



**COMPARACIÓN DE PORTAFOLIOS QUE INCLUYEN MAYORES
MOMENTOS DE LA DISTRIBUCIÓN (SESGO Y KURTOSIS) Y LA
DIVERSIFICACIÓN**

AUTOR

JUAN JOSÉ GUTIÉRREZ GÓMEZ

DIRECTORA DEL PROYECTO

YENY ESPERANZA RODRIGUEZ RAMOS PhD

UNIVERSIDAD ICESI

FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y ECONÓMICAS

PROGRAMA DE ADMINISTRACION DE EMPRESAS

SANTIAGO DE CALI

2020

Tabla de contenido

RESUMEN	3
Introducción	4
1. REVISIÓN DE LITERATURA.....	5
1.1. Teoría Moderna de Portafolio	5
1.2. Teorías Alternativas a la Teoría Moderna de Portafolio.....	6
1.3. Evaluación de Desempeño del Portafolio	13
2. Metodología	14
2.1. Datos y fuentes	14
2.2. Conformación de Portafolios.....	16
2.3. Evaluación de Portafolios.....	20
3. Resultados	21
4. Conclusiones	30
5. Bibliografía	32

RESUMEN

El tradicional enfoque de Media-Varianza se ha podido complementar con teorías alternativas que implican momentos más altos de los retornos de los activos financieros en la asignación de un portafolio eficiente o la diversificación del mismo. En este estudio se parte del portafolio diversificado conductual planteado por Contreras, Gómez y Rodríguez (2020) que utiliza como medida de riesgo el sigma conductual, el cual involucra características de la distribución de los retornos y la tolerancia al riesgo del inversionista, y se compara con portafolios que tengan como objetivo, minimizar el nivel de asimetría del portafolio, maximizar la kurtosis del mismo o maximizar la diversificación, de tal forma que cumpla con el mismo retorno del portafolio diversificado conductual. Los portafolios construidos son comparados teniendo en cuenta las principales medidas de desempeño. La aplicación de la metodología se hace en el contexto colombiano, para 19 acciones que componen el principal índice bursátil COLCAP, y se toman los retornos diarios para una ventana de tiempo comprendida entre enero del 2015 y diciembre del 2019.

Palabras claves:

Portafolio media-varianza, Tolerancia al riesgo, Kurtosis, Sesgo, Entropía, Diversificación, Desempeño del portafolio.

Abstract

The traditional Mean-Variance approach has been complemented with alternative theories that imply higher moments of the returns of financial assets in the allocation of an efficient portfolio or its diversification. This study starts from the behavioral diversified portfolio proposed by Contreras, Gómez and Rodríguez (2020) that uses behavioral sigma as a risk measure, which involves characteristics of the distribution of returns and the risk tolerance of the investor and compares with portfolios that aim to minimize the level of portfolio asymmetry, maximize its kurtosis or maximize diversification, in such a way that it meets the same return as the behavioral diversified portfolio. The portfolios constructed are compared taking into account the main performance measures. The application of the methodology is done in the Colombian context, for 19 stocks that make up the main COLCAP stock index, and the daily returns are taken for a time window between January 2015 and December 2019.

Keywords:

Medium-variance portfolio, Risk tolerance, Kurtosis, Bias, Entropy, Diversification, Portfolio performance.

Introducción

La teoría de portafolio de los últimos 50 años se ha dedicado en buscar nuevas formas de medir el riesgo asociado a la inversión de un grupo de activos. Como referencia cuando Harry Markowitz, en 1952, propuso medir el riesgo y el posible retorno a partir de un análisis geométrico, es la base de lo que hoy se constituye en uno de los campos más investigado dentro de las finanzas.

El presente estudio nace a raíz de la necesidad de comprobar si incluir diferentes momentos de los retornos y la tolerancia al riesgo del inversionista en un solo portafolio, el diversificado conductual, presenta mejor desempeño que cada uno de los portafolios que involucran de manera independiente cada uno de los momentos de los retornos, pero cumpliendo con que todos los portafolios presenten el mismo retorno presentado por el diversificado conductual. El portafolio diversificado conductual fue planteado por Contreras, Gómez & Rodríguez (2020), en él los autores utilizan como medida de riesgo el sigma conductual que propuso Davies and de Servigny (2012) y el cual involucra un factor comportamental (tolerancia al riesgo del inversionista) y diferentes momentos de la distribución de los retornos como el sesgo y la kurtosis. Además Contreras, Gómez & Rodríguez (2020) modelan incertidumbres no estadísticas de los inversionistas que están relacionadas con las preferencias sobre el retorno, la varianza y la diversificación del portafolio, las cuales dependen de la tolerancia al riesgo que presente el inversionista.

El objetivo de este estudio es comparar el desempeño del portafolio diversificado conductual con el de portafolios de forma independiente presentan un solo objetivo, maximizar el sesgo (Chunhachinda y Prakash, 2003), maximizar la kurtosis (Cheng, 2016), o maximizar la diversificación del portafolio (Contreras, Rodríguez & Sosa, 2017), pero manteniendo el mismo retorno obtenido por el portafolio conductual. De este estudio se logra tener evidenciar cómo cambia la composición de un portafolio con igual retorno de acuerdo a la tolerancia al riesgo del inversionista.

Por lo anterior, la importancia de este estudio radica en evidenciar, a partir de la evaluación de los portafolios obtenidos, como el portafolio conductual que involucra no solo diferentes niveles de tolerancia al riesgo sino que contrarresta algunas de las debilidades de la teoría moderna de portafolio, presenta mejor desempeño que los portafolios que analizan funciones objetivo de forma independiente,

Este trabajo está organizado en cuatro partes. La sección 2 presenta la revisión de la literatura que es necesaria para proporcionar antecedentes de la teoría moderna de portafolio, en esta también se revisa la evaluación de portafolios y propuestas de autores que permiten tener un análisis más detallado. La sección 3 contiene la metodología utilizada para construir los portafolios propuestos. La sección 4 presenta los resultados de la aplicación de 19 activos financieros que hacen parte del índice del COLCAP. Finalmente, la sección 5 presenta conclusiones sobre el estudio realizado.

