SIMULACIÓN EN TEORÍA DE JUEGOS:
UNA APLICACIÓN AL SISTEMA PENSIONAL

AUTOR:

JAIRO STEVEN JIMÉNEZ MONTOYA

DIRECTOR DEL PROYECTO:

ANDRÉS FELIPE MUÑOZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD ICESI

FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y ECONÓMICAS

ECONOMÍA

SANTIAGO DE CALI

2018

Página en blanco a propósito

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Agradecimientos

Primeramente a Jesucristo por todo lo que me ha bendecido en este proceso.

Luego, a mi familia por su total apoyo.

A Andrés Muñoz, mi tutor, por su entrega, apoyo y comentarios durante este año de investigación.

Dedicado especialmente a Natalia González, mi profe.

J

1 Resumen/Abstract

Resumen

El presente proyecto de investigación tiene como objetivo presentar los resultados de una simulación de las decisiones de los individuos para escoger el régimen pensional al cual quieren pertenecer. Se modelan las pensiones como un bien público impuro y las decisiones con un enfoque de teoría de juegos. El principal resultado de la simulación muestra que, bajo ciertas condiciones, los individuos siempre querrán aportar a un régimen de ahorro grupal. Con lo cual, a diferencia de Isaac & Walker (1988) se concluye que, cuando los individuos tienen en cuenta el retorno marginal per cápita a la hora de decidir si financian o no un bien público, el tamaño del grupo no tiene efecto sobre la decisión.

Palabras Clave: teoría de juegos, bienes públicos, simulación, efectos de tamaño de grupo, sistema pensional.

Abstract

This research project aims to present the results from a simulation of the decisions of individuals to choose the pension regime to which they want to belong. Pensions have been modeled as impure public goods, and the individual choices in a game theory framework. The main result from the simulation is that individuals will always contribute to a groupal saving system under certain conditions. Thus, unlike Isaac & Walker (1988) the conclusion is that individuals do not take into account the marginal per capita return as a factor to contribute, or not, to finance a public good. Then, the size of the group has not effect.

Key Words: game theory, public goods, simulation, group size effects, pensional system

2 Introducción

En el presente proyecto de investigación se realiza la simulación en computador de un juego repetido infinitamente, con una aplicación a los bienes públicos. Particularmente, se aplican los resultados de la simulación a un sistema pensional convencional, en el cual existen dos tipos de regímenes: el régimen de ahorro individual (conocido en Colombia como el RAIS, Régimen de Ahorro Individual Solidario) y el régimen de ahorro grupal. Para la simulación, se hace uso del lenguaje de programación estadístico R y de la plataforma R Studio. Utilizando los paquetes de programación en teoría de juegos creados por el profesor Sebastian Kranz. Por otro lado, es importante aclarar que toda la lógica detrás de los códigos tiene bases en la teoría económica, en especial, de los siguientes temas: teoría de juegos y bienes públicos.

El objetivo principal del proyecto es simular los resultados que la teoría económica aporta, para dar respuesta a los problemas donde las acciones de los individuos están condicionadas por su interacción con otros agentes económicos. En particular, se quieren simular los resultados que la teoría económica, desde la teoría de los bienes públicos en conjunto con la teoría de juegos, aporta para predecir y entender las decisiones de los individuos en la financiación de bienes públicos. Para lograr este objetivo, se crea una historia a simular, basada en el ambiente de interacción propuesto por Isaac & Walker (1988). Posteriormente, se analizan los equilibrios de Nash, con distintas modificaciones a las condiciones del ambiente, que arrojan la interacción bajo ambientes de interacción. Por último, se muestra cómo puede ser entendido este resultado como uno que permite entender la participación de los individuos en un régimen pensional particular.

Durante los últimos años, este tipo de proyectos de investigación han tomado gran popularidad dentro de la comunidad académica. En primer lugar, porque la teoría económica, a pesar de sus limitaciones, sigue teniendo un gran poder explicativo para explicar el comportamiento de los agentes económicos. En segundo lugar, el avance tecnológico, y la absorción de este avance, se ha dado a gran escala dentro de la academia económica. Por último, los estándares internacionales para la aprobación de producción intelectual (es decir, su publicación) exigen el uso de métodos de simulación como una parte de la demostración de la teoría propuesta. No obstante, la importancia de un proyecto de investigación no radica en la popularidad del método que utiliza, sino en su aplicabilidad práctica. En este sentido, el presente trabajo, en la medida que cumple sus objetivos, se convierte en una herramienta robusta para comprender el comportamiento de los individuos en un tema de gran importancia para la política económica actual: el diseño del sistema pensional.

En adelante, el escrito se estructura como sigue: en primer lugar, se presentan el marco teórico del proyecto, esto es, las bases de la teoría económica y de la programación que se utilizan. En segundo lugar, se presenta la historia que se debe simular, en este punto, se describen los agentes económicos y el ambiente de interacción, aunque no de manera formal. En tercer lugar, se realiza la modelación formal de los juegos que se van a simular, es decir, la exposición matemática de la simulación. En cuarto lugar, se presentan los principales resultados de la simulación, haciendo referencia a la historia descrita anteriormente. Por último, se presentan las conclusiones y una sección de anexos.

3 Marco Teórico

En esta sección se explican los principales componentes teóricos del proyecto de investigación. En términos generales, el trabajo está conformado por dos grandes áreas: la teoría económica y la simulación computacional. Dentro del primer componente, se hace referencia a la teoría de los bienes públicos, particularmente su definición y su provisión. De igual manera, se exponen algunos conceptos referentes a la teoría de juegos y sus principales aportes a la teoría de los bienes públicos. En el segundo componente, se específica lo que se entiende por simulación computacional y la aplicación específica para este caso.

Existe una vasta literatura acerca de los bienes públicos. Desde definiciones conceptuales (asociadas a todas las complejidades que implica trabajar con bienes públicos), hasta aplicaciones empíricas, pasando por simulaciones teóricas. En este trabajo, se hace énfasis en las definiciones conceptuales y en las simulaciones teóricas de dichos conceptos. En este sentido, es importante iniciar precisando lo que se entiende por bienes públicos.

En la teoría económica clásica y neoclásica, se definen los bienes públicos como bienes no rivales y no excluyentes (Varian, 1994). No rivales, en la medida que la presencia de un individuo más no representa una disminución en la cantidad de bien público disponible para los otros individuos. No excluyentes, porque todos los individuos de la sociedad pueden tener acceso a ellos (p. e. alumbrado público). Sin embargo, algunos de estos supuestos pueden ser relajados, note que el caso extremo (cuando ambos supuestos se relajan), corresponde al de los bienes privados. Cuando se relaja el supuesto de no rivalidad, se tienen bienes comunales, aquellos a los que todos pueden acceder, pero la presencia de más consumidores disminuye la cantidad de bien público disponible. Por otro lado, cuando se relaja el supuesto de la no exclusividad, se hace referencia a los bienes club, aquellos que tienen un acceso restringido a un grupo de la población, sin embargo, dentro de ese grupo no existe una cantidad diferenciada de bien público. Por ejemplo, los clubes sociales.

Ahora bien, para efectos del presente trabajo, se relaja el supuesto de no rivalidad, por tanto, el número de personas que tienen acceso al bien público tiene un rol importante. Sobre este punto se vuelve más adelante. De igual manera, es importante dentro de la teoría de los bienes públicos determinar quién debe financiar el bien público: ¿Debe ser financiado de manera privada? O bien, ¿debe ser financiado por el Estado?, o se repartirán las cargas de financiación entre el Estado y los individuos de manera privada. A su vez, es importante determinar la manera como se va a proveer el bien público, porque esto determina el marco de incentivos que envía señales a los individuos para contribuir o no a la financiación del mismo.

