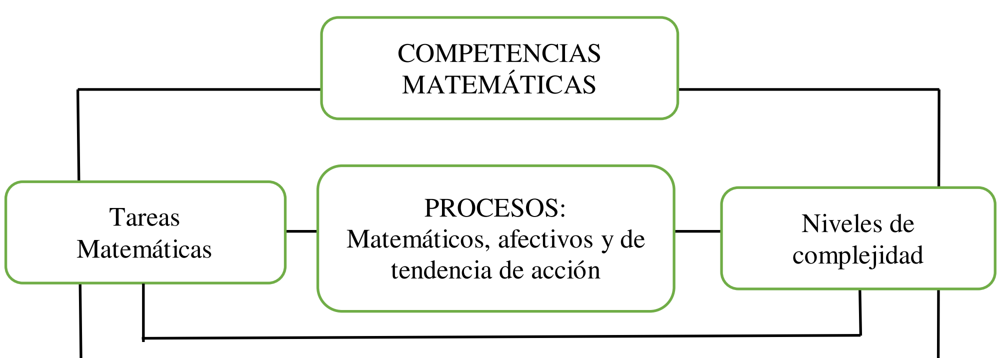


Figura 11. Elementos del modelo Teórico a Priori (MTP).

Método de solución de Sistemas de Ecuaciones lineales 2x2 en la aplicación del trabajo de campo.

"Los números, sus operaciones y los problemas que se resuelven con ellas han sido los objetos de trabajo de los alumnos en la escolaridad elemental" en este apartado se considerarán "las operaciones mismas como objeto de estudio". (Carmen Sessa) Siguiendo esta idea, todos los problemas matemáticos requieren de procedimientos u operaciones para su solución.

En los problemas de los Sistemas de Ecuaciones lineales 2x2 se enseñan básicamente, entre otros, el método de sustitución, de igualación, de reducción, el método gráfico y determinantes para solucionarlos. Para efectos de esta investigación, la aplicación de la prueba correspondiente al trabajo de campo se centrará en el método gráfico. Los estudiantes utilizarán el programa GeoGebra como apoyo para la representación gráfica de cada función, y así, hallar el conjunto solución de la situación didáctica propuesta.

Tareas Matemáticas.

Antes de empezar la tarea el estudiante debe haber pasado por unos procesos pertinentes para su realización, tal como lo presenta García, Coronado y otros (2013): *Proceso asociado al aspecto afectivo*: en este proceso la motivación del estudiante es fundamental.

Según DRAE, "la motivación, es un estímulo que anima a una persona a mostrar interés por una cosa determinada, o, la causa o razón que hace que una persona actúe de una manera determinada." García cita a Belaustegui, 2005, citado por Nuttin "la motivación concierne a la dirección activa de la conducta hacia categorías preferenciales de situaciones o de objetos". El estudiante debe por tanto, relacionar e integrar los aspectos emocionales con los cognitivos para de esta manera organizar su disposición a la acción; si lo hace su atención a los contenidos le permitirán un acercamiento a los objetos matemáticos. (García Q., 2013, págs. 287-288)

Proceso asociado al aspecto de tendencia de acción: este es entendido como una dedicación exclusiva. Según DRAE dedicación es: "acción y efecto de dedicar. Que por compromiso o contrato ocupa todo el tiempo disponible, con exclusión de cualquier oro trabajo". En palabras de García y otros (2013), "corresponde a una entrega intensa a una actividad determinada o fin al que se destina una cosa". Esto implica que el estudiante es movido por una firme determinación a alcanzar el objetivo propuesto en la tarea, su interés y esfuerzo unido al querer del proceso anterior le permite llegar a la práctica de la perseverancia y a los máximos resultados posibles.

Deacuerdo con DRAE comunicar es: "conversar, tratar con alguien de palabra o por escrito. Hacer saber a alguien algo". García cita a Rico y Lupiañez para resaltar la noción de capacidad, dice que es un elemento que implica relacionar lo cognitivo con el contenido y la instrucción. En cuanto a lo cognitivo, el estudiante desarrolla su capacidad en la comunicación; el contenido se refiere a un tema concreto y la instrucción a la comprensión de la tarea o del problema y sus posibles formas de solución. (García Q., 2013)

El concepto de tarea es polisémico, es decir, que puede definirse de diferentes formas; sin embargo en esta investigación se utiliza el significado adoptado por García, quien considera que la tarea es una actividad diseñada intencionalmente para mejorar el aprendizaje en situaciones específicas de enseñanza. (García, 2015, pág. 176) Y también se considera a la tarea como lo indican Rico y Lupiañez (2008), una "expectativa de aprendizaje a corto plazo" en aras de conseguir desarrollar a largo plazo un acercamiento a la competencia buscada, también se coincide con ellos en su postura de que las tareas son una práctica fundamental en el aula de clase. (García Q., 2013, pág. 290)

La palabra tarea proviene del árabe "Tariha" que significa trabajo u obra. Según García y otros (2015), toda tarea demanda esfuerzo y es concebida como una propuesta al estudiante con un objetivo claro y definido. Consiste en aquello que se debe hacer, en una labor dada en un tiempo limitado, es una demanda que requiere reflexión matemática para atender un requerimiento del docente. Aunque en pedagogía la tarea matemática sea equivalente a una actividad, su complejidad conceptual indica para Goñi (2009), un proceso comunicativo diferenciado. Las tareas serían el trabajo propuesto por el docente y la actividad lo que corresponde hacer al estudiante. Moreno (2014), por su parte dice que el docente está excluido de la actividad del estudiante y que debe de interesarse más bien por el planteamiento de la tarea, la manera de proponerla y explicarla en el aula de clase. Son los objetivos y propósitos establecidos los que generan la elaboración de las tareas por parte de los docentes, con el fin de que los estudiantes logren dichos propósitos establecidos. Esto deja en claro que las tareas no son ni arbitrarias ni espontáneas. (García, 2015)

Ahora bien, Gómez (2007), Guerrero (2001), Solar (2009) y Lupiañez (2009) consideran "que la articulación entre tarea y actividad necesita de acciones estructuradas del docente hacia el estudiante". Según Goñi (2009), la comunicación asertiva entre el docente y el estudiante "hace realidad y origina procesos de aprendizaje", y posibilita la triada, contexto, docente, estudiante, cuya dinámica genera necesariamente aprendizaje. Por su parte Lupiañez (2014) considera que tanto las tareas rutinarias como las que no lo son exigen del estudiante un presaber matemático, una disposición y una persistencia. Para Goñi (2009) los ejercicios, las experiencias, los juegos, los problemas, las investigaciones, las síntesis y la elaboración de información son tareas, mientras que "la formulación y resolución de problemas es la estrategia para promover el desarrollo de competencias." (Stigler y Hiebert, 2004; Schoenfeld, 2004; Stein, Grover y Henningsen, 1996, citados por Ponce, Preiss y Nuñez) citados por García (2015); estos autores están de acuerdo en que los problemas deben ser formulados de tal manera que los estudiantes los identifiquen como retos y situaciones desafiantes. Esto posibilita un mejor desarrollo en el avance matemático y un direccionamiento hacia el sentido de la actividad, en el que las competencias matemáticas están en juego. Es entonces clave la calidad del diseño del problema. Lupiañez agrega enfáticamente que "el desarrollo de las competencias matemáticas en un estudiante se evidencia cuando este se enfrenta a tareas complejas en situaciones no cerradas y en las respuestas que da a problemas no convencionales." (García, 2015)

Para García, según Hiebert et al., 1997, citado en Moreno 2014, el hecho de que los estudiantes no perciban "la norma, método o forma de solucionar correctamente" un problema matemático, provoca un reto al estudiante, o cuando dichos problemas están en el marco de situaciones reales, personales o sociales. Moreno (2014) citado por García Bernardo (2015), menciona que los problemas que se enfocan en la comunidad propia, ya sea local, nacional, o global: sistemas de votación, el transporte público, el gobierno, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, las estadísticas nacionales y la economía, son problemas de situaciones sociales; y el tiempo o el clima, la ecología, la medicina, la medición y el mundo mismo de las matemáticas son ejemplos de situaciones científicas.