1. REVISIÓN DE LITERATURA

En esta sección se presenta una descripción de la teoría moderna de portafolio planteada por Markowitz (1952), al tiempo que se plantean algunos modelos que involucran mayores momentos de la distribución, diferentes a la media y a la desviación estándar, como el sesgo y la kurtosis. Adicional, se plantea la construcción de portafolios teniendo en cuenta el grado de diversificación del mismo. Finalmente, se construye un portafolio híbrido, cuya medida de riesgo utilizada está definida en función de los mayores momentos de la distribución y de la tolerancia al riesgo de los inversionista, la cual fue planteada por Davies & de Servigny (2012). Finalmente, se describen las principales medidas de evaluación que sirvieron de base para la comparación de desempeño de los portafolios obtenidos.

1.1. Teoría Moderna de Portafolio

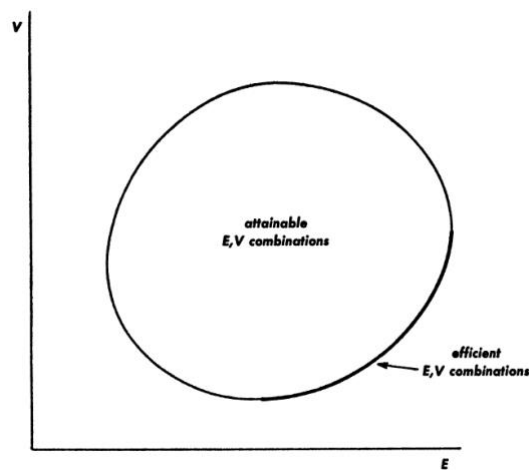
La teoría propuesta por Harry Markowitz en 1952 propone la construcción de portafolios de mínimo riesgo para un retorno dado o de máximo retorno para una varianza dada. Los insumos requeridos son el promedio de los retornos de los activos, y su matriz de varianza covarianza. El modeo de optimización planteado es (Markowitz, 1952):

$$\begin{aligned}
& \text{Max } E(r_p) = w^T r \\
& \text{s.a} \\
& \sigma_p^2 = w^T M w = k \\
& w^T \mathbf{1}_n = 1 \\
& w_i \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Donde, $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio, w^T es el vector fila de pesos de los activos, r es el vector columna de los retornos esperados de cada activo, σ_p^2 representa la varianza del portafolio, M es la matriz de varianza-covarianza entre los retornos de los activos del portafolio, y k es un valor dado del riesgo del portafolio.

El modelo de optimización planteado en (1) permite la construcción de una frontera eficiente (ver figura 1), dado que encuentra todas las posibles combinaciones de activos o portafolios que cumplen con los criterios expuestos anteriormente.

Figura 1. Frontera eficiente



Fuente: Markowitz (1952)

La frontera eficiente permite un rango en el cual el inversionista puede moverse en la selección de sus inversiones en función del riesgo que presente.

1.2. Teorías Alternativas a la Teoría Moderna de Portafolio

La Teoría Moderna de Portafolio presenta cuatro principales debilidades, a saber: i) la asignación es altamente concentrada en activos que tienen alto riesgo, ii) no involucra estimaciones u opiniones sobre los rendimientos futuros esperados, iii) los retornos no

tienen distribución normal, y iv) se espera que el comportamiento futuro sea similar al comportamiento histórico.

La concentración del portafolio en activos riesgosos ocurre porque la función objetivo está enfocada en construir un portafolio que contenga los activos que proporcionen mayor retorno, y no en construir un portafolio diversificado. La anterior debilidad ha sido estudiada por varios autores que involucraron la diversificación del portafolio de media-varianza como variable de interés Black (1992) y Koumou (2019). Entre las medidas de diversificación que se han utilizado en algunos estudios como Contreras, Rodríguez y Sosa (2017) está la entropía de Shannon (1948). Además, algunos estudios se han enfocado en realizar modelos multi objetivo que involucre momentos más altos de la distribución como sesgo y kurtosis, así como la diversificación del portafolio (Meucci (2009), Pola (2014), Contreras, Rodríguez y Sosa (2017)).

Los inversionistas algunas veces están interesados en ingresar sus propios puntos de vista, estimaciones u opiniones sobre los rendimientos futuros esperados, las cuales pueden alterar el equilibrio de la estructura de dependencia Babaei (2015) y Black (1992), y se conforman portafolios acordes con las expectativas de los inversionistas. Algunos autores han utilizado la teoría de conjuntos fuzzy propuesta por Zadeh (1965) con el fin de modelar las incertidumbre no estadísticas, en particular en portafolio, las aspiraciones de los inversionistas con respecto al rendimiento y el riesgo del portafolio (Gupta, Mehlawat, and Saxena 2008; Keskin, Kocadağlı, and Cinemre 2015; Lin and Hsieh 2004; Vercher, Bermúdez, and Segura 2007; Watada 2001; Zhang, Liu, and Xu 2014; Perez and Gomez 2016).

Las series financieras, en particular los retornos de las acciones, dentro de sus hechos estilizados presentan el que no siguen una distribución normal. Por tanto, tomar la media y la varianza de los retornos pueden no ser los mejores estimadores de tendencia central ni de riesgo para los retornos. En la literatura algunas investigaciones han planteado medidas de riesgo alternativas para calcular el portafolio de media-varianza, y han involucrado mayores momentos de la distribución de retornos como función objetivo. Una medida alternativa es la semi-varianza propuesta por Mazzoli y Marinelli (2011). Estos autores se basan en la idea de que un inversor no prefiere un portafolio con un alto

retorno para un riesgo dado, sino que prefiere una inversión con baja probabilidad de estar por debajo de un objetivo de rendimiento.