En primer lugar, el efecto del número de individuos sobre la cantidad de bien público disponible, es conocido como *group size effect*, efectos de grupo, por su traducción al español. El efecto de grupo se refiere a la reducción en el beneficio marginal privado, que produce un cambio en n, matemáticamente: $\frac{\partial MB}{\partial n} < 0$. Esto es, ante un aumento en el número de individuos que se hacen participes del uso del bien público, el beneficio marginal privado de cada individuo (el beneficio adicional por cada unidad de bien público consumida) se disminuye. No obstante, todos los individuos no están aportando para la provisión del bien público, este último hecho es relevante cuando se habla de una financiación privada del bien público.

La anterior ilustración permite discutir el segundo punto que se mencionó en líneas anteriores: ¿Quién debería financiar entonces el bien público? Antes de entrar en materia, es importante aclarar que en este escrito se tiene como referencia solamente a los bienes públicos impuros, que por lo general no corresponden a monopolios naturales y por ende la provisión pública no siempre es la más eficiente. En este sentido, la financiación privada entra a competir con la provisión pública como una forma eficiente de proveer (financiar) un bien público. ¿Qué se entiende por financiación eficiente? Siguiendo los lineamientos propuestos por (Samuelson, 1954) se entiende en este trabajo la financiación eficiente, aquella donde el beneficio marginal social iguala al beneficio marginal privado de cada individuo y al costo marginal social. En otras palabras, cada peso (público o privado) invertido en la financiación del bien público se ve recompensado por un aumento en la utilidad del individuo, producto de la sustitución de consumo de bien privado por bien público. Los resultados encontrados teóricamente por Samuelson permiten concluir que el mercado bajo ciertas condiciones, incluso en la provisión de bienes públicos, produce resultados eficientes.

Sin embargo, dichas condiciones no siempre son factibles en la realidad. Por ejemplo, los individuos no siempre tienen la capacidad, o bien, la disposición, de revelar sus preferencias correctas. En primer lugar, porque no siempre tienen una valoración sobre los bienes (cuales quiera que sean). En segundo lugar, porque aun cuando tienen la capacidad de ser reflexivos sobre sus preferencias, no tienen incentivos para revelarlas: porque conocen de antemano que unas revelaciones reales de sus preferencias pueden significar un costo adicional para ellos, o bien, porque saben que otro individuos, bajo el supuesto de racionalidad y de información completa financiarán el bien de manera voluntaria, lo cual da cabida a la existencia del *free riding*, que representa un problema en algunos escenarios particulares. La presencia de estas situaciones, generan estados de ineficiencia económica, por ejemplo, sub provisión del bien público e incluso tienen consecuencias de bienestar. En el caso particular del sistema pensional colombiano, estas condiciones se manifiestan a través de gasto público ineficiente, es decir, gasto público que no representa mejoras en el sentido de Pareto.

Ahora bien, una vez aclarados algunos puntos que eran necesarios, se describen mecanismos de financiación privada de bienes públicos. Siguiendo a Grubert (2005) se puede clasificar la financiación de bienes públicos en dos tipos: voluntario y de vinculo más débil. No obstante, esta clasificación no es excluyente con la expuesta anteriormente (bienes públicos puros e impuros). Por un lado, los bienes públicos de tipo voluntario son aquellos cuya provisión se define como sigue: $G = max\alpha z_1, \beta z_2, \ldots, \gamma z_n = g_1 = g_2 = g_n$. Es decir, la cantidad proveída del bien público es igual para todo individuo $i \in N$ y corresponde a la provisión que pueda ser financiada por medio del máximo aporte z_i[1]. Note que, en este caso, la presencia del free riding es eficiente, porque el aporte máximo de un individuo es el que determina la provisión del bien público; no obstante, se puede presentar un problema de coordinación, en el cual ninguno de los individuos esté dispuesto a aportar al bien público, esperando que el otro lo haga, en cuyo caso el máximo aporte es cero. Por tanto, la coordinación, debe ser la función del Estado en la provisión de este tipo de bienes.

Por otro lado, se encuentran los bienes del tipo vinculo más débil, que representan el caso contrario a los bienes públicos de tipo voluntario. En este sentido, se define un bien público de vinculo más débil como: $G = min\alpha z_1, \beta z_2, \ldots, \gamma z_n = g_1 = g_2 = g_n$. Donde la cantidad que se provee para todos los

[1]Note que esta es una función de producción genérica y los valores de α, β, γ pueden alterar la provisión. No obstante, asignar estos valores requiere de juicios de valor: ¿qué haría que el aporte de un individuo sea valorado distinto al de otro individuo?

individuos es la misma. No obstante, en este caso es necesario que todos los individuos provean para el bien público, de lo contrario, el bien público no podría ser ofrecido. Es decir, el free-riding es ineficiente. En este caso, la intervención del Estado debería financiar el bien público en caso de que alguno de los individuos tenga aporte nulo, o bien, coordinar para que ninguno de los individuos deje de aportar.

Sin embargo, en este punto es necesario notar que la financiación privada de los bienes públicos lleva a que exista interacción entre individuos que se suponen racionales, por lo menos, desde la teoría económica. La racionalidad implica comportamiento estratégico. En este sentido, se debe hacer uso de una herramienta de la teoría económica conocida como la Teoría de Juegos. En términos generales, siguiendo la definición de teoría de juegos de Gibbons (1993), se define la teoría de juegos como el estudio de problemas de decisión que involucran a más de un individuo. Para efectos de la financiación de bienes públicos, la teoría de juegos estudia las decisiones de financiación por parte de los individuos con información simétrica, donde todos los individuos poseen la misma cantidad de información. Para tal efecto, se utiliza uno de los conceptos más conocidos dentro de la teoría económica: el equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash, se define como la estrategia que es la mejor respuesta a todas las estrategias de los jugadores restantes para una amplia gama de juegos (Gibbons, 1993). En otras palabras, es la mejor decisión que toma el individuo i cuando el individuo j decide financiar el bien público, o bien, es la mejor respuesta del individuo i cuando el individuo j decide no financiar el bien. De hecho, la definición anterior está vista desde la óptica del jugador i, sin embargo, se puede ampliar a N jugadores. Así, el equilibrio de Nash, se convierte en una herramienta poderosa para establecer la eficiencia en la provisión de los bienes públicos bajo condiciones específicas.

Ahora bien, una vez se han definido todos los elementos de la teoría económica que son necesarios para este trabajo, se define el otro gran componente del proyecto: la simulación. La simulación computacional, en términos generales, se define como la utilización de métodos de procesamiento computacional para la comprobación de resultados teóricos, en este caso, los económicos. Para este proyecto, se utilizan los paquetes de simulación en teoría de Juegos creados por el profesor Sebastian Kranz y se encuentran argumentados en (Kranz, 2010).

