

**Taller #7**  
**Heteroscedasticidad**  
**Econometría 06216**

**Profesor: Julio César Alonso**  
**Monitores: Paul Semaán**  
**Francisco Quevedo**

**Notas:**

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado entre las 8 y 9 AM del próximo 2 de Octubre.

**INSTRUCCIONES:**

- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

El gremio de cultivadores de uchuvas de una pequeña República lo ha contratado a usted para realizar un estudio del comportamiento de la demanda del sector. Para esto usted cuenta con una encuesta realizada a una muestra aleatoria de 100 familias. En esta encuesta se recoge información para la cantidad de uchuvas per capita consumidas por cada hogar  $i$  -  $Q_i$  medido en kg. per capita - , el ingreso per capita anual de la familia  $i$  -  $I_i$  medido en miles de dólares per capita - , y el precio anual promedio del Kg. de uchuvas y níspero para la familia  $i$  -  $P_i^u$  y  $P_i^n$  medido en dólares por Kg., respectivamente . (Los datos se encuentran en el archivo T7-02-06.xls)

1. Estime el siguiente modelo y reporte sus resultados en una tabla:

$$Q = e^{\gamma_1 + \gamma_2 p_i^n + \gamma_3 \frac{1}{I_i} + \gamma_4 p_i^u + \epsilon_i}$$

2. Muestre intuitivamente que el problema de heteroscedasticidad puede estar presente.
3. Realice las pruebas que determinen la existencia o no de un problema de heteroscedasticidad.
4. Si existe heteroscedasticidad, resuelva el problema y estime un modelo que no presente este problema. Reporte los resultados del modelo corregido y de ser posible demuestre que el método empleado solucionó la heteroscedasticidad.
5. Interprete el significado económico de los coeficientes estimados. Comente la significancia de ellos.
6. A partir de los resultados anteriores y un análisis microeconómico, plantee la curva de Engel (de ser posible) para las uchuvas. muestre todo el procedimiento.

Taller #7  
 Heteroscedasticidad  
 Respuestas Sugeridas  
 Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso  
 Monitores: Paul Semaán  
 Francisco Quevedo

Notas:

- o Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller es para ser entregado entre las 8 y 9 AM del próximo 2 de Octubre.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

El gremio de cultivadores de uchuvas de una pequeña República lo ha contratado a usted para realizar un estudio del comportamiento de la demanda del sector. Para esto usted cuenta con una encuesta realizada a una muestra aleatoria de 100 familias. En esta encuesta se recoge información para la cantidad de uchuvas per capita consumidas por cada hogar  $i - Q_i$  medido en kg. per capita -, el ingreso per capita anual de la familia  $i - I_i$  medido en miles de dólares per capita -, y el precio anual promedio del Kg. de uchuvas y níspero para la familia  $i - P_i^u$  y  $P_i^n$  medido en dólares por Kg., respectivamente. (Los datos se encuentran en el archivo T7-02-06.xls)

1. Estime el siguiente modelo:

$$Q = e^{\gamma_1 + \gamma_2 P_i^u + \gamma_3 \frac{1}{I_i} + \gamma_4 P_i^n + \epsilon_i}$$

y reporte sus resultados en una tabla.

Primero se debe linealizar el modelo, empleando una transformación logarítmica se obtiene:

$$\ln(Q) = \gamma_1 + \gamma_2 P_i^u + \gamma_3 \frac{1}{I_i} + \gamma_4 P_i^n + V_i \tag{1}$$

Los resultados de la estimación del modelo (1) se encuentran reportados en la Tabla 1.

Tabla 1.