Las tareas matemáticas deben tener los siguientes criterios: 1. La situación didáctica de aprendizaje debe ser dividida en partes de tal forma que se organicen las tareas de la más simple a la más compleja. Este criterio corresponde a la secuencia planteada por Brousseau, (situación de acción, situación de formulación y situación de validación). 2. Que la tarea sea compatible con "la selección del contenido matemático que se está trabajando" 3. "Que contribuya a lograr los objetivos específicos seleccionados" 4. Que la tarea permita "superar dificultades o errores de los estudiantes." 5. Que las tareas "permitan incorporar recursos y materiales que optimicen el logro de los objetivos de aprendizaje" (García Q., 2013, págs. 290-291)

4. Trabajo de Campo

Entendemos por trabajo de campo una práctica pedagógica desarrollada por los estudiantes y planeada por el docente. Existen muchos tipos de trabajos de campo en matemáticas; a grandes rasgos podemos diferenciar unos que se centran o parten de la experiencia del educando y otros que parten de la teoría para después llegar a su corroboración en la aplicación de pruebas. Esta investigación intentaremos centrarla de acuerdo con el primer tipo, porque guarda una relación conveniente con la TSD, cuando el estudiante se enfrenta con el medio y posteriormente avanza en cada una de las situaciones.

4.1. Aplicación de la Prueba Diagnóstica

Un diagnóstico se diseña y aplica con la intención de conocer los conceptos previos del estudiante relacionados con la Situación Didáctica. Se trata de indagar el manejo de conceptos matemáticos fundamentales por parte de los estudiantes, como pre requisito para la comprensión y solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2. El estudiante debe conocer los conceptos de variable dependiente e independiente, coeficiente, ecuación y ecuación lineal, entre otros, antes del estudio de la Situación Didáctica diseñada. El diagnóstico se hará mediante una prueba escrita con un tiempo de duración, 55 minutos; será aplicada al grupo 9-5 de la IE Normal Superior Santiago de Cali.

Resultados de la prueba diagnóstica

A continuación se presenta la tabla de resultados de la prueba diagnóstica:

Tabla 4. Resultados de la prueba Diagnóstica

No. Estudiantes	Pregunta prueba diagnóstica									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	D	B	C	D	A	C	B	D	D	D
2	D	B	C	C	A	B	B	D	D	D
3	D	B	C	D	A	B	B	D	D	D
4	D	B	C		A	C	B	A	B	D
5	D	B	C	C	A	B	D	D	D	D
6	D	B	C	D	A	C	B	D	D	D
7	D	B	C	C	A	A	B	D	D	D
8	D	C	C	C	A	C	B	D	D	D
9	D	C	C	B	A	C	B	C	D	D
10	D	B	C	D	A	C	B	D	D	D
11	D	C	C	B	A	C	B	D	D	D
12	D	B	C	C	A	B	B	D	D	D
13	D	B	C	D	A	C	B	D	D	D
14	D			B	A	B	B	D	A	D
15	D	B	A	B	A	B	B	D	D	D
16	D	C	C	A	B	B	B	D	D	D
17	A	C	B	C	A	D	B	D	D	A
18	D	B	C	C	A	B	B	D	D	D
19	D	B	C	D	A	C	B		D	D
20	D	B	D	B	A	B	B	D	A	D
21	D	B		B	A	B	B	D	A	D
22	D	B	D	C	A	B	B	D	A	D
23	D	B	C	D	A	C	B	D	D	D
24	D	B	C	D	A	B	B	D	D	D
25	D	B	C	D	A	B	B	D	D	D
26	D	C	B	B	B	B	B	E	D	A
27	D	B	A	B	A	B	B	D	D	D
28	D	B	A	B	A	B	B	D	D	D
29	D	B	C	C	A	B	B	D	D	D
30	D	B	C	D	D	C	B	D	D	D
31	D	B	C	C	A	B	B	D	D	D
32	D	B	B	D	A	C	B	D	D	D
33	D	A	C	C	A	D	C	A	A	D
34	D	C	C	D	A	B	B	D	D	D
35	D	B	C	C	A	A	B	D	D	D
36	D	B	A	B	A	B	B	D	D	D
37	D	B	C	C	A	A	D	D	D	D

38	C	D	C	B	A	C	B	D	A	D
39	D	B	C	D	A	B	D	A	B	A

A continuación, se presentan los resultados de la prueba diagnóstica por ítems, con sus respectivos porcentajes

Tabla 5. Resultados de la prueba diagnóstica con porcentajes

Número de Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Respuestas correctas	D	B	C	D	A	B	B	D	D	D
Total acertadas	37	29	28	13	36	21	35	33	31	36
% de aprobación	95%	74%	72%	33%	92%	54%	90%	85%	79%	92%

3.2. Aplicación de Situación Didáctica

La Situación Didáctica involucra de un lado las competencias matemáticas representar, razonar y argumentar, y del otro, el estándar del MEN: “Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”. (Ministerio de Educación de Educación Nacional, 2006)

Para dar inicio a la aplicación de la Situación Didáctica, los docentes realizan una motivación a los estudiantes explicando las competencias y el estándar a desarrollar, los tiempos estimados para realizar cada una de las situaciones (acción, formulación y validación); la valoración de la SD como evaluación de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, y el número de sesiones necesarias para su aplicación.

Para orientar la Situación Didáctica es necesario obtener y dar información complementaria, iniciando con una evaluación denominada “Prueba Diagnóstica” y continuando con una serie de recapitulaciones al inicio de cada sesión como parte de las intervenciones docentes.

Tabla 6. Instrumento y descripción de la aplicación de la SD

Instrumento	**Descripción**
Conocimientos previos	• 10 preguntas. • Se consideraron temas estudiados en años anteriores. • Trabajo individual. • Reforzamiento de conocimientos previos.
Recapitulaciones	• Recapitulación 1: Lo realizan los profesores al inicio de la sesión 2, repasando y complementando lo trabajado en la sesión 1. • Recapitulación 2: Lo realizan los docentes al inicio de la sesión 3, repasando y complementando lo trabajado en la sesión 2. • Recapitulación 3: Se realiza posterior a la sesión 3, donde los docentes complementaron lo estudiado en la SD.

La Situación Didáctica (Ver Anexo 3) será aplicada a los estudiantes del grupo 9-5, de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali (I.E. NSSCC), caracterizados de la siguiente manera:

Tabla 7. Caracterización de estudiantes

Caracterización de estudiantes	Total estudiantes
Promoción al grado 9º	1
Trasladados de otra I.E.	2
Cursó 8º en la I.E. NSSC	38
TOTAL DE ESTUDIANTES	41

Logros esperados en la puesta en escena de la situación didáctica.

Parte I. Situación de acción.