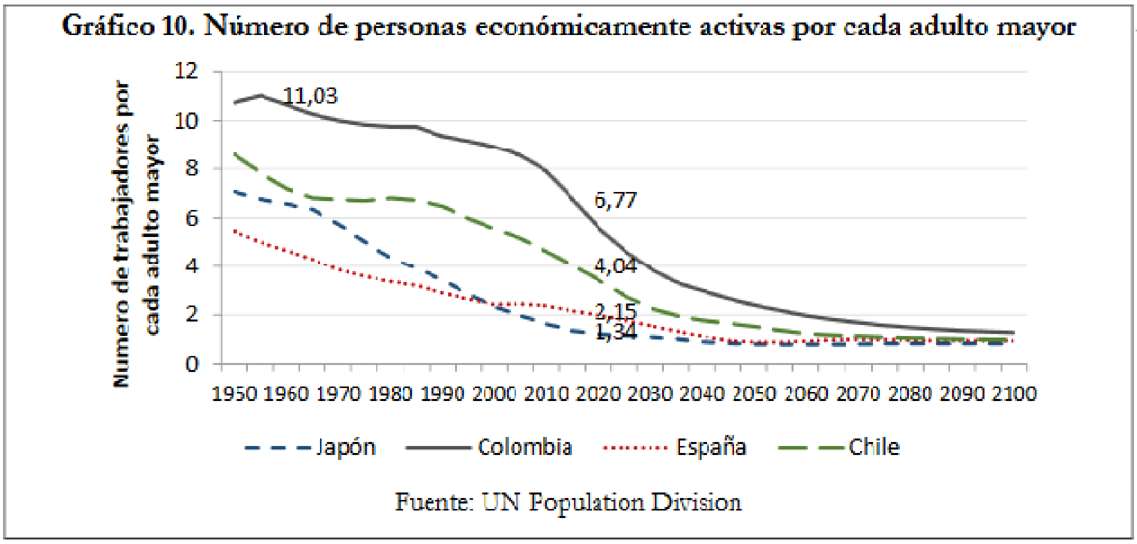
4 La historia

En esta sección, se presentan las principales características de los individuos a modelar y del ambiente de interacción. Lo anterior, se encuentra basado en el contexto colombiano. Las características del ambiente y de los individuos, determinan, en cierta medida, la interpretación de los resultados de la simulación que se presentará más adelante. Las características del mercado laboral y demografía, se encuentran basados en los análisis que presentan (Montenegro, Llano, Fajury, & García, 2017) sobre la inviabilidad de los regímenes de prima media en los países que gozan del bono demográfico. En este sentido, la historia lo que busca es ilustrar en qué condiciones los individuos toman las decisiones, de pertenecer o no a un tipo de régimen específico y cómo esto afecta la viabilidad de los regímenes de prima media en Colombia. De hecho, la conclusión del trabajo de Montenegro et.al (2017) es que los regímenes de prima media tenderán a ser inviables en el futuro. Siguiendo la línea argumental del trabajo presentado anteriormente, también se afirma que la decisión de los individuos de pertenecer a dicho régimen (el de un ahorro grupal) se encuentra determinada no solo por los efectos del tamaño del grupo, sino también por las características de la composición del grupo.

Antes de comenzar a narrar la historia, es importante decir que el juego a modelar se caracteriza por ser repetido infinitamente, es decir, los individuos maximizan su función de utilidad en un período indeterminado de tiempo, dado que ellos no saben cuánto van a vivir, su backward induction depende la capacidad de proyección de cada individuo. Sin embargo, por racionalidad, se sabe que cada individuo es capaz de determinar la tasa de descuento (impaciencia) de los pagos futuros. Esta tasa se encuentra determinada, entre otras cosas (como la función de utilidad misma), por la composición de los individuos del grupo en el ahorro grupal.

En primer lugar, pasamos a definir cuáles son las características potenciales de los grupos que pueden conformar el ahorro grupal (el régimen de prima media) a lo largo del tiempo. Basados en la figura 1, tomado del trabajo de (Montenegro et al., 2017) podemos decir que es un grupo donde la proporción de trabajadores inactivos por cada trabajador joven tenderá a aumentar, en otras palabras, esto significa que el número de personas económicamente activas, por cada adulto mayor, tenderá a disminuir. Esto se debe a varias razones, sin embargo, la de mayor importancia radica en el hecho de que la esperanza de vida del colombiano promedio, se espera que llegue a cerca de los 90 años en el año 2100. Algunas estadísticas descriptivas pueden sustentar esta información. La tasa de dependencia, esto es, la población que no genera ingresos y por tanto depende la población que genera ingresos (Montenegro et al., 2017) se espera que siga la tendencia de los países de ingresos altos (cuya esperanza de vida, producto del desarrollo económico, también va en aumento).

Figura 1: Personas Económicamente activas por cada adulto mayor



La tendencia indica que la tasa de dependencia total llegará a niveles cercanos al 80% en el 2100, lo cual haría inviable la existencia de un régimen de pensión como el ahorro global (régimen de prima media). Sin embargo, la tasa de dependencia de relevancia para estos casos es la de los adultos, que muestra una tendencia creciente y llegará a niveles cercanos al 60%. Por otro lado, la tasa de dependencia infantil llegará a niveles del 20% en el 2100, lo cual muestra otra tendencia de la población: el descenso en la existencia de menores, que serán luego jóvenes cotizantes (de la población económicamente activa), para financiar a los ancianos del futuro.

Ahora bien, una vez definidos algunas características demográficas del entorno en el que los individuos deben tomar decisiones, se explican las principales características del mercado laboral del entorno de interacción. Los conceptos del mercado laboral importantes en este caso son dos: el desempleo y la informalidad. El desempleo es importante controlarlo porque indicaría una baja capacidad de los mercados para absorber la mano de obra y, por tanto, existiría una baja cantidad de personas cotizando al sistema pensional. En segundo lugar, la informalidad es relevante en cuanto es un determinante de los bajos niveles de cotización al sistema pensional en Colombia. Lo cual reduce la probabilidad de aportar al sistema pensional casi a cero. La informalidad, en la actualidad, genera un efecto adverso sobre el sistema pensional: en Colombia, para el año 2010 existían siete trabajadores activos por cada adulto mayor (tendencia que se va a revertir en los próximos años) no obstante, la informalidad arrastra a que existan solamente dos trabajadores activos cotizando por cada adulto mayor que debe ser subsidiado (Montenegro et al., 2017).

Así, se ha completado la descripción de dos grandes componentes que caracterizan el espacio de interacción: la demografía y el mercado laboral. Ahora bien, es importante aclarar algunos supuestos que hasta el momento se han pasado por alto. Por simplicidad, no se ha tenido en cuenta el efecto del género sobre el entorno de interacción, es ampliamente conocido que las brechas de acceso y participación al mercado laboral, al igual que las dinámicas demográficas, son distintas entre hombres y mujeres, sin embargo, esto queda por fuera del alcance del trabajo. De igual manera, se excluyen problemas de información asimétrica, que generan ineficiencias en los mercados y se asume cero ruidos institucionales, esto es, el mercado como mecanismo de asignación eficiente de recursos, no presenta fallas.

Ahora bien, una vez definidos todos los elementos anteriores, se pasa a describir de manera sencilla la historia. Para esto se toma como referencia el experimento que se presenta en (Isaac & Walker, 1988). Suponga un conjunto de individuos que deben tomar una decisión en un espacio de interacción como el caracterizado anteriormente, los individuos deben tomar una decisión: ¿A qué tipo de sistema pensional afiliarse? Al régimen de prima media (el de ahorro grupal, de ahora en adelante) o bien, al régimen de ahorro individual, conocido como el régimen de ahorro individual solidario (RAIS) en Colombia.Todos los individuos son tomadores de precios, son racionales y tienen información completa. La formalización, esto es, la modelación matemática y económica de los individuos, sus decisiones y el espacio de interacción, se definen en la siguiente sección.