	Variable dependiente: Ln(Q <sub>i</sub> )	
	Estadísticos t entre parentesis	
	ecuacion 1	ecuacion 2
	MCO	MCO
constante	8,65518 (6,877)***	8,65518 (5,920)***
Precio níspero	-0,87992 (-1,176)	-0,87992 (-1,130)
1/Ingreso	-0,20814 (-0,320)	-0,20814 (-0,323)
Precio uchuva	-2,32108 (-6,429)***	-2,32108 (-5,284)***
R <sup>2</sup>	0,317827	0,317827
R <sup>2</sup> ajustado	0,296509	0,296509
F	(14,91)***	(14,91)***
No. De Obs	100	100

(\*) nivel de significancia: 10%

(\*\*) nivel de significancia: 5%

(\*\*\*) nivel de significancia: 1%

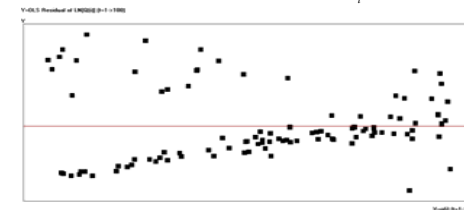
MCO: Mínimo Cuadrado Ordinario

(-): N.A.

2. Muestre intuitivamente que el problema de heteroscedasticidad puede estar presente.

Se grafican los residuos estimados versus la variable  $P_i^u$  (Gráfico 1).

Gráfico 1. Residuos estimados versus  $P_i^u$ .



Se observa una relación negativa entre la variabilidad de los residuos y el nivel de precios de uchuvas. Así se dan los primeros indicios sobre la existencia de heteroscedasticidad en el modelo.

3. Realice las pruebas que determinen la existencia o no de un problema de heteroscedasticidad.

De acuerdo a esto se lleva a cabo la prueba de Goldfeld y Quandt (GQ) planteando la siguiente hipótesis nula en el caso general:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$$

$$H_A : \sigma_i^2 = \sigma^2 \left( \frac{1}{P_i^{p_i}} \right)$$

Los siguientes pasos a realizar para cada una de las variables son:

- Elegir una variable, o una combinación de variables (que generen el problema de heteroscedasticidad) y ordenar las observaciones, en nuestro caso  $P_i^u$
- Se indican las observaciones que forman las muestras empleadas para calcular el estadístico GQ, Determinando el numero que se van eliminar, donde  $d=18$  y  $k=4$ , es decir, que el numero de observaciones adecuado para omitir es 18. Se corre una regresión para cada grupo.
- Calcular el estadístico GQ, teniendo en cuenta los errores obtenidos en cada una de las regresiones del punto anterior, así:  $GQ = \frac{SSE_2}{SSE_1}$
- Toma de decisión: Se rechaza la hipótesis nula si  $GQ > F_{(n-d-2k, n-d-2k)}(\alpha=0.05)$ , es decir,  $F_{GQ} = 6,042$  y  $F_{(74,74)} = 1.469$ .

El procedimiento debe ser realizado en todas las variables, los resultados se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2.

Variable explicativa	FGQ	F5%(74,74)	Conclusion
Precio de uchuva	6.0422726	1.46945101	Rechaza Ho
Precio de nispero	1.25818096	1.46945101	No rechazo la Ho
1/Ingreso	1.19319541	1.46945101	No rechazo la Ho
Tamaño de la Familia	1.14074835	1.46945101	No rechazo la Ho

Como se observa en la Tabla 2 se puede rechazar la hipótesis nula, favoreciendo la presencia de heteroscedasticidad, del tipo descrito en la hipótesis alterna.

Basándonos en los resultados anteriores se procede a realizar la prueba de Breusch-Pagan, EasyReg genera automáticamente un test de Breusch-Pagan asumiendo que todas las variables independientes afectan la varianza del error. En este caso, dado que en el modelo hay más de una variable independiente, los resultados serán diferentes.

Por lo tanto en esta prueba se considera la hipótesis de una relación entre la varianza del error y un grupo de variables como medida de heteroscedasticidad, versus la hipótesis nula de la no existencia de esta relación como medida de homoscedasticidad, es decir:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$$

$$H_A : \sigma_i^2 = f(\alpha + \beta p_i^u + \varepsilon_i)$$

Donde el estadístico BP sera igual a 25.723, y se compara con un valor critico que sigue una distribución chi cuadrado con 1 grado de libertad (3.84), entonces se puede rechazar la hipótesis nula, a favor de la presencia de heteroscedasticidad.