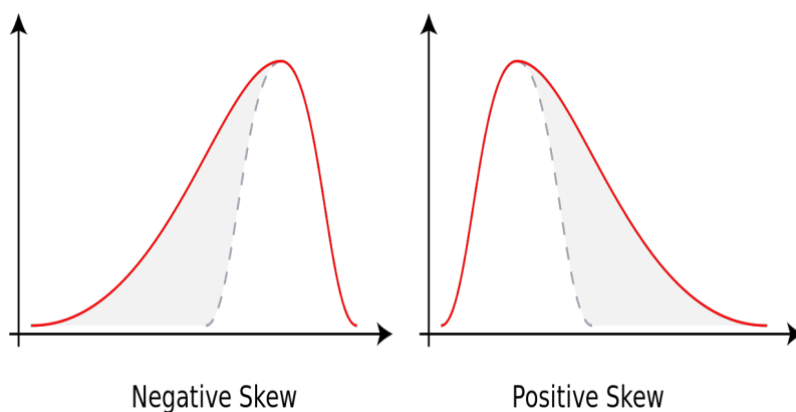
Finalmente, la teoría moderna de portafolio se basa en un ejercicio de optimización prospectivo ya que los rendimientos históricos o pasados pueden no ser muy útiles para la toma de decisiones dado que no siempre son indicativos de rendimientos futuros Kantar (2011) y Sun (2019). Como se mencionó, esta debilidad también se ha podido contrarrestar con la teoría fuzzy Zadeh (1965), debido a que es una alternativa clásica que se puede usar en casos donde existe vaguedad o inexactitud y puede ayudar a mitigar estos errores teniéndolos en cuenta a la hora de construir portafolios.

A continuación se describen algunos de los modelos de optimización que han involucrado, el sesgo, la kurtosis, la entropía, y la tolerancia al riesgo del inversionista.

- **Portafolios que involucran sesgo y kurtosis**

Involucrar el sesgo en la toma de decisiones de inversión es importante porque que es una medida de la asimetría de la distribución de los retornos de los activos. En la Figura 2 se presenta los tipos de asimetría que existen.

Figura 2. Tipos de asimetría en la distribución de una variable



Fuente: (Kim, 2013)

Un valor de sesgo positivo indica que la cola en el lado derecho de la distribución es más larga que el lado izquierdo y que la mayor parte de los valores se encuentran en la

izquierda de la media. Por el contrario, un valor de sesgo negativo indica que la cola en el lado izquierdo es mayor al derecho y la mayor parte de los valores se encuentran a la derecha de la media (Kim, 2013).

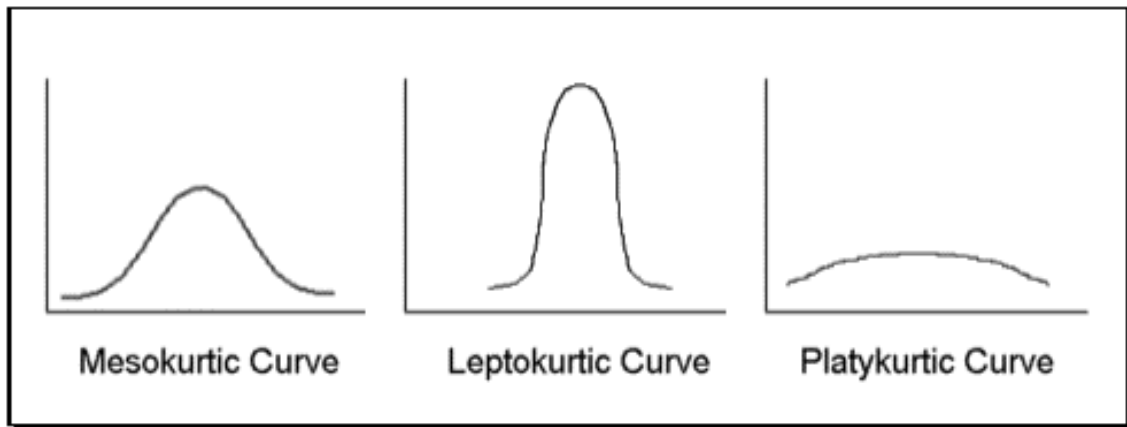
La expresión matemática, expresada en términos matriciales, utilizada en el cálculo del sesgo del portafolio es:

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_3 \cdot (\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{W}^T) \quad (2)$$

Donde, $\mathbf{W}$ denota el vector de pesos asignados a cada activo, $\mathbf{M}_3$ la matriz de co-sesgo y $\otimes$ hace referencia al producto Kronecker entre matrices.

La kurtosis es otro momento de la distribución de los retornos de las acciones, que está siendo utilizado para la conformación de portafolios de inversión. La kurtosis mide el grado de aplanamiento de la curva. Comúnmente se calcula el exceso de kurtosis, el cual se obtiene restando tres de la medida de kurtosis. En la Figura 3 se presentan los tipos de distribuciones con grados diferentes de kurtosis.

Figura 3. Tipos de picos de una distribución



Fuente:(McLendon, 2019)

Los retornos que presentan distribuciones con exceso de kurtosis positiva son denominados leptocúrticos, y los retornos que presentan distribuciones con exceso de kurtosis negativos se denominan platicúrticos (Kim, 2013).

La expresión matemática, expresada en términos matriciales, utilizada en el cálculo de la kurtosis del portafolio es:

$$K_p = W \cdot M_4 \cdot (W^T \otimes W^T \otimes W^T) \quad (3)$$

Donde **W** se refiere a los pesos asignados a cada activo, **M₄** la matriz de co-kurtosis y $\otimes$ es el producto Kronecker.