5 El Modelo

En esta sección, se presenta el modelo formal que caracteriza a los individuos, sus decisiones y el espacio de interacción en el que las toman. El modelo, se encuentra basado en dos textos. En primer lugar, en el trabajo de Abreu (1988) en el cual se presenta la teoría de los juegos repetidos infinitamente. En general, presenta una gran variedad de conceptos que son útiles a la hora de precisar sobre la modelación de los individuos. Por otro lado, también se tiene en cuenta el trabajo realizado por Isaac & Walker (1988) donde se realizan una serie de experimentos con individuos para identificar sus estrategias óptimas a la hora de elegir entre dos tipos de ahorro: el ahorro individual o el ahorro grupal. Lo cual 'simula' la elección de un individuo entre dos tipos de regímenes pensionales (sin tener en cuenta todas las complejidades legales que esto implica) como se mencionó en el capítulo anterior. El trabajo experimental de estos dos autores presenta una modelación más precisa, en términos de lo requerido para el presente trabajo. Por tanto, algunos apartes de este trabajo son extraídos casi literalmente de (Isaac & Walker, 1988).

En el trabajo de Isaac & Waler (1988) se examina la relación que existe entre el free-riding en la provisión de bienes públicos y las variaciones en el tamaño del grupo. Aquí se extiende el argumento, a pesar de que la modelación es similar, se asume que el free-riding en algunos casos particulares no solo depende del tamaño del grupo sino también de las características de la composición del grupo. Aunque, en últimas, esto afecta el mismo incentivo económico: el retorno marginal per cápita. Este punto es importante tenerlo en cuenta, porque, aunque no representa un cambio en términos de modelación si lo representa en términos de análisis de resultados.

Por otro lado, los aportes extraídos del trabajo de Abreu (1988) se basan en la notación y en las definiciones de los juegos repetidos infinitamente con descuento. Dicha modelación, se encuentra a su vez, basada en Rubinstein (1979). En este sentido, lo que permite el trabajo de Abreu (1988) es tener el *framework* general de la modelación de un super juego con tasas de descuento y con *paths* de castigo óptimos. Es importante anotar que dichos castigos, en el trabajo de Abreu (1988) se demuestran de manera general. Sin embargo, como lo afirma el autor, su modelación puede tener muchas aplicaciones, este trabajo representa una de ellas. La notación y las definiciones están basadas en su trabajo.

5.1 El modelo general: Abreu (1988)

El juego en estacionario se puede definir como:

$$G = \left(\{S_i\}_i^n ; \{\pi\}_{i=1}^n\right)$$

Donde n es la n-ésima entrada de un vector $N = \{1, 2, ..., n\}$ que representa el conjunto de los jugadores. A su vez, S_i representa el conjunto de estrategias para el jugador i y el π_i representa el pago asociados a cada estrategia $s \in S$. Lo cual implica que π_i es una función de S_i. Formalmente tenemos que:

$$\pi_i = S_1 * S_2 * ... * S_n \rightarrow R$$

Note que hasta el momento, el juego no se ha dinamizado, es decir, no se ha incluido el factor tiempo dentro de su modelación. Ahora bien, el juego repetido infinitamente se define como sigue:

Se define el superjuego $G^{\infty}(\delta_i)$ donde δ representa la tasa de decuento obtenida de repetir el conjunto de estrategias y evaluar los pagos asociados a cada una de las estrategias en términos de infinitos $\delta \in (0, 1)$. Note que, a diferencia del trabajo de Abreu (1988) se ha definido una δ_i para cada jugador i. Aunque para el objetivo del trabajo del autor esto no representa ninguna relevancia, en este proyecto no es así, debido a que la tasa de descuento define una serie de características de los individuos en la realidad, que pueden ser muy útiles a la hora de interpretar los resultados. Una vez definido los juegos estáticos y dinámicos, se pasa a definir el conjunto de estrategias de los individuos. Una aclaración importante, las estrategias definidas aquí son puras, lo cual quita la necesidad de otorgar una probabilidad a la incertidumbre del individuo i sobre las decisiones del individuo $j \in N$.

La estrategia pura de los individuos se denota con σ_i y se define como sigue: $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(t)$ representa una serie de funciones del individuo i para cada momento t. A su vez, cada σ_i es función de las decisiones de todos los $n - 1$ individuos en los $t - 1$ períodos anteriores. Formalmente:

$$\sigma_i(1) \in S_i \quad \textbf{para cada} \quad t = 2, 3, ..., \sigma_i(t) : S^{t-1} \rightarrow S_i$$

Llegados a este punto, solo falta por definir la función de pago de los individuos, con base a las definiciones anteriores. Por simplicidad se omiten algunos pasos, la prueba completa de estos pasos se puede encontrar en Abreu (1988) y Rubinstein (1979).La función dinámica de pagos se define como sigue:

$$v_i(Q) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^t \pi_i \left(q\left(t\right)\right)$$

Ahora bien, antes de terminar, es imporante anotar una definición más. Esta forma de definir el juego, permite crear subsets de historias a partir de un momento del tiempo. Los subsets pueden estar enmarcados en un contexto de castigo, por ejemplo tipo *grimm-trigger* en el cual una desviación del equilibrio, genera castigos tales que nunca se vuelve al óptimo, o bien, del tipo *stick-carrot* donde el castigo solo se da por unas etapas del juego. Esta definición es importante porque permite claridad sobre algunas interpretaciones de los resultados. De hecho, también permite simular, el ambiente propuesto por Isaac & Walker (1988), en el cual se crean pequeños *fines* a los períodos de juego. Formalmente, una historia H^t se define como:

$$H^t = (q(1), q(2), ...,)_{t \in T}^{T} \in S^t$$

Note que, los períodos del subjuego se marcan hasta un tiempo t establecido. Sin embargo, se puede extender el subjuego hasta ∞, lo cual quedaría expresado formalmente como: $H_{t>1}^{\infty} \in S^{\infty}$

5.2 Caso específico: el modelo basado en Isaac & Walker (1988)

En esta subsección se muestra el modelo en el cual se basa la simulación realizada en el programa R, cuyos resultados se presentan en la siguiente sección. Este modelo es una adaptación del modelo presentado por los autores mencionados en el título de la sección, en la interpretación y en la connotación de algunos de sus parámetros. Sin embargo, matemáticamente hablando no varían en gran medida. Ahora bien, también es importante resaltar otro hecho, el modelo presentado anteriormente, enmarca todas las definiciones particulares que se proponen abajo. Por tal motivo, el lector podrá notar que no se hace tanto énfasis en las definiciones sino en las implicaciones de las formas funcionales sobre los resultados y la interpretación de los resultados de la simulación.

En primer lugar, se definen los primitivos del juego de la siguiente manera:

- W_t la dotación de dinero de los individuos, para este caso particular, se asume que las dotaciones provienen del trabajo, o bien, del ahorro en otros períodos t.
- $\succeq_i$ que define dos cosas: la elección de las estrategias óptimas y la función de utilidad.
- Una función de Utilidad $U : v_i \to R$. Esto es, la función de utilidad que le asigna un número real a cada pago recibido por el individuo i.
- $N = \{1, 2, ..., n\}$ que define el conjunto de jugadores.