Tabla 8. Logros esperados en la Situación de acción

Ítem	Tipo de Interacción	Procesos esperados
a	Acción	Se espera que identifiquen los datos conocidos: el costo del pasaje en el transporte Ermita (\$1.200), el gasto mensual por movilidad (80.500) y el número total de viajes en el mes (49).
b	Acción	Se espera que verifiquen si 31 viajes en el MIO (\$1900) más 18 viajes en el transporte Ermita (\$1200), equivalen al gasto total del mes (\$80.500). La conclusión debe ser que Martha tiene razón.
c	Acción	Se espera que determinen el número total de viajes de Laura (56 viajes) y comparen con el dato del problema (49 viajes). La conclusión debe ser que Marcos tiene la razón.
d	Acción	Se espera que identifiquen a la variable x con el número total de viajes de Laura en el MIO y a la variable y con el número total de viajes en la Ermita.
e	Acción	Se espera que los estudiantes encuentren inconsistencia en la formulación de la pregunta y por tanto concluyan que no tiene solución.
f	Acción	Se espera que los estudiantes encuentren inconsistencia en la formulación de la pregunta y por tanto concluyan que no tiene solución.
g	Acción	Dada la ecuación ($x+y=49$) y los valores de la variable independiente x, se espera que el estudiante despeje la variable desconocida (y) hallando su valor y el punto de coordenadas (x, y) correspondiente. Se espera que puedan seguir el ejemplo. Dada la ecuación ($1900x+1200y=80500$) más un ejemplo. Se espera que el estudiante de valores a la variable x para encontrar el valor correspondiente y más el punto de coordenadas (x, y)
h	Acción	En base a lo realizado en el ítem (g), se espera que identifiquen el par ordenado (31, 18) como solución de ambas ecuaciones.
i	Acción	Se espera que el estudiante represente gráficamente cada una de las ecuaciones del inciso g, utilizando algunos de los pares ordenados allí encontrados.
j	Acción	Se espera que identifiquen el punto de intersección de las rectas trazadas, expresándolo como par ordenado (31, 18).
k	Acción	Se espera que el estudiante identifique el par ordenado (31,18) como solución de ambas ecuaciones.
l	Acción	Se espera que relacionen el punto de coordenadas (31,18) con el número de viajes en cada uno de los transportes usados, respectivamente.

Parte II. Situación de formulación.

Tabla 9. Logros esperados en la situación de formulación

Ítem	Tipo de interacción	Procesos esperados
a	Formulación	Se espera que comparen sus trabajos individuales (procesos y resultados) para escoger el sistema de ecuaciones acorde al problema. De tal forma que una de las ecuaciones represente el número total de viajes mensuales y la otra que represente el gasto total de transporte mensual.
b	Formulación	Se espera que resuelvan el sistema de ecuaciones.
c	Formulación	Se espera que el estudiante relacione la solución encontrada del sistema de ecuaciones con el problema planteado. Y que sea consciente de las dos formas de solución aplicadas (geométrica y algebraica)

Parte III. Situación de Validación.

Tabla 10. Logros esperados en la situación de validación

Ítem	Tipo de interacción	Procesos esperados
d	Validación	Se espera que cada grupo de estudiantes escriba sus conclusiones utilizando los incisos g, h, i, j, k, l, y que argumenten mediante socialización sus procesos y resultados.

Puesta en escena.

En esta se aplicó la Situación Didáctica diseñada, en tres (3) sesiones de 110 minutos cada una, en el horario de clases de la asignatura de matemáticas de la Institución Educativa. En la siguiente tabla se presentan las fechas y horas que se utilizaron.

Tabla 11. Sesiones de aplicación de la SD

Sesión	Fecha	Hora
1	18 de octubre de 2017	10:50 a.m. – 12:40 p.m.
2	19 de octubre de 2017	10:50 a.m. – 12:40 p.m.
3	23 de octubre de 2017	10:50 a.m. – 12:40 p.m.

Logros y dificultades encontradas en el desarrollo de las sesiones.

En la primera sesión se evidenció un alto porcentaje de atención e interés en el trabajo. Los estudiantes estuvieron concentrados en la lectura y en el desarrollo de la situación de acción; es posible que se deba a la motivación realizada por los docentes al inicio de la aplicación. No hubo interferencia de unos estudiantes hacia otros. Algunos estudiantes realizaron preguntas a los docentes, pero no pudieron ser contestadas porque se buscaba la mayor autonomía posible por parte de los estudiantes, en su competencia matemática representar y razonar.

En la segunda sesión se realizó la recapitulación y seguidamente se orientó el trabajo hacia una reafirmación de la utilización del programa GeoGebra, para que los estudiantes pudieran representar en este, las ecuaciones halladas, usando los computadores portátiles como herramientas TIC. Aquí se encontraron las siguientes dificultades: no hubo suficientes equipos para realizar la actividad de forma individual, de 38 computadores existentes, solo 17 estaban funcionando, pero en ninguno de ellos estaba instalado el programa GeoGebra, como consecuencia se conformaron los grupos de trabajo de 3 estudiantes; luego se optó por acudir a internet para trabajar en línea, desafortunadamente la conexión falló y no fue posible acceder desde los computadores de los estudiantes; de otro lado, el computador de los docentes contiene el programa GeoGebra y se pudo realizar con él la explicación, utilizando el vídeo-proyector interactivo. Ante la imposibilidad de que los estudiantes pudieran trabajar con sus computadores, se invitaron algunos voluntarios a realizar ejercicios de graficación de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en el computador de los docentes proyectando al grupo los ejemplos en el tablero.

En la tercera sesión se realizó la recapitulación de la sesión 2. Seguidamente se reorganizaron los grupos de trabajo y resolvieron las situaciones de formulación y validación de la Situación Didáctica. Finalmente, cuatro grupos realizaron exposición sobre los incisos de la SD trabajada.

Registro de actividades por sesión.

A continuación, se presenta detalladamente la secuencia de las actividades, la forma de trabajo y el tiempo de duración para aplicar la SD.

Tabla 12. Registro de actividades por sesión

Sesión	**Actividad**	**Forma de trabajo**	**Duración (en minutos)**
Previa a la sesión 1	Prueba Diagnóstica	Individual	90
Sesión 1	Indicaciones Parte I	Realizadas por los docentes trabajo individual	20 90
Sesión 2	Recapitulación 1 Orientación sobre GeoGebra Parte II	Realizada por los profesores Trabajo Grupal	20 40 50
Sesión 3	Recapitulación 2 Parte III Socialización	Realizada por los docentes Trabajo Grupal Exposiciones por grupos	15 30 60
Posterior a la Sesión 3	Recapitulación 3	Realizada por los profesores	55

3.3. Resultados y Análisis de la Aplicación de la Situación Didáctica

A continuación, se relacionan los resultados obtenidos en la aplicación de la Situación Didáctica, realizada a 41 estudiantes del grupo 9-5 de la IE Normal Superior Santiago de Cali, de los cuales entregaron resultados 40 estudiantes.

Para la parte II (Situación de formulación) y parte III (Situación de validación), se conformaron grupos de 3 estudiantes cada uno, exceptuando 1 grupo integrado por solo 2 estudiantes. Se recogieron las conclusiones de 10 grupos, con 3 estudiantes cada uno, y el grupo de 2 estudiantes, para un total de 32 estudiantes. Por tanto, hubo tres grupos que no entregaron las conclusiones.