En la literatura se ha analizado la inclusión del sesgo y la kurtosis en la construcción del portafolio. Por ejemplo, Arditti (1967) fue uno de los primeros investigadores que utilizó la función de utilidad con los momentos más altos de la distribución, es decir con sesgo. Este autor se concentró en el resultado para poder analizar el aporte del sesgo en la distribución de los retornos, y pudo concluir que tener en cuenta la asimetría es una medida que realmente permite analizar de una mejor manera la distribución de estos, lo que lleva a tomar mejores decisiones al momento de construir portafolios. En el mismo sentido, Chunhachinda y Prakash (2003) demostraron que la incorporación del sesgo en la decisión del portafolio de un inversionista genera un cambio importante en portafolio óptimo final. Además estos autores plantearon un modelo de optimización multiobjetivo que se enfocó en maximizar la media, maximizar el sesgo y minimizar la varianza, con el fin de construir portafolios con mayor información a la hora de tomar decisiones de inversión. Chunhachinda y Prakash (2003) concluyen que se debe buscar un sesgo positivo, puesto que a mayor sesgo positivo disminuye la probabilidad de seleccionar activos que puedan llevar a obtener rentabilidades negativas. Chang, Christoffersen y Jacobs (2009) argumentaron que el sesgo de la prima de riesgo es estadísticamente significativo y no puede explicarse por otros factores de riesgo comunes, tales como el exceso de retorno del mercado o el tamaño de este, el valor en libros, los factores de volatilidad del mercado o por características de la firma. Estos autores también encontraron que las acciones con una alta exposición a las innovaciones en el sesgo implícito del mercado exhiben retornos por debajo del promedio, mientras que los activos con una alta exposición a las innovaciones en la kurtosis implícita del mercado muestran retornos mas altos que el promedio.

En la última década se destacan trabajos como los de Conrad, Dittmar y Ghysels (2013) y de Chiang, (2016). Conrad, Dittmar y Ghysels (2013) utilizaron como medida los

precios de acciones individuales para estimar los momentos más altos de la distribución de los retornos. Estos investigadores encontraron que la volatilidad, la asimetría y la kurtosis neutrales al riesgo de los valores individuales están fuertemente relacionadas con los retornos futuros. Chiang, (2016) trata los retornos como una función de su media, varianza, sesgo y kurtosis, y concluye que el sesgo positivo indica la presencia de ganancias descomunales, demostrando que ciertos activos del portafolio ofrezcan retornos muy altos. Por el contrario, otras medidas de dispersión y la volatilidad, algo indeseable que aumenta la incertidumbre de los retornos.

En resumen, a los inversionistas le preocupa tener un sesgo negativo, una kurtosis positiva y un bajo nivel de riesgo que aumente la incertidumbre de sus retornos esperados.

- **Portafolios que involucran la tolerancia al riesgo del inversionista**

Davies y Servigny (2012) proponen una medida de riesgo que involucra la varianza de los retornos, el sesgo, el exceso de kurtosis de los retornos, y a nivel del inversionista, su tolerancia al riesgo. La siguiente expresión matemática representa la varianza conductual denotado por σ_B^2 :

$$\sigma_B^2 \approx \sigma^2 \left(1 - \frac{2\sigma}{3T} skew + \frac{\sigma^2}{3T^2} kurtosis \right) \quad (4)$$

Donde σ^2 se refiera a la varianza de los retornos, skew es el sesgo o coeficiente de asimetría de los retornos, kurtosis es el exceso de kurtosis de los retornos y T es la tolerancia al riesgo del inversionista. Es importante aclarar que, de acuerdo a Davies y Servigny (2012), T toma valores de 0,5, 1 y 1,5 para representar la tolerancia al riesgo de inversionistas aversos, neutrales y riesgosos, respectivamente.

En (4) se puede analizar que si se tiene una acción cuyos retornos tienen sesgo positivo, la varianza conductual varía en función de la tolerancia al riesgo con relación directamente proporcional. Es decir, que inversionistas aversos al riesgo deben buscar sesgo positivo en los retornos de los activos. Por otro lado, a mayor exceso de kurtosis, generará mayor varianza conductual para aquellos inversionistas aversos que para los inversionistas riesgosos. Por el contrario cuando el activo presenta retornos con menor exceso de kurtosis, la varianza conductual será mayor para el inversionista riesgoso que para el averso. Finalmente, se observa que cuando los retornos de los activos siguen una

distribución normal estándar, la varianza conductual coincide con la varianza ya que tanto el exceso de kurtosis como el sesgo son cero.

La varianza conductual planteada por Davies y de Servergny (2012) aporta en la la toma de decisiones para la creación de portafolios específicos porque incluye el perfil de riesgo del inversionista.

- **Portafolios que involucran medidas de diversificación**

La diversificación puede ser definida como una estrategia de gestión de riesgo que combina una amplia variedad de inversiones en activos dentro de un portafolio, un portafolio diversificado contiene una combinación de distintos tipos de activos financieros y permite reducir el riesgo no sistemático en el problema de selección de portafolios (Pola, 2014). Algunos autores han involucrado la diversificación en la conformación de portafolios como función objetivo del problema de optimización (Contreras, Rodríguez & Sosa, 2017). En particular, la medición ha variado con el tiempo y se han propuesto diversas teorías que han permitido acercarse un poco a la necesidad de diversificación para la construcción portafolios. Pola y Zerrad (2014) plantean que ninguna de las medidas son perfectas y por lo tanto no hay consenso sobre una medida a utilizar acertada. El grado de diversificación de un portafolio se deriva de la información teórica, que está interesada en la cuantificación del trastorno de una variable aleatoria. La medida más destacada para la diversificación de portafolios es la entropía de Shanon. (Bera y Park, 2008; Meucci, 2009).