Debe ser claro para el lector que el conjunto de estrategias S_i no hace parte de los primitivos del modelo porque, como se mencionó anteriormente, el conjunto de estrategias $s \in S$ dependen de las decisiones tomadas por los otros individuos en todos los momentos del tiempo. Por tanto, S_i no se encuentra definida *ex-ante*.

Ahora bien, una vez definido lo anterior, es posible modelar la decisión de los individuos. Los agentes de la economía tienen dos posibles decisiones: elegir el ahorro grupal, o bien, elegir el ahorro individual. Análogamente, esto representa la decisión que tienen los individuos de afiliarse a un sistema pensional u otro.

La función de utilidad representativa de los individuos se define como sigue:

$$U(\pi_i(q_i))$$

Y cumple las siguientes condiciones:

- $\frac{\partial U}{\pi} > 0$

- $\frac{\partial U^2}{\partial^2 \pi} < 0$

En primer lugar, en el ahorro individual se tiene que los individuos ahorran una proporción γ de su dotación en cada momento del tiempo :W_i^t. Cada ahorro, genera un retorno marginal de \$0.01. Para el caso del ahorro grupal, el retorno marginal es una función de la producción del bien público y la cantidad de individuos con una ponderación de composición del grupo, la función de producción del bien público se define como sigue:

$$G\left(M_i + \sum_{j=1}^{N} M_j\right) \quad \textbf{donde} \quad i, j \in N$$

Esta función de producción representa una donde los aportes de los individuos son de tipo voluntario. A su vez, $M_i = \beta W_i$ y $M_j = \beta W_j$. Los retornos de la función de producción para cada individuo vienen representados por:

$$\frac{1}{\alpha n} G(Z)$$

Donde α es un ponderador de composición del grupo y Z representa la suma de los aportes del grupo. La función de producción $G(.)$ de acuerdo con Isaac & Walker (1988) produce un *first best* cuando $M_i = W_i$. Es decir, la función de producción que determina los retornos, es una tal que los individuos se sienten incentivados a aportar tanto como puedan y deseen. El poder, claramente, se encuentra determinado por las dotaciones del individuo i en el momento t. La función de utilidad queda determinada por:

$$U(\pi^*, \pi_i) \quad \to R$$

donde,

- π_i corresponde al conjunto de pagos asociados a un subcnjunto de $s \in S$ donde se prefiere el ahorro individual sobre el grupal.

- π_i^* corresponde al conjunto de pagos asociados a un subconjunto de $s \in S$ donde se prefiere el ahorro individual sobre el grupal.

Una vez definido el paso anterior, se puede describir el proceso de maximización de cada individuo, en cada etapa del juego. Es importante aclarar que cada etapa del juego representa un proceso de maximización. Así, se puede definir la maximización del individuo i como:

$$\max_{0 \leq M_i^t \leq W_i^t} U(\pi^*, \pi_i) \ \ \textbf{s.a} \ \ [q_{\neg i}, q_{\neg i}^*]_{t<t*\in T}^{\infty}$$

En este caso, $[q_{\neg i}, q_{\neg i}^*] \in S^{\neg i}$ representa el conjunto de estrategias escogidas por el resto de los jugadores en los t momentos anteriores al t-ésimo momento del juego t^* que representa la etapa que se está jugando.

6 Simulación-Resultados

En esta sección se presentan los principales resultados de la simulación realizada para el modelo planteado anteriormente. Antes de mostrar los resultados, es importante hacer claridad sobre dos puntos: como se ha dicho anteriormente, la simulación se encuentra basada en los aportes encontrados en Kranz (2012) y en los códigos que él mismo ha proporcionado. En segundo lugar, las modificaciones al código del profesor Kranz se encuentran basados en un modelo creado a partir del experimento propuesto en Isaac & Walker (1988), lo cual requiere una reparametrización del modelo planteado en el código original.

6.1 El caso de 2 jugadores

En principio, por simplicidad, se muestran los resultados del juego para 2 jugadores. La construcción de las funciones en la simulación, basadas en el modelo planteado anteriormente, se encuentran en el anexo del trabajo.

La tabla 1 nos permite ver varias cosas. En primer lugar, para una tasa de descuento nula, es decir, cuando a los agentes no les presenta beneficios adicionales o menores el consumo presente y futuro, la acción óptima es siempre aportar al bien público por parte de ambos individuos. En este caso, eso

Tabla 1: Resultados para el juego de 2 jugadores

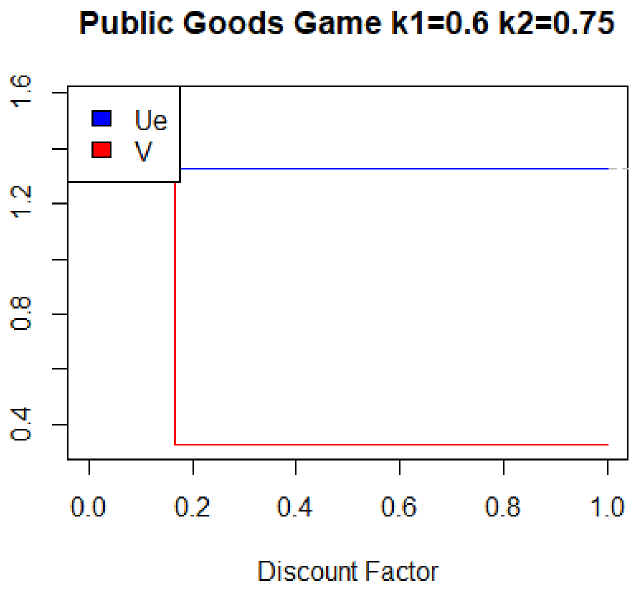
	delta (δ)	L	Ue	V	v1	v2	ae	a1	a2	r	UV	opt
(1|1),(1|1),(1|1)	0.0000000	0.0	1.325	1.325	0.7	0.625	4	4	4	Inf	0	1
(1|1),(1|0),(0|1)	0.1666667	0.2	1.325	0.325	0.2	0.125	4	3	2	5	1	1

significa aportar al sistema de ahorro grupal. Es importante recordar que, al igual que un problema de optimización tradicional, los individuos eligen su acción de acuerdo a lo que maximice su nivel de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria. Luego, a una tasa de descuento de 0.17, también se obtiene que los individuos tienen como acción óptima aportar al régimen de prima media. No obstante, para esa tasa mínima de descuento, el comportamiento en cuanto a los castigos son distintos a los obtenidos a una tasa de 0. En este caso, los individuos no tienen incentivos a desviarse del equilibrio aún cuando la contraparte lo haga. En otras palabras, cuando el individuo j deja de aportar al bien público, el individuo i sigue aportando y viceversa. Lo cual puede dar un indicio de la no existencia de *group size effects*. Por otro lado, Ue corresponde al pago conjunto que reciben los individuos debido a la acción $q \in S$ que toman. Esto es: $\sum_{i=1}^{2} \pi_i(q_i)$. V representa el pago conjunto que reciben los individuos cuando se juegan las estrategias de castigo. v_i es el pago individual que se recibe si se juegan las estrategias de castigo. ae es la acción que se juega en todas las etapas del juego por todos los jugadores. Es decir, la posición que ocupa (1|1) en la matriz de acciones. El juego queda representado gráficamente como lo muestra la figura 2. Se asume que los costos marginales que enfrentan los individuos son 0.6 para el jugador 1 y 0.75 para el jugador 2.