Las siguientes son las convenciones utilizadas en la tabla de resultados para cada uno de los incisos:

A. Respuestas correctas.
B. Respuestas inconclusas.
C. Respuestas incorrectas.
D. Respuestas en blanco.

A continuación, se presenta la tabla de resultados de la situación de acción:

Tabla 13. Resultados obtenidos en la situación de acción

Parte I. Situación de Acción	**A**	**B**	**C**	**D**
a	**26**	**13**	**1**	**0**
b	**31**	**1**	**8**	**0**
c	**35**	**1**	**4**	**0**
d	**9**	**0**	**27**	**4**
e	**0**	**0**	**39**	**1**
f	**0**	**0**	**32**	**8**
g	**5**	**34**	**1**	**0**
h	**1**	**0**	**12**	**27**
i	**3**	**6**	**4**	**27**
j	**1**	**0**	**0**	**39**
k	**0**	**0**	**1**	**39**
l	**1**	**0**	**0**	**39**

Cuadro comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes:

Tabla 14. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso a

No. De Est.	Resultados	Inciso a	%
40	26	**A**	65,0%
40	13	**B**	32,5%
40	1	**C**	2,5%
40	0	**D**	0,0%

Tabla 15. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso b

No. De Est.	Resultados	Inciso b	%
40	31	**A**	77,5%
40	1	**B**	2,5%
40	8	**C**	20,0%
40	0	**D**	0,0%

Tabla 16. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso c

No. De Est.	Resultados	Inciso c	%
40	35	**A**	87,5%
40	1	**B**	2,5%
40	4	**C**	10,0%
40	0	**D**	0,0%

Tabla 17. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso d

No. De Est.	Resultados	Inciso d	%
40	9	**A**	22,5%
40	0	**B**	0,0%
40	27	**C**	67,5%
40	4	**D**	10,0%

Tabla 18. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso e

No. De Est.	Resultados	Inciso e	%
40	0	**A**	0,0%
40	0	**B**	0,0%
40	39	**C**	97,5%
40	1	**D**	2,5%

Tabla 19. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso f

No. De Est.	Resultados	Inciso f	%
40	0	**A**	0,0%
40	0	**B**	0,0%
40	32	**C**	80,0%
40	8	**D**	20,0%

La siguiente tabla representa las respuestas correctas del inciso g de la Situación Didáctica aplicada:

Tabla 20. Respuestas correctas del inciso g ecuación 1.

$\boldsymbol{x+y=49}$		
x	y	(x,y)
1	48	(1,48)
5	44	(5,44)
9	40	(9,40)
13	36	(13,36)
17	32	(17,32)
21	28	(21,28)
25	24	(25,24)
29	20	(29,20)
31	18	(31,18)
33	16	(33,16)
37	12	(37,12)
41	8	(41,8)
45	4	(45,4)
49	0	(49,0)

Tabla 21. Respuestas correctas del inciso g ecuación 2.

$\mathbf{1900x + 1200y = 80500}$		
x	y	(x, y)
1	48	(1,48)
5	59,17	(5,59.1666666666667)
9	52,83	(9,52.8333333333333)
13	46,50	(13,46.5)
17	40,17	(17,40.1666666666667)
21	33,83	(21,33.8333333333333)
25	27,50	(25,27.5)
29	21,17	(29,21.1666666666667)
31	18,00	(31,18)
33	14,83	(33,14.8333333333333)
37	8,50	(37,8.5)
41	2,17	(41,2.16666666666667)
45	-4,17	(45,-4.16666666666667)
49	-10,50	(49,-10.5)

Continuación del comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes:

Tabla 22. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso g

No. De Est.	Resultados	Inciso g	%
40	5	**A**	12,5%
40	34	**B**	85,0%
40	1	**C**	2,5%
40	0	**D**	0,0%

Tabla 23. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso h

No. De Est.	Resultados	Inciso h	%
40	1	**A**	2,5%
40	0	**B**	0,0%
40	12	**C**	30,0%
40	27	**D**	67,5%

Tabla 24. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso i

No. De Est.	Resultados	Inciso i	%
40	3	**A**	7,5%
40	6	**B**	15,0%
40	4	**C**	10,0%
40	27	**D**	67,5%

Tabla 25. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso j

No. De Est.	Resultados	Inciso j	%
40	1	**A**	2,5%
40	0	**B**	0,0%
40	0	**C**	0,0%
40	39	**D**	97,5%

Tabla 26. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso k

No. De Est.	Resultados	Inciso k	%
40	0	**A**	0,0%
40	0	**B**	0,0%
40	1	**C**	2,5%
40	39	**D**	97,5%

Tabla 27. Comparativo de resultados de la situación de acción en porcentajes inciso l

No. De Est.	Resultados	Inciso l	%
40	1	**A**	2,5%
40	0	**B**	0,0%
40	0	**C**	0,0%
40	39	**D**	97,5%

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la situación de formulación:

Tabla 28. Resultados obtenidos en la situación de formulación

Parte II. Situación de Formulación	A	B	C	D
a	6	4	2	0
b	6	4	2	0
c	5	4	3	0

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la situación de formulación con sus respectivos porcentajes:

Tabla 29. Comparativo de resultados de la situación de formulación en porcentajes inciso a

No Grupos	Respuestas	Inciso a	%
12	6	**A**	50,0%
12	4	**B**	33,3%
12	2	**C**	16,7%
12	0	**D**	0,0%

Tabla 30. Comparativo de resultados de la situación de formulación en porcentajes inciso b

No Grupos	Respuestas	Inciso b	%
12	6	**A**	50,0%
12	4	**B**	33,3%
12	2	**C**	16,7%
12	0	**D**	0,0%

Tabla 31. Comparativo de resultados de la situación de formulación en porcentajes inciso c

No Grupos	Respuestas	Inciso c	%
12	5	**A**	41,7%
12	4	**B**	33,3%
12	3	**C**	25,0%
12	0	**D**	0,0%

A continuación, se presenta los resultados obtenidos en la situación de validación:

Tabla 32. Resultados obtenidos en la situación de validación

Parte III. Situación de Validación	A	B	C	D
d	10	1	0	0

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la situación de validación con sus respectivos porcentajes:

Tabla 33. Comparativo de resultados de la situación de validación en porcentajes inciso d, parte III

No Grupos	Respuestas	Inciso d	%
11	10	**A**	90,9%
11	1	**B**	9,1%
11	0	**C**	0,0%
11	0	**D**	0,0%

3.4. Análisis a Posteriori de la Situación Didáctica

Análisis de la situación de acción.

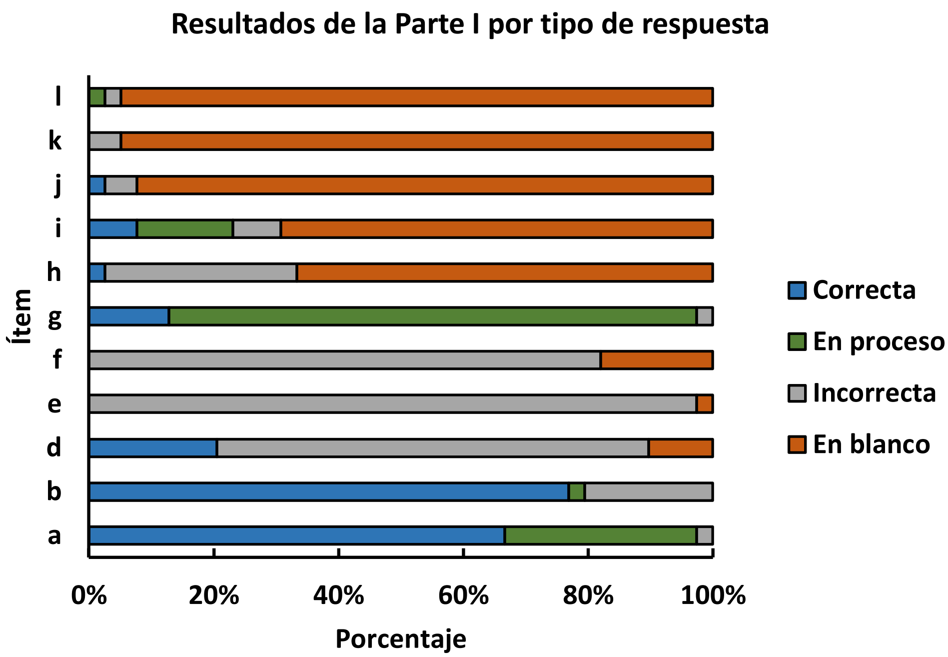


Figura 12. Resultados de la parte I por tipo de respuesta

Inciso a. Se esperaba que identificaran los datos conocidos: el costo del pasaje en el transporte Ermita ($1.200), el gasto mensual por movilidad (80.500) y el número total de viajes en el mes (49).