Shannon (1948), propone una alternativa que cumple un papel fundamental dentro de la teoría de información, debido a que se puede usar como medida de elección e incertidumbre. El autor propone el uso de la forma estudiada a continuación. Esta se reconocerá como entropía y se define en algunas formulaciones de mecánica estadística como la incertidumbre existente ante la presencia de muchas fuentes de información. La fórmula que nos permite encontrar la entropía es:

$$N_{ENT} = \exp(-\sum_{i=1}^n W_i \ln W_i) \quad (5)$$

Donde W_i es la probabilidad de que un sistema se encuentre en la celda i de su espacio fase.

Además, de acuerdo con Pola (2014), las propiedades que presenta la entropía son: i) es máxima si el $H_{ENT} = n$ corresponde a un Sistema estocástico y muy diversificado, ii) es mínima si el $H_{ENT} = 1$ corresponde a un Sistema determinístico y muy poco diversificado, iii) es igual a un valor específico si el $H_{ENT} = m$ y m es un número menor que n donde muy probablemente $m < n$.

1.3. Evaluación de Desempeño del Portafolio

En la literatura se han propuesto medidas que permiten evaluar y comparar el desempeño de los portafolios, entre las cuales se destacan: i) La razón de Treynor propuesta por Treynor (1965), ii) Alfa de Jensen propuesta por Jensen (1968) y iii) el alfa de Jensen modificado propuesta por Smith y Tito (1969), las cuales se explican a continuación.

- **Razón de Treynor**

La razón de Treynor, fue propuesta por Treynor (1965), busca diseñar un portafolio que logre un balance entre riesgo y rendimiento de los retornos del portafolio. Este indicador proporciona la diferencia que existe entre lo que puede rentar el portafolio, sobre el activo libre de riesgo, tomando el riesgo como beta. Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$T_R = \frac{(R_P - R_f)}{\beta_P} \quad (6)$$

Donde R_P es la rentabilidad del portafolio, R_f representa la tasa libre de riesgo que se considera constante, y el β_P es el beta del portafolio y representa el riesgo sistemático del mismo. En general, R_f se estima tomando como referencia para la evaluación de los portafolios los bonos del estado del país donde se transen las acciones que conforman el portafolio.

La razón de Treynor permite construir la línea Security Market Line (SML por sus siglas en inglés), la cual representa la relación lineal entre el rendimiento esperado menos el riesgo sistemático medido por un beta.

- **Alfa de Jensen**

El indicador presentado por Jensen (1968) mide la habilidad de un gestor de portafolios de inversión para obtener rentabilidad por encima del índice bursátil que determina la rentabilidad del mercado. Es decir, busca comparar la diferencia que se obtiene por un

portafolio frente un punto de referencia con la misma cantidad de riesgo. Es medido por la siguiente fórmula:

$$\alpha = (R_p - R_f) - (R_M - R_f)\beta_p \quad (7)$$

Donde R_p es la rentabilidad del portafolio, R_f representa la tasa libre de riesgo y se considera constante durante un periodo específico, β_p es el beta del portafolio y R_M es la rentabilidad del mercado.

Por otro lado, este indicador nos muestra el rendimiento adicional generado por el portafolio y el comportamiento anormal de la cartera. Otro aspecto importante es la posibilidad de comparar dos portafolios con el mismo nivel de riesgo sin tener en cuenta la diversificación de los mismos.

- **Alfa modificado**

Smith y Tito (1969) proponen una modificación al modelo de Jenses (1968), donde se permite la comparación de portafolios con diferentes riesgos sistemáticos. El indicador es medido por la siguiente fórmula:

$$\alpha_{MOD} = \frac{\alpha_p}{\beta_p} \quad (8)$$

Donde α_p es el alfa del portafolio y β_p el beta del portafolio

2. Metodología

Esta sección contiene dos partes. La primera describe los datos y las fuentes utilizadas, y la segunda los criterios utilizados en la conformación de portafolios.

2.1. Datos y fuentes

Para el desarrollo de la presente investigación fue necesario extraer la información de la plataforma Investing como fuente secundaria de información. En ella se consultaron los precios diarios de las acciones de índice colombiano COLCAP en una ventana de cinco años, iniciando el 1 de enero de 2015 y finalizando el 30 de diciembre de 2019. COLCAP es un índice de capitalización que refleja las variaciones de los precios de las acciones mas liquidad de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), donde la participación de cada

acción en el índice está determinada por el correspondiente valor de capitalización bursátil ajustada (flotante de la compañía multiplicado por el último precio). Por esta razón se escogió realizar el estudio con las acciones pertenecientes a este índice como una fiel representación del mercado colombiano.

En la tabla 1 se presentan las 19 acciones que conforman el COLCAP y la capitalización de mercado que presentaron al cierre de 30 de diciembre de 2019. Vale la pena aclarar que no se tuvieron en cuenta cuatro acciones¹, porque estas no tuvieron participación constante en el mercado durante los cinco años.

Tabla 1. Acciones que componen el COLCAP con la capitalización bursátil a 2019

NOMBRE DE LA ACCION	CAPITALIZACION BURSATIL
ECOPETROL	\$ 82,233,389.38
PREFERENCIAL BANCOLOMBIA	\$ 25,456,020.41
INTERCONEXION ELECTRICA S.A. E.S.P.	\$ 24,944,906.18
GRUPO INVERSIONES SURAMERICANA	\$ 23,023,998.61
BANCOLOMBIA S.A	\$ 20,712,688.95
GRUPO ENERGIA BOGOTA S.A. E.S.P.	\$ 12,112,164.56
GRUPO NUTRESA S.A	\$ 9,897,255.60
GRUPO AVAL ACCIONES Y VALORES S.A.	\$ 9,345,094.06
GRUPO ARGOS S.A.	\$ 8,434,359.25
BANCO DAVIVIENDA S.A	\$ 6,697,867.96
BANCO DE BOGOTA S.A.	\$ 6,362,517.31
CEMEX LATAM HOLDING	\$ 4,923,647.49
SURA PREFERENCIAL	\$ 4,654,380.61
CORPORACIÓN FINANCIERA COLOMBIANA S.A.	\$ 4,462,720.20
ARGOS PREFERENCIAL	\$ 2,948,222.11
CELSIA S.A. E.S.P.	\$ 1,861,477.98
PROMIGAS S.A.E.S.P.	\$ 1,447,767.55
CANACOL ENERGY LTD	\$ 648,704.39
AVIANA HOLDINGS S.A	\$ 47,671.11