Ahora bien, después del análisis de las acciones óptimas de los individuos, es pertinente realizar un análisis de estática comparativa. Esto es, analizar cómo se modifican las acciones de los individuos ante cambios en los factores que las determinan (por ejemplo, cambios en el costo marginal de aportar al bien público o cambios en la tasa de descuento).

La figura 2 muestra cómo varían los pagos conjuntos, que dependen del nivel de aporte de los individ-

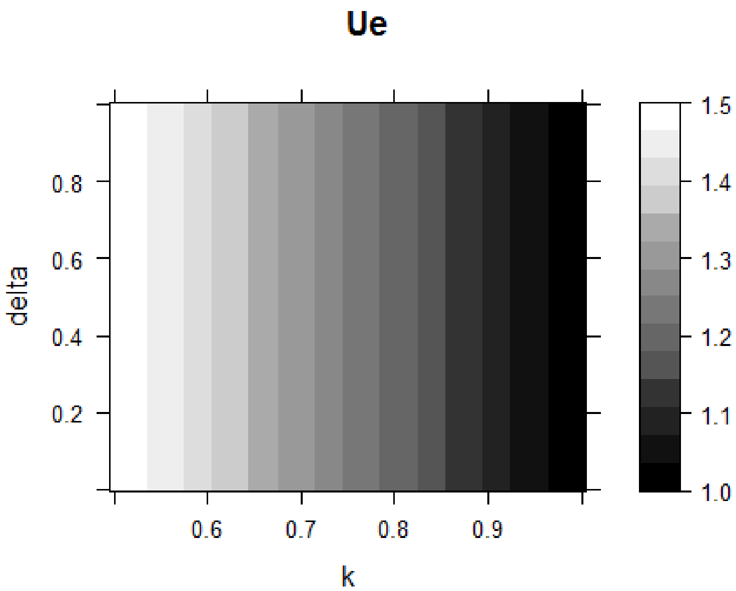
Figura 2: Representación juego de 2 jugadores



uos, ante cambios en la tasa de descuento y en los costos marginales. Esta gráfica es una confirmación de los resultados obtenidos en la tabla 1. Como se puede observar, el nivel de pago conjunto es independiente de la tasa de descuento. Al igual que se mostró anteriormente, la acción óptima de siempre aportar no varía a lo largo del conjunto de tasas de descuento. No obstante, vemos que los costos marginales de aportar disminuyen los pagos conjuntos. Este punto es importante por dos cosas:primeramente, porque muestra que es necesario reducir los costos de los individuos para aportar al bien público (costos de transacción, por ejemplo); en segundo lugar, porque la independencia de los aportes a la tasa de descuento implica que los pagos futuros tiene, para los individuos, el mismo valor que los pagos presentes.

En la figura 4, una vez identificado que los pagos (lo cual implica que las acciones óptimas de los individuos) son independientes de la tasa de descuento, se analiza ahora cómo se modifican las acciones óptimas cuando el nivel de costo marginal por aportar al bien público es distinto para cada uno de los individuos. Para tal fin, se fija la tasa de descuento en la mínima que crea una estrategia de castigo distinta a la que se crea en la tasa de descuento 0. Al igual que en la figura 2 tenemos que el nivel de aporte depende del nivel de costo que enfrentan los individuos. En los niveles de costo alto, el nivel de

Figura 3: Estática comparativa: variación tasa de descuento

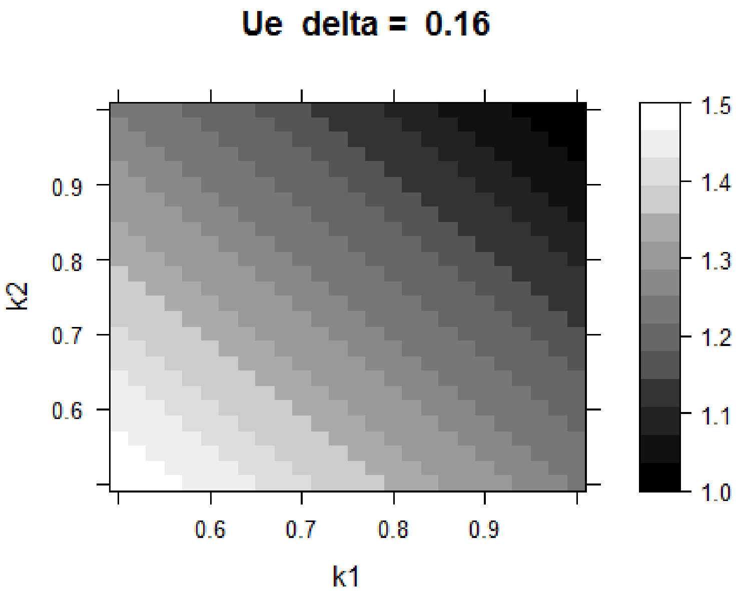


pago conjunto es mas bajo.

De igual manera, de la figura 4 se puede inferir las curvas de isocosto (entendidas aquí como las curvas para el cual el costo total de proveer el bien público es el mismo) cuyas pendientes son los costos marginales que enfrentan los individuos, son lineales. La linealidad en estas curvas implican que ninguno de los individuos tiene incentivos para hacer *free-riding*. Esto es muy importante por lo siguiente: dentro del contexto del trabajo la linealida de las curvas de isocosto muestra que ninguno de los individuos tiene icentivos para no aportar al bien público. En otras palabras, esto muestra que aun cuando el régimen de prima media es un tipo de co-financiación (financiación grupal) de las pensiones, los individuos se comportan como si fuera un retorno individual.

Por último, para terminar la sección de estatica comparativa en el juego de aporte de 2 jugadores, se analiza la relación que existe entre el comportamiento de las acciones de castigo, la liquidez y los factores de descuento. Como lo muestra la figura 5, para unos costos marginales simetricos y menores a los obtenidos en el juego de la tabla 1 y la figura 2, el descuento que se necesita para que exista un

Figura 4: Estática comparativa: variación costos marginales



castigo óptimo es mayor. Esto es, porque entre menores sean los costos, mayor debería ser el incentivo para desviarse de la acción óptima. Esto queda demostrado con la figura 6, donde se muestra la relación entre la liquidez y los pagos conjuntos de acciones óptimas y de castigo. Vemos que a medida que el nivel de liquidez aumenta, la acción óptima no cambia, sin embargo, los pagos asociados a las acciones de castigo son menores. Por tal motivo, en la línea que se ha venido trabajando obtendríamos lo siguiente: es necesario un descuento mayor de los pagos futuros de la acción óptima para que se igualen con el valor de los pagos futuros de las acciones de castigo, por ese motivo se afirma que los incentivos deben ser altos. De igual manera, se evidencia que la acción óptima de los individuos no cambia de acuerdo con la liquidez. En esencia, esto implica que para cualquier nivel de liquidez, la acción óptima es siempre aportar al régimen de ahorro individual. Así concluye esta subsección.