Veintiséis estudiantes respondieron correctamente, logrando identificar los tres datos restantes, doce estudiantes identificaron parcialmente los datos, uno no identificó por lo menos uno de los datos.

Inciso b. Se esperaba que verificaran si 31 viajes en el MIO ($1900) más 18 viajes en el transporte Ermita ($1200), equivalen al gasto total del mes ($80.500). La conclusión debe ser que Martha tiene razón. Treinta estudiantes respondieron correctamente, logrando identificar la operación $1900(31) + 1200(18) = 80500$ y compararon correctamente este resultado con el gasto mensual de Laura ($80.500), mientras que ocho estudiantes respondieron incorrectamente y un estudiante respondió parcialmente la pregunta, pero sin justificar.

El 76.9% de los estudiantes respondió correctamente éste ítem que corresponde al pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Inciso c. Se esperaba que determinaran el número total de viajes de Laura (56 viajes) y compararan con el dato del problema (49 viajes). La conclusión debe ser que Marcos tiene la razón.

Este ítem fue respondido en el menor tiempo posible y treinta y cuatro estudiantes respondieron correctamente, logrando identificar la operación $19 + 37 = 56$. Cuatro estudiantes respondieron incorrectamente y solo uno parcialmente, porque no justificó su "decisión".

El 87.2% evidenció dominio del pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Inciso d. Se esperaba que identificaran a la variable *x* con el número total de viajes de Laura en el MIO y a la variable *y* con el número total de viajes en la Ermita.

Esta pregunta hizo reflexionar a los alumnos porque demoraron más tiempo de lo previsto.

Después de haber comprendido el texto, solo ocho estudiantes contestaron correctamente.

Se muestra un caso en la siguiente figura:

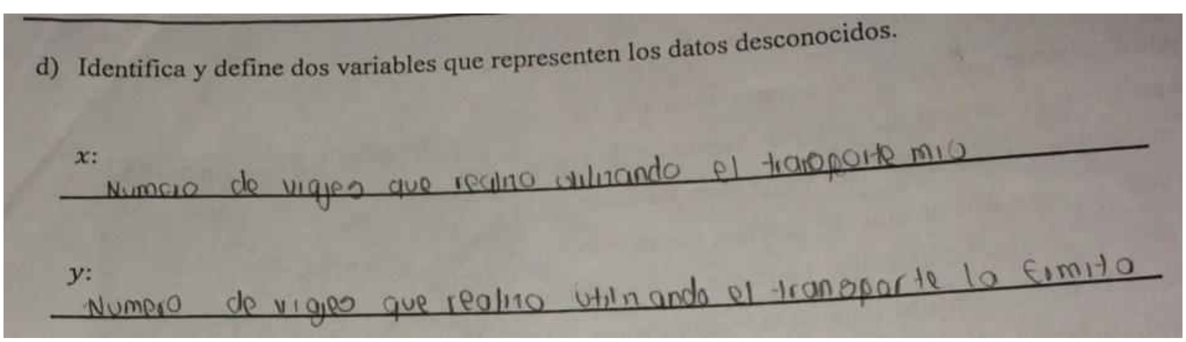


Figura 13: Foto de solución del inciso d, parte I

Cuatro estudiantes no respondieron la pregunta y veintisiete estudiantes, tuvieron dificultades en la definición de las variables y no respondieron correctamente la pregunta.

Algunas respuestas incorrectas fueron:

x: 31.

y: 18.

x :31 viajes del MIO.

y: 18 viajes de Ermita.

Por lo anterior se identificaron problemas en la definición de variables o incluso en la comprensión del concepto, además en la representación semiótica.

Inciso e. Se esperaba que los estudiantes encontraran inconsistencia en la formulación de la pregunta y por tanto concluyeran que no tiene solución.

Treinta y ocho estudiantes respondieron incorrectamente, y uno no respondió la pregunta.

Ninguno de los estudiantes logró identificar que en el contexto del problema la información estaba expresada en meses y la pregunta en semanas, es decir que había alguna "inconsistencia" en sus respuestas.

Inciso f. Se esperaba que los estudiantes encontraran inconsistencia en la formulación de la pregunta y por tanto concluyeran que no tiene solución.

Treinta y dos estudiantes respondieron incorrectamente, y siete no respondieron la pregunta. Ninguno de los estudiantes logró identificar que en el contexto del problema la información estaba expresada en meses y la pregunta en semanas, es decir que había alguna "inconsistencia" en sus respuestas.

Inciso g. Dada la ecuación (*x+y=49)* y los valores de la variable independiente *x,* se esperaba que el estudiante despejara la variable desconocida (*y)* hallando su valor y el punto de coordenadas (*x, y*) correspondiente. Se esperaba que pudieran seguir el ejemplo.

Dada la ecuación (*1900x+1200y=80500)* más un ejemplo. También se esperaba que el estudiante diera valores a la variable *x* para encontrar el valor correspondiente *y* más el punto de coordenadas (*x, y*)

Doce estudiantes evaluaron y completaron la tabla correctamente, treinta y seis estudiantes lo hicieron parcialmente y uno lo hizo incorrectamente.

El 84.6% de los estudiantes presento más dificultades con la ecuación 2.

Inciso h. En base a lo realizado en el ítem (g), se esperaba que identificaran el par ordenado (31, 18) como solución de ambas ecuaciones.

Un estudiante respondió correctamente a éste ítem identificando el par ordenado (31,18) como la solución a ambas ecuaciones, doce respondieron incorrectamente y veinte seis no respondieron la pregunta.

Inciso i. Se esperaba que el estudiante representara gráficamente cada una de las ecuaciones del inciso g, utilizando algunos de los pares ordenados allí encontrados.

Tres estudiantes ubicaron los puntos y trazaron las rectas correctamente, seis estudiantes ubicaron algunos de los puntos, pero no hicieron las gráficas; tres estudiantes ni trazaron ni ubicaron correctamente las rectas; veinte y siete (27) registraron respuestas en blanco.

Inciso j. Se espera que identificaran el punto de intersección de las rectas trazadas, expresándolo como par ordenado (31, 18).

Un estudiante identificó el punto de intersección, mientras que dos respondieron incorrectamente a éste ítem y treinta y seis no registraron respuestas.

Inciso k. Se esperaba que el estudiante identificara el par ordenado (31,18) como solución de ambas ecuaciones.

Dos estudiantes respondieron incorrectamente y treinta y siente no registraron respuestas.

Inciso l. Se esperaba que relacionaran el punto de coordenadas (31,18) con el número de viajes en cada uno de los transportes usados, respectivamente.

Un estudiante logró responder parcialmente la pregunta y uno respondió incorrectamente, mientras que treinta y siete estudiantes no lograron responder la pregunta (respuesta en blanco).

Análisis de la situación de formulación.

En el inciso a., se esperaba que compararan sus trabajos individuales (procesos y resultados) para escoger el sistema de ecuaciones acorde al problema. De tal forma que una de las ecuaciones represente el número total de viajes mensuales y la otra que represente el gasto total de transporte mensual. Los resultados arrojaron que el 50% están en un nivel avanzado, el 33.3% en satisfactorio, el 16.7% en mínimo, y el 0% en insuficiente. La mitad de los estudiantes ha logrado entender el paso de un registro semiótico a otro, es decir, que lograron representar en forma algebraica el problema planteado en lenguaje natural. El 33.3% logró plantear al menos una de las dos ecuaciones, mientras que el 16.7% no logró plantear las ecuaciones correctamente. Todos intentaron resolver este ítem.