El procedimiento debe ser realizado en todas las variables, los resultados se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3.

Variable explicativa	BP	$\chi^2_{5\%(1)}$	Conclusion
Precio uchuva	25,723947	3,84	Rechaza Ho
Precio nispero	0,0894815	3,84	No rechazo la Ho
1/Ingreso	0,266409	3,84	No rechazo la Ho
Tamaño de la Familia	2,568793	3,84	No rechazo la Ho

Por lo tanto cuando se evalúan las variables de manera individual, se confirma la presencia de homoscedasticidad, aceptándose la hipótesis nula.

Por ultimo se realiza el Test de White, en el que se desea comprobar:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$$

$$H_A : \text{No } H_0$$

Para llevar a cabo esta prueba hay que efectuar una regresión auxiliar donde la variable dependiente sea igual a los residuos al cuadrado de la formulación inicial y las variables independientes sean conformadas por regresores del modelo original, a sus cuadrados y a los productos cruzados, después de haber eliminado las posibles redundancias se obtiene:

$$\hat{\varepsilon}^2 = \gamma_1 + \gamma_2 p_i + \gamma_3 \frac{1}{I_i} + \gamma_4 p_i^2 + \gamma_5 \frac{p_i}{I_i} + \gamma_6 p_i p_i^2 + \gamma_7 p_i^2 + \gamma_8 \frac{p_i^2}{I_i} + \gamma_9 \frac{1}{I_i^2} + \gamma_{10} p_i^2 + \varepsilon_i$$

El  $R^2$  obtenido a partir de la regresión auxiliar es igual a 0.4410. Ahora se puede construir el estadístico de White:  $W_a = nR^2 = 100 \times 0.4410 = 44.10$  el cual se debe comparar con  $\chi^2_{g(\alpha)} = \chi^2_{1(\alpha)}$ . El valor critico obtenido para un nivel de significancia del 5% es igual a 16.92. De acuerdo a los valores criticos obtenidos, la hipótesis nula se rechaza al nivel de significancia del 5%.

Por lo tanto como se conoce que variable ocasiona el problema de heteroscedasticidad y como, se procede a realizar la correccion del modelo por medio de los Minimos Cuadrados Ponderados, a saber:

$$Var(\varepsilon_i p_i^u) = (p_i^{p_i^2}) Var(\varepsilon_i) = \left( \sigma^2 \frac{1}{p_i^{p_i^2}} \right) (p_i^{p_i^2}) = \sigma^2$$

- Si existe heteroscedasticidad, resuelva el problema y estime un modelo que no presente problemas de heteroscedasticidad, Reporte los resultados del modelo

corregido y de ser posible demuestre que el método empleado solucionó el problema.

Por lo tanto como se conoce que variable ocasiona el problema de heteroscedasticidad y como, se procede a realizar la correccion del modelo por medio de los Minimos Cuadrados Ponderados y se corre la regresion propuesta (3)

$$p^u_i \ln(Q) = \gamma_1 p^u_i + \gamma_2 p^u_i p^u_i + \gamma_3 \frac{p^u_i}{I_i} + \gamma_4 p^{u^2}_i + \varepsilon_i p^u_i$$

Sin embargo cuando se realiza el test de white para verificar la correccion hecha, da como resultado que se rechaza la hipótesis nula a favor de presencia de heteroscedasticidad al 10%, (Estadístico  $R^2=0.199$   $W=19.9$ ;  $\chi^2=18.55$  con 12 grados de libertad.)