6.2 El caso de n-jugadores: group size effects

En esta sub sección se presentan los resultados obtenidos del juego para n jugadores. El objetivo de esta subsección es presentar evidencia teórica a favor (o en contra) de los resultados obtenidos por Isaac & Walker (1988). Estos autores, como se ha mencionado anteriormente, realizaron un trabajo experimental

Figura 5: Diferencia acción-castigo

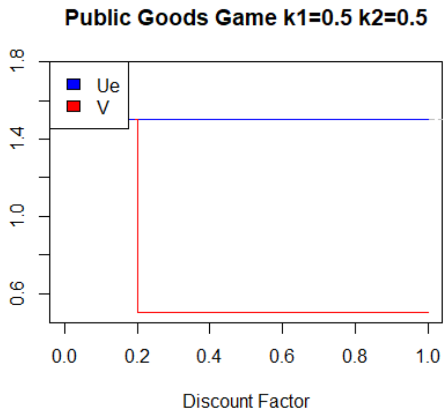
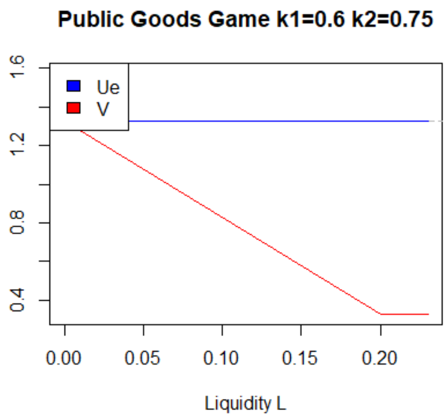


Figura 6: Diferencia acción-castigo



para analizar el comportamiento de los individuos cuando se trata de elegir entre dos sistemas de ahorro. Uno de los resultados que obtuvieron es que no existe evidencia de que existan *group size effects* producto solamente del tamaño del grupo. De igual manera, se muestra la comprobación simulada de estos autores respecto a los juegos repetidos de n jugadores.

Al igual que en el experimento de Isaac & Walker se encuentra que el solo cambio del tamaño del grupo, no implica la existencia de los efectos de grupo. Es decir, cambiar el tamaño del grupo no crea incentivos para que exista free-riding. ¿Cómo se caracteriza esto en la simulación? si vemos, el máximo pago conjunto en el juego de 5 jugadores (Ue) es de 5, lo cual es un resultado posible, si y solo sí todos

Figura 7: Caracterizacion del juego 5 jugadores

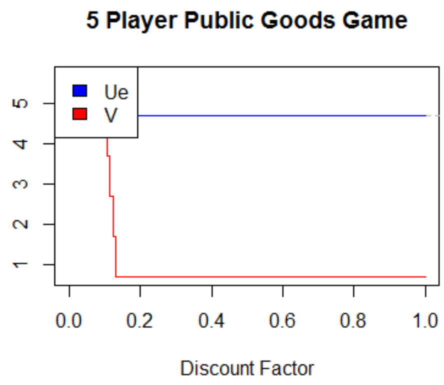
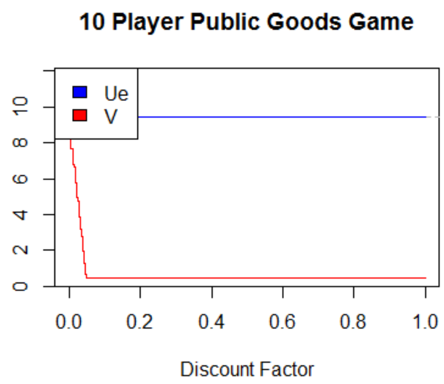


Figura 8: caracterización del juego 10 jugadores



los jugadores aportaron al bien público. Cuando pasamos al juego de 10 jugadores, el pago máximo conjunto es un resultado igualmente posible si y solo si todos los jugadores aportaron al bien público. Por otro lado, existe un resultado interesante: el comportamiento de los pagos de castigo. La tasa de descuento que hace el pago de la acción de castigo el menor posible es mayor en el juego de 5 jugadores que en el juego de 10 jugadores. Esto es un indicio de una tasa de retorno marginal percibida menor. En esencia, se necesita menos descuento de los pagos futuros para igualar el valor presente de ambos perfiles: el perfil de acción óptima y el perfil de castigo óptimo.

7 Conclusiones

- El sistema pensional colombiano, al igual que muchos sistemas de pensiones en el mundo, se encuentra en una encrucijada. Se espera que para los próximos años, los regímenes de prima media, caracterizados por ser co financiados por los contribuyentes y el Estado, dejen de ser inviables por varias razones. La principal, y sobre la cual se tiene menos control, es la transición demográfica hacia una sociedad que se está envejeciendo producto del aumento en la calidad de vida del país. Por otro lado, el mercado laboral colombiano también supone muchos retos para los hacedores de política, en esencia lo siguiente: combatir la informalidad laboral. Una de las consecuencias de reducirla sería un amyor nivel de cotización al sistema pensional, lo cual es necesario en este momento de la historia.

- En este sentido, este trabajo buscaba ser un aporte teórico que busca demostrar cuáles son los determinantes de elección de un individuo para decidirse por un régimen pensional en particular. Para tal fin, se crea un modelo teórico con un enfoque de teoría de juegos donde los determinantes exógenos del modelo se encuentran enmarcados en el contexto que los individuos toman estas decisiones en Colombia: alta informalidad y transición demográfica. Posteriormente, se decide simular el modelo, utilizando los métodos computacionales como una nueva forma de presentar la teórica económica.

- Los resultados de la simulación dejan varios resultados interesantes de comprobar empíricamente. En primer lugar, la acción óptima de los individuos cuando hay 2 o n jugadores, es siempre aportar al bién público. Es decir, aportar al régimen pensional de ahorro grupal. De igual manera, se concluye que las acciones de los individuos, aún cuando en su maximización están teniendo en cuenta al jugador restante, se comportan como acciones de ahorro individual. Esto se evidencia en el comportamiento de las acciones de castigo.

- De igual manera, se puede observar que la liquidez necesaria para aportar al régimen de pensiones no es un determinante de la acción óptima. Sin embargo, no se puede afirmar que la afiliación al sistema pensional sea independiente. Esto, debido a que se debe comprobar si el regímen de ahorro individual presenta el mismo comportamiento.

- Cuando el juego se extiene a n jugadores, se obtiene que, al igual que en Isaac & Walker no existen efectos de grupo solamente explicados por el aumento en el tamaño del grupo. A su vez, quedan comprobadas las conclusiones de los mismos autores acerca de los juegos de n jugadores: con información completa, en los juegos teóricos, los individuos tienden a maximizar su utilidad etapa a etapa, caso diferente a los juegos experimentales. De lograr un modelamiento que incluya este tipo de análisis se podría calibrar con mejor precisión sus experimentos.

- Por último, se espera que para una expansión del trabajo, se logre modelar no solo los efectos de grupo via tamaño del grupo sino también incorporar la capacidad de análisis de los individuos sobre la calidad del grupo. En este caso particular, sobre factores como: el desempleo esperado del grupo, la informalidad laboral del grupo y la composición demográfica del mismo.