Fuente: Elaboración propia

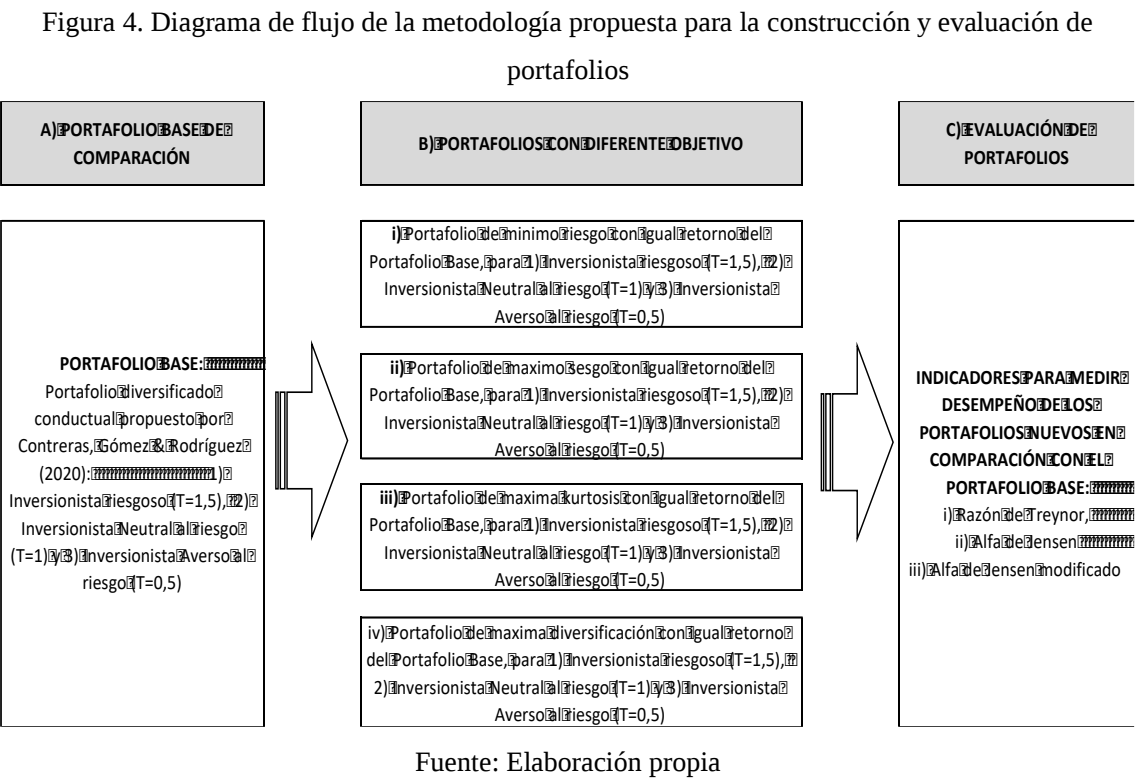
Se observa que en 2019 la mayor capitalización la presenta Ecopetrol. Con una gran diferencia le sigue las acciones de Bancolombia preferencial, Interconexión eléctrica S.A,

¹ Mineros S.A, Bolsa de valores de Colombia, Almacenes Éxito y CEMEX LATAM holdings.

Grupo de Inversiones Suramericana y Bancolombia S.A. Posterior a esto, se logra ver un declive exponencial llegando al último lugar de capitalización Avianca Holdings.

2.2. Conformación de Portafolios

En la figura 4, se presenta un diagrama donde se describen los criterios utilizados para la construcción de las diferentes fronteras eficientes, y los métodos de evaluación de desempeño que permitieron realizar la comparación de los portafolios construidos.



con la entropía de Shanon (1954), e involucran en el modelo, incertidumbre sobre las preferencias que presenta cada tipo de inversionista sobre la varianza del portafolio, el retorno y su grado de diversificación, para lo cual utilizan la metodología de Fuzzy Set. Estos autores concluyen que su modelo es óptimo y se desempeña mejor que el de Markowitz (1952). El modelo de optimización planteado por Contreras, Gómez & Rodríguez (2020) presenta la siguiente formulación matemática.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \lambda \\
& \text{s.a} \\
& E(r_p) + (E_L - E_U) * \lambda \geq E_L \\
& N_{Ent}(w_i) + (N_L - N_U) * \lambda \geq N_L \\
& V(r_p)_B + (V_{BU} - V_{BL}) * \lambda \leq V_{BU} \\
& \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\
& w_i, \mu_E(E(r_p)), \mu_V(V(r_p)_B), \mu_N(N_{Ent}(w_i)) \geq 0 \\
& \lambda = \mu_E(E(r_p)) = \mu_V(V(r_p)_B) = \mu_N(N_{Ent}(w_i))
\end{aligned} \tag{9}$$

Donde $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio, el cual es definido como $E(r_p) = w^T r$, donde w^T es el vector fila de las participaciones de los activos que conforman el portafolio y r representa el vector de retornos promedio de cada acción. Además, la entropía de Shanon (1984), N_{ENT} , es calculada basada en los pesos como $N_{ENT} = \exp(-\sum_{i=1}^n W_i \ln W_i)$. Finalmente, la varianza del portafolio es calculada como $V(r_p)_B = \sigma_p^2 = w^T M_B w$. En este modelo λ se refiere a la utilidad Fuzzy del retorno del portafolio, la varianza y la entropía. Para estos objetivos Fuzzy, se definen niveles de necesidad y de suficiencia, denotados por un subíndice L y U, respectivamente. De esta forma, E_L corresponde al retorno mínimo esperado, E_U representa el retorno máximo esperado, N_L es la diversificación mínima del portafolio, N_U se refiere a la diversificación máxima, V_{BU} es la varianza conductual mínima esperada, y V_{BL} varianza conductual máxima esperada. Los niveles de necesidad son definidos por los investigadores para cada tipo de inversionista.