Ademas cuando se realizan las pruebas de Breush/Pagan el problema de heteroscedasticidad se agrava toda vez que ahora nuevas variables presentaban problemas como  $p^u/I$  y el problema de heteroscedasticidad persiste en la variable  $p^u$ , lo que se confirma por la prueba de Goldfeld/Quandt en la que se rechaza la hipótesis nula a favor de presencia de heteroscedasticidad. (ver Tabla 4)

Tabla 4

Variable explicativa	BP	$\chi^2_{5\%(1)}$	Conclusion
$p^u$	5,257864	3,84	Rechaza Ho
$p^u P^n$	2,184751	3,84	No rechazo la Ho
$p^u /I$	4,159686	3,84	Rechaza Ho
Tamaño de familia	3,0938915	3,84	No rechazo la Ho

Por lo tanto con la corrección propuesta (MCP) el problema aun persiste, y como no se cuenta con otra posible corrección posible, dados los resultados de las pruebas, para que se emplee el método de mínimos cuadrados ponderados se procede a usar la corrección propuesta por White para la matriz de varianzas de los estimadores y los estadísticos t. White (1980) sugiere el siguiente estimador consistente para la matriz de varianzas y covarianzas de los  $\beta$ 's estimados en presencia de heteroscedasticidad:

$$Est.Var[\hat{\beta}] = n(X^T X)^{-1} S_0 (X^T X)^{-1},$$

donde  $S_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 x_i x_i^T$  y  $x_i^T = (1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki})$ .

El modelo corregido por medio del método de White esta reportado en la tabla 1, como ecuación (2).

- Interprete el significado económico de los coeficientes estimados. Comente la significancia de ellos.

$\gamma_1 = 8.65$ : Es la porción de las cantidades demandadas que no depende del nivel de precios y del ingreso, es significativo al 1%, se creería que es recoge el efecto de las preferencias de las familias, o análogamente es el nivel de consumo autónomo.

$$\frac{\partial Q}{\partial p^n} = \left( e^{\gamma_1 + \gamma_2 p^n + \gamma_2 \frac{1}{I_i} + \gamma_2 p^n + \varepsilon_i} \right) \gamma_2$$

$$\frac{\Delta \% Q}{\partial p^n} = 100 \gamma_2$$

$\gamma_2 = -0.87$  lo que representa que ante un aumento de 1 dólar en el precio anual promedio por Kg. De níspero, se genera una disminución del -87% en la cantidad de uchuvas consumidas por cada hogar, no es estadísticamente significativo.

$$\frac{\partial Q}{\partial I} = \left( e^{\gamma_1 + \gamma_2 p^n + \gamma_2 \frac{1}{I_i} + \gamma_2 p^n + \varepsilon_i} \right) \left( -\gamma_3 \frac{1}{I^2} \right)$$

$$\frac{\Delta \% Q}{\Delta \% I} = -\gamma_3 I$$

$\gamma_3 = -0.20$  Ante un incremento del 1% en el ingreso, las cantidades demandadas de uchuvas se reducen en -0.002 veces el ingreso de la familia. No es estadísticamente significativo.

$$\frac{\partial Q}{\partial p^u} = \left( e^{\gamma_1 + \gamma_2 p^n + \gamma_2 \frac{1}{I_i} + \gamma_2 p^n + \varepsilon_i} \right) \gamma_4$$

$$\frac{\Delta \% Q}{\partial p^u} = 100 \gamma_4$$

$\gamma_4 = -2.32$  ante un aumento de 1 dólar en el precio anual promedio por Kg. de uchuva, se genera una disminución del -232% en la cantidad de uchuvas consumidas por cada hogar, es significativo al 1%.

- A partir de los resultados anteriores y un análisis microeconómico, plantee la curva de Engel (de ser posible) para las uchuvas. muestre todo el procedimiento.

A partir de los resultados obtenidos en el punto 5, se puede observar que:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial I^2} = \left( e^{\gamma_1 + \gamma_2 p^n + \gamma_2 \frac{1}{I_i} + \gamma_2 p^n + \varepsilon_i} \right) \left( \frac{\gamma_3^2}{I^4} + 2 \frac{\gamma_3}{I^3} \right)$$

donde  $\frac{\partial^2 Q}{\partial I^2} > 0$  cuando  $I > \frac{\gamma_3}{2}$  y  $\frac{\partial^2 Q}{\partial I^2} < 0$  cuando  $I < \frac{\gamma_3}{2}$

Por lo tanto, ya se tienen los elementos para trazar la curva en Engel como se observa en el Gráfico 2.

Gráfico 2. Curva de Engel para la uchuva