En el inciso b., se esperaba que resolvieran el sistema de ecuaciones. Los resultados arrojaron que el 50% está en un nivel avanzado, el 33.3% en satisfactorio, el 16.7% en mínimo y el 0% en insuficiente. La mitad de los estudiantes despejaron correctamente las variables correspondientes encontrando el valor numérico de cada una de ellas. El 33.3% lograron despejar correctamente una de las dos variables, dado que solo tenían una ecuación planteada. El 16.7% no logró encontrar el valor de ninguna de las variables, debido a que no habían planteado correctamente las ecuaciones. Es de notar que existe una correspondencia en los resultados del inciso b, con respecto a los del inciso a; ya que era prerrequisito contestar bien el inciso a para poder resolver lo planteado en el enciso b. Debido a esto no es extraño que se hayan repetido los porcentajes del inciso a en el inciso b.

Inciso c. Se esperaba que el estudiante relacionara la solución encontrada del sistema de ecuaciones, con el problema planteado. De tal forma que se evidencie una comprensión, por parte del estudiante, de las dos formas de solución, geométrica y algebraica. Los resultados arrojaron que el 41.7% de los estudiantes logró un nivel avanzado, mientras que el 33.3% alcanzó un nivel satisfactorio, el 25% un nivel mínimo y el 0% nivel insuficiente. El 41.7% logró hacer correctamente la relación del sistema de ecuaciones con el problema planteado, esto implica que estos estudiantes tuvieron claridad sobre el problema planteado, sin olvidar lo que las variables significaban en el sistema algebraico. Al 33.3% se le dificultó identificar con claridad el lenguaje natural que corresponde al valor numérico de cada variable, es decir, que los números encontrados en el inciso b, responden a preguntas dadas, en el problema planteado inicialmente. Se evidencia una dificultad en el paso de registro semiótico algebraico, al registro semiótico natural. El 25% de los estudiantes confundió el valor semiótico natural de cada variable, ya que, a pesar de identificar fácilmente el paso de registro natural al algebraico, se les dificulta su inversa.

Análisis de la situación de validación.

Se esperaba que cada grupo de estudiantes escribiera sus conclusiones utilizando los incisos g, h, i, j, k, l, y que argumentara mediante socialización sus procesos y resultados. De los 41 estudiantes, correspondientes a 14 grupos, presentaron resultados solo 32 estudiantes, correspondiente a 11 grupos; arrojando los siguientes porcentajes: el 90.9% contestó correctamente, mientras que el 9.1% dejó su respuesta inconclusa. Esto muestra un nivel avanzado del 90.9% en la competencia razonar y argumentar, más un 9.1% de nivel satisfactorio en la misma competencia. Alienta mucho el 0% en los niveles mínimo e insuficiente. Esto implica que los estudiantes de este grupo tienen un fuerte nivel de argumentación matemática.

4. Conclusiones Generales

La Situación Didáctica fue una herramienta útil para involucrar a los estudiantes en las competencias representar, razonar y argumentar; también resultó ser un excelente recurso para que los educandos lograran la comprensión y relación de diferentes registros semióticos.

En la situación de acción se logró poner en juego los conocimientos previamente asimilados por los estudiantes, iniciando el trabajo de evolución hacia conceptos más elaborados. La mayor parte de los incisos relacionados con el pensamiento numérico y sistemas numéricos, se resolvieron positivamente siguiendo las consignas preestablecidas, en cuanto al pensamiento variacional, se notó un nivel avanzado, específicamente en la definición de variables.

La Situación Didáctica ha estimulado el desarrollo del pensamiento variacional, en aras de resolver una dificultad ya planteada en los resultados de las pruebas SABER grado 9º del ICFES 2016. En la prueba SABER se evidenció un nivel mínimo en el componente numérico-variacional; esto sugiere que la Situación Didáctica aplicada ha generado una comprensión que supera este obstáculo.

Las siguientes son las conclusiones de acuerdo con los objetivos propuestos:

Respecto al objetivo general, en el cual se propuso diseñar y aplicar una Situación Didáctica con la intención de propiciar y alcanzar un desarrollo significativo en el pensamiento variacional de los estudiantes, es claro que se logró, como se evidencia en los porcentajes alcanzados por los educandos, tanto en la situación de formulación como en la de validación. También se logró que los estudiantes alcanzaran un alto porcentaje en el nivel avanzado en la resolución de un problema de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Con respecto a los objetivos específicos se diseñó la situación didáctica propuesta como estrategia para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Se cumplió también con la aplicación de la situación Didáctica diseñada para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, seleccionando el grado 9-5 de la I.E. Normal Superior Santiago de Cali. También se contribuyó a la formación de la comprensión de situaciones cotidianas a partir del medio propuesto en la SD. Se consiguió también potenciar el desarrollo del pensamiento variacional y las competencias representar, razonar y argumentar por medio de los registros semióticos.

Los resultados de la aplicación del diseño de la *Situación Didáctica* propuesta, se pueden evidenciar en la siguiente tabla de porcentajes de respuestas correctas obtenidas en los incisos que forman parte de la SD.

Tabla 34. Porcentaje de respuestas correctas.

Parte I	
Inciso	% correctos
a	65,0%
b	77,5%
c	87,5%
d	22,5%
g	12,5%
h	2,5%
i	7,5%
j	2,5%
l	2,5%
Parte II	
a	50,0%

b	50,0%
c	41,7%
Parte III	
d	90,9%

Para finalizar consideramos que el hecho de que más del 90% de los estudiantes respondieron correctamente el inciso d, de la parte III; y que hayan alcanzado en 4 incisos de las partes I y III el 65% y más, de respuestas válidas, son indicios de mejoramiento en el pensamiento variacional comparado con los datos obtenidos del ICFES 2016, que se citan en la página 19 "Débil en el componente numérico variacional" y "muy débil en el planteamiento y resolución de problemas."

Nos parece pertinente terminar esta investigación haciendo las siguientes recomendaciones:

1. Incorporar en el Departamento de Matemáticas de la IE NSSC una unidad o una sección sobre las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau para la enseñanza de las matemáticas.
2. Sugerimos muy respetuosamente, a la Secretaría de Educación Municipal de Santiago de Cali, que, en los espacios de actualización pedagógica, generados en las semanas de desarrollo institucional, se incorporen temas sobre didáctica para enseñanza de las matemáticas, especialmente las *Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau.

5. Bibliografía

Abbagnano, N. &. (2004). *Historia de la pedagogía.* México: Fondo de Cultura Económica.

Anacona, M. (2003). La historia matemática en la educación matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Arenas, B. S. (2013). Tesis de maestría. *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas*. Medellín, Antioquia, Colombia.

Blanco Nieto, L. J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo. *Campo Abierto, 32*(1), 137-156.

Blanco Nieto, L. J. (2015). *La Resolución de Problemas en Matemáticas.* Cáceres, España: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones.

Bohorquez S., Á. (17 de 08 de 2016). *Colombia Aprende*. Obtenido de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/agenda/noticias/pedagog%C3%ADa-y-did%C3%A1ctica-aliadas-estrat%C3%A9gicas-de-la-educaci%C3%B3n

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. En G. Brousseau, *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (págs. 21, 22,23,24,25, 26, 27, 28, 29, 30, 31). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (2007). *Introducción al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Calameo. (s.f.). Obtenido de http://es.calameo.com/books/0000727350af418e22251

Carretero, M. (1999). Constructivismo y educación. México: Progreso.