Los tres niveles de tolerancia al riesgo que fueron utilizados son $T=1,5$ para representar al inversionista riesgoso o con tolerancia al riesgo alta, $T=1$ para el inversionista neutral

o con tolerancia al riesgo moderada, y $T=0,5$ para el inversionista averso al riesgo o con baja tolerancia al riesgo.

B) Portafolios con diferente objetivo

Se construyeron cuatro portafolios diferentes, para cada tipo de inversionista, o nivel de tolerancia al riesgo, a saber: i) portafolio de mínimo riesgo con igual retorno de portafolio base, ii) portafolio de máximo sesgo con igual retorno de portafolio base, iii) portafolio de máxima kurtosis con igual retorno de portafolio base, iv) portafolio de máxima diversificación con con igual retorno de portafolio base, los cuales se explican a continuación.

i) Portafolio de mínimo riesgo con igual retorno de portafolio base

Para cada nivel de tolerancia al riesgo, se determinó el portafolio de mínimo riesgo que cumpliera con el mismo retorno que presentaba el portafolio diversificado conductual, por lo que la formulación matemática del modelo de optimización fue:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \sigma_B^2 &= W^T M W \\
 \text{S.a} \\
 E(r_p) &= w^T r = Z_t \\
 w^T 1_n &= 1 \\
 w_i &\geq 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Donde, σ_B^2 se refiere a la varianza (riesgo) del portafolio, W^T es el vector fila de pesos de los activos, M representa la matriz de varianza-covarianza entre los retornos de los activos del portafolio, $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio y Z_t corresponde al retorno de del portafolio diversificado conductual para cada nivel de tolerancia al riesgo t .

ii) Portafolio máximo sesgo con igual retorno de portafolio base

Para cada nivel de tolerancia al riesgo, se conformó un portafolio cuya función objetivo estaba enfocada en maximizar el sesgo, el cual se encuentra definido en (2) manteniendo el mismo retorno que presentaba el portafolio diversificado conductual. La formulación del modelo de optimización propuesta es:

$$Max S_p = W \cdot M_3 \cdot (W^T \otimes W^T)$$

s.a

$$E(r_p) = w^T r = Z_t \quad (11)$$

$$w^T 1_n = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde, W^T es el vector fila de pesos de los activos, W denota el vector de pesos asignados a cada activo, M_3 es la matriz de co-sesgo, $\otimes$ hace referencia al producto Kronecker entre matrices, $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio y Z_t corresponde al retorno de del portafolio diversificado conductual para cada nivel de tolerancia al riesgo t .

iii) Portafolio máxima kurtosis con igual retorno de portafolio base

Para cada tipo de inversionista, se construyó el portafolio de máxima kurtosis, la cual se encuentra definida en (3), manteniendo el mismo retorno obtenido en el portafolio diversificado conductual. La formulación matemática que se planteó fue:

$$Max K_p = W \cdot M_4 \cdot (W^T \otimes W^T \otimes W^T)$$

s.a

$$E(r_p) = w^T r = Z_t \quad (12)$$

$$w^T 1_n = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde, W denota el vector de pesos asignados a cada activo, W^T es el vector fila de pesos de los activos, M_4 hace referencia la matriz de co-kurtosis, $\otimes$ denota el producto Kronecker entre matrices, $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio y Z_t corresponde al retorno de del portafolio diversificado conductual para cada nivel de tolerancia al riesgo t .

iv) Portafolio de máxima diversificación con igual retorno de portafolio base

Para cada tipo de inversionista se construyó el portafolio de máxima diversificación, la cual se calculó siguiendo (5), y se mantuvo el mismo retorno obtenido en el portafolio diversificado conductual. El modelo de optimización planteado fue:

$$MaxN_{ENT} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n W_i \ln W_i\right)$$

s.a

$$E(r_p) = w^T r = Z_t \tag{13}$$

$$w^T 1_n = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde, W^T es el vector fila de pesos de los activos con cada componente denotado por W_i , $E(r_p)$ es el retorno esperado del portafolio y Z_t corresponde al retorno de del portafolio diversificado conductual para cada nivel de tolerancia al riesgo t..

2.3. Evaluación de Portafolios

Para evaluar los 12 portafolios propuestos con los tres portafolios obtenidos y compararlos con los obtenidos en el escenario base, se utilizaron tres medidas de desempeño diferentes; i) La razón de Treynor, ii) Alfa de Jensen, y iii) Alfa de Jensen modificado. Las cuales se explican a continuación. A continuación se especifican los parámetros utilizados en cada caso.

i) La razón de Treynor

La razón de Treynor se encuentra definida en (6), para la cual el exceso de retorno del portafolio se comparó con la tasa libre de riesgo R_f , medida por los bonos soberanos de Colombia a cinco años, y esta medida se relativizó respecto al riesgo sistemático del portafolio, β_p , el cual se calculó como la relación entre el retorno del mercado y el retorno del portafolio.

ii) Alfa de Jensen

El alfa de Jensen esta definido en la ecuación (7), en el que se busca medir que tan encima están los retornos del portafolio de las rentabilidades ofrecidas por el índice bursátil de referencia (R_m), y para este trabajo se utilizó el COLCAP como índice. De igual manera, se calculó la relación entre la covarianza del retorno del mercado y el retorno del portafolio y la varianza del retorno mercado, denominada riesgo sistemático del portafolio, y denotada por β_p .