8 Anexos

```
#EL PRESENTE CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN TIENE COMO OBJETIVO MOSTRAR LAS SIMULACIONES DE JUE-
GOS REPETIDOS CON UNA APLICACIÓN
#AL SISTEMA PENSIONAL. EL CÓDIGO SE ENCUENTRA BASADO EN LA PROGRAMACIÓN DEL PROFESOR SE-
BASTIAN KRANZ, CUYA EXPLICACIÓN
#SE ENCUENTRA EN KRANZ (2012)>>



##Instalación de los paquetes necesarios##
# Install CRAN Packages
pkgs = c("devtools","glpkAPI","slam","Rcpp","lattice")
for (pkg in pkgs) {
```

```r
  if (!require(pkg, character.only=TRUE))
    install.packages(pkg)}

## Loading required package:  devtools
## Loading required package:  glpkAPI
## using GLPK version 4.47
## Loading required package:  slam
## Warning:  package 'slam' was built under R version 3.4.4
## Loading required package:  Rcpp
## Loading required package:  lattice

# Instalar paquetes de GitHub
library(devtools)
install_github(repo="skranz/restorepoint")

## Skipping install of 'restorepoint' from a github remote, the SHA1 (3c4d05c4) has not
changed since last install.
##  Use `force = TRUE` to force installation

install_github(repo="skranz/rowmins")

## Skipping install of 'rowmins' from a github remote, the SHA1 (af698a8a) has not changed
since last install.
##  Use `force = TRUE` to force installation

install_github(repo="skranz/repgame")

## Skipping install of 'repgame' from a github remote, the SHA1 (07ad1601) has not changed
since last install.
##  Use `force = TRUE` to force installation

##esta es un función  que crea las matrices de pago y las funciones de pago de los jugadores##
```

```r
public.goods.game = function(X, k1,k2=k1) {
  # Two lines that are useful for debugging (see hints below)
  restore.point("public.goods.game")

  # Initialize matrices of players contributions
  x1m = matrix(X,NROW(X),NROW(X),byrow=FALSE)
  x2m = matrix(X,NROW(X),NROW(X),byrow=TRUE)
  x1m
  # Calculate payoff matrices for each player
  g1 = ((x1m+x2m) - k1*x1m)/(2)
  g2 = ((x1m+x2m) - k2*x2m)/(2)

  # Give the game a name
  name = paste("Public Goods Game k1=", k1, " k2=",k2,sep="")

  # Initialize the game
  m = init.game(n=2,g1=g1,g2=g2,name=name, lab.ai=X)

  # Solve and plot the model
  m = solve.game(m, keep.only.opt.rows=TRUE)
  plot(m)
  return(m)
}
#Esta línea de código permite hallar la solución óptima dados los valores de los parámet-
ros#
m = public.goods.game(X=c(0,1),k1=0.6,k2=0.75)
```

```
## Error in restore.point("public.goods.game"):  no se pudo encontrar la función "restore.point"

#Esta linea permite obtener la matriz solución del juego anterior#

m$opt.mat

## Error in eval(expr, envir, enclos):  objeto 'm' no encontrado

##Estatica comparativa, costos simétricos##

pg.games = Vectorize(public.goods.game, vectorize.args = c("k1","k2"),SIMPLIFY=FALSE)

k.seq = seq(0.5,1,by = 0.01)

m.list = pg.games(X=c(0,1),k1=k.seq,k2=k.seq)

## Error in restore.point("public.goods.game"):  no se pudo encontrar la función "restore.point"

mat = levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.seq ,

                                xvar = "k", yvar = "delta", payoff.var="Ue",

                                delta = seq(0,1,by = 0.01),col.scheme = "grey")

## Error in levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.seq, xvar = "k", yvar = "delta", :

no se pudo encontrar la función "levelplot.payoff.compstat"

##estatica comparativa, costos asimétricos##


k.seq = seq(0.5,1,by = 0.02)


# crea un objeto de la secuencia de los resultados cambiando los costos##

k.grid = make.grid.matrix(x=k.seq,n=2)

## Error in make.grid.matrix(x = k.seq, n = 2):  no se pudo encontrar la función "make.grid.matrix"

colnames(k.grid)=c("k1","k2")

## Error in colnames(k.grid) = c("k1", "k2"):  objeto 'k.grid' no encontrado
```

```
# Soluciona el juego combinando los resultados posibles de k1 y k2#
m.list = pg.games(X=0:1,k1=k.grid[,1],k2=k.grid[,2])
## Error in FUN(X[[i]], ...):  objeto 'k.grid' no encontrado
# Para un nivel de descuento delta, muestra las lineas de isocosto#
delta = 0.17
levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.grid ,
                          xvar = "k1", yvar = "k2", payoff.var="Ue",delta = delta,
                          col.scheme = "grey")
## Error in levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.grid, xvar = "k1", :  no se pudo en-
contrar la función "levelplot.payoff.compstat"
#Crea una gráfica donde se muestra la relación entre los pagos maximos y la liquidez##
plot(m, xvar = "L", identify = T)
## Error in plot(m, xvar = "L", identify = T): objeto 'm' no encontrado
##juego de N jugadores, no hay group size effects explicados solo por tamaño de n##


pg.game = function(n,X,k=rep(((1+1/n)/2),n)) {
  # A function that returns a payoff matrix
  # given a action matrix x.mat, of which
  # every row corresponds to one action profile
  g.fun = function(x.mat) {
    g = matrix(0,NROW(x.mat),n)
    xsum = rowSums(x.mat)
    for (i in 1:n) {
      g[,i] = (xsum  - k[i]*x.mat[,i])/ n
    }
```

```
    g
  }
  name=paste(n,"Player Public Goods Game")
  m = init.game(n=n,g.fun=g.fun,action.val = X,
                name=name, lab.ai=round(X,2))
  m=solve.game(m)
  plot(m)
  m
}

m = pg.game(n=5,X=0:1,k=c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5))#5 jugadores#

## Error in init.game(n = n, g.fun = g.fun, action.val = X, name = name, : no se pudo en-
contrar la función "init.game"

m = pg.game(n=10,X=0:1,k=c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1))#10 jugadores#

## Error in init.game(n = n, g.fun = g.fun, action.val = X, name = name, : no se pudo en-
contrar la función "init.game"

#esta linea de código permite caracterizar la gráfica de los juegos de n jugadores##
mat = levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.seq ,
                                xvar = "k", yvar = "delta", payoff.var="Ue",
                                delta = seq(0,1,by = 0.01),col.scheme = "grey")

## Error in levelplot.payoff.compstat(m.list, par = k.seq, xvar = "k", yvar = "delta", :
no se pudo encontrar la función "levelplot.payoff.compstat"
```

9 Bibliografía

- Abreu, Dilip, 1988. "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting," *Econometrica*, 56, 383-396
- Gibbons, Robert (1992). Un primer curso en teoría de juegos. Antoni Bosch Editor.
- Gruber, J. (2015). Public Finance and Public Policy. *Macmillan Higher Education.* Retrieved from `https://books.google.com/books?id=UNpACwAAQBAJ&source=gbs_book_other_versions`
- Isaac, R.M.,Walker, J.M., 1988., Group Size Effects in Public Goods Provision: The Voluntary Contributions Mechanism, *Quarterly Journal of Economics* 103(1): 179-199.
- Kranz, Sebastian, 2010. "Moral Norms in a Partly Compliant Society," *Games and Economic Behavior*, vol 68 (1): 255-274.
- Montenegro, S., Llano, J., Fajury, K., & García, M. C. (2017). La inviabilidad de los regímenes de pensiones de reparto en países que aún gozan del dividendo poblacional: el caso de Colombia. *Serie Documentos Cede*, 2017-51. Retrieved from `http://economia.uniandes.edu.co`
- Rubinstein, A. (1979). Equilibrium in supergames with the overtaking criterion. *Journal of Economic Theory*, 21(1), 1–9. `https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90002-4`
- Samuelson, P. A. (1954). The pure theory of public expenditure. *The Review of Economics and Statistics*, 36(4), 387–389. `https://doi.org/10.2307/1925895`
- Varian, H. (1993). Análisis Microeconómico. Antoni Bosch Editor (3 ed): Barcelona.