Castañeda Alonso, A. &. (Enero de 2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula. (Scielo, Ed.) *Perfiles educativos, 34*. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982012000100003

Chourio Muñoz, J. A. (3 MARZO 2008). PENSAMIENTO E IDEAS PEDAGÓGICAS DE CÉLESTIN FREINET. *REDHECS, EDICIÓN 4*.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* (M. I. Fadiño, Trad.) México D.F.: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

D'Amore, B. (2005). *Bases Filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Barcelona, España: Reverté S.A.

Delval, J. (2012). El Constructivismo y La Construcción del Conocimiento Social. *Apuntes de Psicología*, 99-109.

Figueroa, R. E. (2013). Tesis de maestría. *RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES. UNA PROPUESTA PARA EL CUARTO AÑO DE SECUNDARIA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS*. Lima, Perú.

Gago Vargas, M. J. (2010/11). *http://www.departamento.us.es/da.* Obtenido de http://euclides.us.es/da/apuntes/alige/alige-I-1.pdf

García Q., B. E. (2013). *Competencias Matemáticas y Actividad Matemática de Aprendizaje.* Cali: Artes Gráficas del Valle.

García, B. C. (2015). *Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas.* Florencia: Universidad de la Amazonía.

Garriga, M. M. (2011). Tesis de maestría. *Comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por alumnos de 2º ESO.* Granada, Andalucía, España.

Gómez Lenis, A. L. (2004). Dos posturas encontradas frente al problema de la universalidad: Posibilidad de una ética de la universabilidad desde el horizonte de la eticidad. En V. E.-G. Herrera, *Moralidad Eticidad - Estudios sobre Kant y Hegel* (pág. 30). Cali: Artes Gráficas de la Facultad de Humanidades Universidad del Valle.

ICFES. (2016). *Icfes Interactivo.* Obtenido de http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultados.php

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá, D.C.

MEN. (2014). *Guías prueba saber 3°, 5° y 9° lineamientos para la aplicación muestral y censal 2014.* Bogotá, D.C.

Ministerio de Educación de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Matemáticas. En MEN. Bogotá, D.C.

Ortiz Bravo, J. &. (2017). *SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN EL ESTUDIO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS QUE FAVORECE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO.* Cali.

Oviedo, L. M. (2012). Los Registros Semióticos de Representación en Matemática. *Revista Aula Universitaria 13*, 29-36.

Pascual, A. E. (19 de 02 de 2011). *Scribd*. Obtenido de https://es.scribd.com/doc/49142896/El-origen-de-la-didactica-como-disciplina-y-el-estudio-de-su-campo

Restrepo Gómez, B. (2009). Investigación de aula: formas y actores. *Revista Educación y Pedagogía*(53), 103. Obtenido de http://200.24.17.68:8080/jspui/handle/123456789/1983

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de investigación en educación Matemática*.

Rico, L. S. (2000). La Didáctica de la Matemática en Fundamentos didácticos de las áreas curriculares. (R. &. (Eds), Ed.) *AIEM, Avances de Investigación en Educación Matemática 2012*, 352-354.

Rojas Garzón, P. J. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. En *Enseñanza de las Ciencias, Investigaciones Didácticas* (págs. 151-165). Bogotá, Colombia.

Rojas, R. (18 de enero de 2009). *Difundiendo la historia*. Obtenido de http://difundiendolahistoria.blogspot.com.co/2009/01/la-didctica-de-juan-amos-comenio-en-la.html

Segura, S. M. (marzo de 2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7*(1), 49-78.

Shepard, L. A. (2006). La Evaluación En el Aula. En L. A. Shepard, *Educational Measurement* (págs. 623 - 646). Colorado: Universidad de Colorado, Campus Boulder.

Vargas Núñez, M. E. (2011). (U. N. Colombia, Ed.) Obtenido de file:///C:/Users/Docente/Downloads/Funci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica_tesis.pdf

Anexo 1

ALCALDÍA DE SANTIAGO DE CALI	**INSTITUCIÓN EDUCATIVA NORMAL SUPERIOR SANTIAGO DE CALI** **MEN – Resolución Acreditación de Calidad y Desarrollo no. 8110Septiembre 14. 2010** **BUREAUVERITAS- Acreditación de Calidad NTCGP 1000: 2009, ISO 9001: 2008** **Reconocimiento Oficial de Estudios Resolución No. 4143.21.6478 Septiembre 17 de 2013** **Secretaria de Educación Municipal de Santiago de Cali** **Carrera 34 No. 12 – 60 Colseguros** **Teléfonos 3364797 – 98 – 99 Fax 3356233** **Correo Electrónico: normalsuperiorcali@hotmail.com** **NIT 800243065-3**	

CONSENTIMIENTO INFORMADO

(Personas menores de edad)

Santiago de Cali, 06 de octubre de 2017

Nombres y apellidos completos de los estudiantes-maestros que llevan a cabo el estudio:

Nombres y apellidos	Número de cédula
1. Jhon Waynes Potes Delgado	6162485
2. Elizabeth Villanueva Gómez	66900349

En calidad de estudiantes de la Maestría en Educación de la Universidad ICESI y en el marco del desarrollo de nuestro Trabajo de Grado, que tiene como objetivo principal: "Diseñar una situación didáctica para la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales 2x2**".**

Solicitamos su consentimiento, para realizar con los estudiantes del grado 9-5 de la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali, sede Principal el mencionado estudio.

Es importante, antes de confirmar su consentimiento informarle que:

- Este es un proceso que no les reporta ningún riesgo directo o indirecto a los menores participantes.
- El tema abordado en este trabajo es acorde a los estándares básicos del grado noveno; por lo que forma parte del currículo de matemáticas de la I.E. Normal Superior Santiago de Cali y será valorado dentro de las competencias básicas de aprendizaje para el tercer período.
- La actividad en la que va a participar su hijo(a) y/o acudido(a) ha sido diseñada para beneficio de él (ella), facilitándole la comprensión del tema.

- Las respuestas y todos los registros de participación se mantendrán anónimos en el informe de investigación. Lo cual no impide que los estudiantes puedan conocer sus resultados.
- Ni usted ni el (la) estudiante recibirán ningún tipo de incentivo económico o de otro tipo por participar en este estudio.
- Una vez firmado este consentimiento el (la) estudiante tiene el derecho y el deber de participar en este estudio.
- Durante la realización de las actividades, se podrán usar herramientas tecnológicas para registrar información: grabaciones de video, audio y/o fotografías; que servirán para garantizar la fidelidad de los datos, pero no serán divulgadas por ningún medio sin un consentimiento específico para su divulgación.
- Una vez firmado este consentimiento usted podrá solicitar ampliación de información sobre este estudio en el horario de atención a padres de familia.
- En caso de que usted decida no dar este consentimiento, los resultados de su hijo y/o acudido no serán tenidos en cuenta el informe de investigación.

Si comprendió los alcances de los términos que ha leído, por favor coloque una cruz en el cuadro que se encuentra al lado de la frase:

HE COMPRENDIDO LOS ALCANCES DEL CONSENTIMIENTO INFORMADO ☐

Yo, ____ en carácter de padre y/o acudiente autorizo que el estudiante ____ participe en el estudio de investigación: "Resolución de Problemas con Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2" a realizarse durante las clases de Matemáticas en el mes de octubre del año 2017.

Firma del padre y/o acudiente:
Número de cédula:

Anexo 2

Prueba diagnóstica.

Marque con una X el significado correspondiente:

1. Variable es:

   a) Una cantidad aumentada en uno

   b) Una letra sin valor numérico

   c) Un número constante

   d) Una cantidad representada por una letra

2. Variable dependiente:

   a) un número constante

   b) una letra que representa una cantidad que cambia su valor de acuerdo a otra letra

   c) un número desconocido que no puede ser conocido mediante otra variable

   d) ninguna de las anteriores

3. Variable independiente

   a) Un número desconocido que puede ser conocido mediante otra variable

   b) Un número constante

   c) Es un número representado por una letra que puede tomar cualquier valor

   d) Ninguna de las anteriores

4. Coeficiente

   a) Número que se suma a la variable

   b) Número que multiplica a la variable

   c) Es el exponente de la variable

   d) Ninguna de las anteriores

5. Ecuación:

a) Igualdad con una o más variables

b) Igualdad cuyo resultado siempre será cero

c) Desigualdad con dos variables

d) Desigualdad con una sola variable

6. Ecuación lineal

a) Es una igualdad cuya variable tiene como exponente el número dos

b) Es una igualdad cuya variable tiene como mayor exponente el número uno

c) Es una igualdad numérica que carece de variables

d) Todas las anteriores

7. La representación gráfica de una ecuación lineal es:

a) Una curva

b) Una recta

c) Una circunferencia

d) Un segmento de recta

8. La mayor cantidad de líneas rectas que pueden pasar por un mismo punto:

a) Una

b) Dos

c) Tres

d) Infinitas

e) Ninguna de las anteriores

9. La mayor cantidad de líneas rectas que pueden pasar por dos puntos:

a) Una

b) Dos

c) Tres

d) Infinitas

e) Todas las anteriores

10. Al graficar dos líneas rectas sobre un mismo plano, puede ocurrir:

a) Se cruzan en un solo punto

b) Jamás se tocan

c) Coinciden en todos sus puntos

d) Todas las anteriores

Anexo 3

Situación Didáctica Para Sistemas De Ecuaciones Lineales 2x2.

Laura es estudiante de grado noveno de la I.E. NSC, en las mañanas para ir al colegio y de regreso a su casa toma el transporte masivo MIO, que tiene un costo de $1900; algunos días al salir del colegio, Laura debe ir a la casa de su abuela, dado que tiene que acompañarla durante la tarde, para ello viaja en la buseta Ermita tanto del colegio a la casa de la abuela como de aquí a su casa; este transporte tiene un costo de $1200. En el mes la estudiante gastó $80500 en transportes y realizó 49 viajes en total.

Se desea saber cuántos viajes realizó utilizando el transporte MIO y cuántos utilizando la buseta Ermita.

Parte I: Situación de acción

Identifica y completa los datos conocidos que faltan

La tarifa en el MIO es $1900

____

____

____

____

Martha dice que Laura hace 31 viajes en el MIO y 18 viajes en La Ermita, pero Lina dice que no puede ser, porque así Laura no gastaría $ 80500 en total. ¿Cuál de las dos tiene la razón? ¿Por qué?

Miguel dice que Laura hace 19 viajes en el MIO y 37 viajes en La Ermita porque de esa forma gasta en total $ 80500, pero Marcos dice que no puede ser, porque en ese caso Laura habría hecho más de 49 viajes. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.

$\boldsymbol{x}$:

$\boldsymbol{y}$:

Utilizando las variables del inciso d), expresa algebraicamente:

Gasto total de viajes semanales de Laura en el sistema de transporte MIO: ____________________

Gasto total de viajes semanales de Laura utilizando el transporte de La Ermita: ____________________

Escribe en cada caso una ecuación para expresar:

Gasto total de viajes semanales de Laura: ______________________________

Número total de viajes semanales de Laura: ______________________________

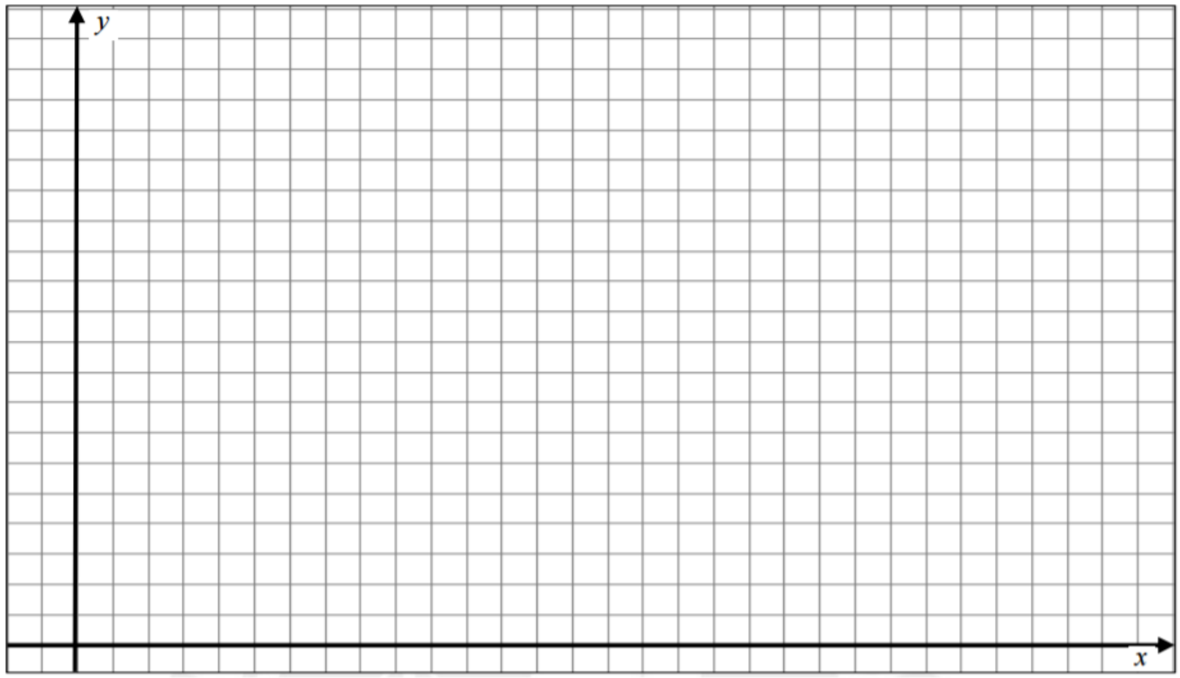
Completa la tabla con valores para $\boldsymbol{x}$ y para $\boldsymbol{y}$ que sean solución de las ecuaciones que se dan.

Ecuación 1: $\boldsymbol{x+y} \boldsymbol{=49}$			**Ecuación** : $\boldsymbol{1900x+1200y} \boldsymbol{=80500}$		
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{(x,y)}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{(x,y)}$
1	48	(1, 48)	1	65.5	(1, 65.5)
5					
9					
13			13		
17					
21				$\boldsymbol{\frac{203}{6}}$	
29					
33					
37				8.5	
41					
45					
49					

De acuerdo con la tabla anterior, identifica un par ordenado que es solución de las dos ecuaciones

(,)

Grafica en el siguiente sistema de coordenadas la *Ecuación 1* y la *Ecuación 2* del inciso g).



Escribe las coordenadas del punto de intersección de las gráficas: (,   )

El par ordenado (,   ) resuelve la *Ecuación 1* y también resuelve la *Ecuación 2*

¿Qué relación tiene el punto de intersección de las gráficas con el problema propuesto?

Parte II: Situación de formulación

Conformar grupos de tres (3) estudiantes y comparar sus resultados obtenidos en la parte individual.

Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema.

Resolver el sistema de ecuaciones del inciso a)

Explicar la relación que tiene la solución encontrada en el inciso c) con el problema propuesto.

Parte III: Situación de validación

Todos los integrantes del grupo formado, deben comparar sus resultados obtenidos individualmente en la parte II.

Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo conformado en la parte II, en los incisos g, h, i, j, k, l.

Parte IV: Situación de institucionalización

Reunión entre docentes de Matemáticas y del establecimiento educativo, para la discusión y análisis de los resultados obtenidos con la situación de aprendizaje, con el propósito de realizar ajustes en el plan de área si se considera pertinente.