iii) Alfa de Jensen modificado

El alfa de Jensen modificado se encuentra definido en la ecuación (8), donde se mide que los retornos que proporciona el portafolio sean mayores a la rentabilidad ofrecida por el mercado (R_m) sin necesidad de que tengan todos presente riesgo sistemático. Para calcularlo se tuvo en cuenta el índice originario de Jensen calculado en la ecuación (7) y el parámetro representativo del riesgo sistemático del portafolio β_p , que se estimó calculando la covarianza del retorno del mercado y el retorno del portafolio sobre la varianza del retorno del portafolio

3. Resultados

Esta sección está compuesta por tres apartados. El primero describe las estadísticas básicas de las acciones utilizadas para la toma de decisiones de inversión con los diferentes objetivo planteados. El segundo apartado se centra en presentar los resultados derivados de la construcción de los portafolios, tanto el base como los planteamientos hechos con nuevas funciones objetivo. Finalmente, el último apartado presenta la evaluación de los portafolios con nuevas funciones objetivo, en comparación con los obtenidos con el escenario base.

3.1. Estadísticas Descriptivas

La tabla 2 presenta las estadísticas descriptivas de los retornos históricos de las 19 acciones del COLCAP que se seleccionaron para la construcción de portafolios, para el periodo 2015-2019

Tabla 2. Estadísticas descriptivas de las acciones del COLCAP

	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
Eco	0.0189%	0.9082%	-4.5363%	4.4608%
BCL	0.0170%	0.6217%	-3.1104%	3.1476%
ISA	0.0294%	0.6817%	-4.2633%	4.5525%
SURA	-0.0055%	0.5404%	-2.7193%	2.4632%
BIC	0.0166%	0.6749%	-3.1201%	3.1408%
GEB	0.0111%	0.4586%	-3.1530%	3.0046%
NCH	-0.0035%	0.4514%	-2.1654%	1.8571%
AVAL	0.0051%	0.5492%	-2.7773%	3.5392%
ARG	-0.0038%	0.6635%	-2.9052%	3.9235%
DAVI	0.0189%	0.5841%	-4.0878%	2.1649%
BDBOG	0.0090%	0.5648%	-3.8440%	2.9911%
CCB	-0.0205%	0.7076%	-4.5684%	3.8333%
SURA_PF	-0.0097%	0.5939%	-3.3693%	2.5359%
CFV	-0.0052%	0.6070%	-6.8935%	2.9653%
ARG_PF	-0.0147%	0.6878%	-3.4123%	2.8724%
CEL	-0.0092%	0.6414%	-3.7789%	4.1393%
AVCH	-0.0229%	1.1569%	-4.5427%	12.2315%
IMI	-0.0261%	0.7740%	-5.1918%	5.9187%
PMG	0.0140%	0.6601%	-4.5674%	6.0017%

Fuente: Elaboración propia

A continuación se describen las estadísticas básicas de los retornos promedio de las acciones de la Bolsa de Valores de Colombia que componen el COLCAP. Se observa que en los últimos cinco años el retorno promedio ha sido negativo para 10 acciones, a saber: Grupo Inversiones Suramericana, Grupo Argos S.A, Grupo Nutresa S.A., CEMEX Latam Holding, Sura Preferencial, Argos Preferencial, Corporación Financiera Colombiana S.A., Celsia S.A., Avianca Holdings SA. Y Promigas S.A. Estos valores de retorno negativo están relacionados con valores de varianza, es decir que han sido considerados activos mas riesgosos debido a que los retornos históricos que ofrecen las acciones decrecieron mas de lo que aumentaron. Por otro lado, la mayor desviación estándar la presenta Avianca Holdings S.A y la menor pertenece al Grupo Nutresa S.A. Finalmente, se resalta que que la media de los retornos más alta la presenta Interconexión eléctrica S.A., mientras la empresa con el menor retorno es Canacol Energy LTD.

En conclusión, el comportamiento de los retornos promedio de las acciones puede ser inestable e incluso riesgoso, lo cual puede ser explicado por varias razones. De acuerdo con Ruiz (2017), el COLCAP presenta dos debilidades. La primera es que al pertenecer a un país como Colombia tiene situaciones macroeconómicas con mayor inestabilidad (recesiones económicas, devaluación del peso, alzas de inflación inesperada, decrecimiento del PIB) que afectan directamente la rentabilidad de las acciones. La segunda se centra en que el COLCAP es un índice bursátil que compone compañías de diferentes sectores empresariales que tienen problemáticas internas (Bajas rentabilidades, sindicatos, deuda) mayores en comparación con otros países.

3.2. Construcción de Portafolios

En la Tabla 3 se presentan los resultados de la conformación de los 12 portafolios analizados, tres para cada nivel de tolerancia al riesgo del inversionista, donde para cada portafolio se presenta el riesgo (desviación estándar conductual), el retorno esperado, el coeficiente de asimetría (sesgo), la kurtosis y la entropía.

Tabla 3. Estadísticas Descriptivas de los portafolios contruidos

Tolerancia al riesgo	Portafolio	Desviación estándar conductual	Retorno esperado	Sesgo	Kurtosis	Entropía
T= 0.05	Diversificado conductual	0.0013%	0.0110%	-0.00003	0.00780	9.8
	Máximo Sesgo	0.0015%	0.0110%	0.00350	0.00045	8.9
	Máxima Kurtosis	0.0024%	0.0110%	0.00065	0.86992	3.7
	Mínimo Riesgo	0.0013%	0.0110%	-0.00269	0.00002	6.3
	Máxima Entropía	0.0021%	0.0110%	-0.00006	0.00003	15.4
T= 1	Diversificado conductual	0.0018%	0.0149%	-0.00024	0.00037	6.6
	Máximo Sesgo	0.0019%	0.0149%	0.03197	0.00232	2.5
	Máxima Kurtosis	0.0024%	0.0149%	0.00302	0.95274	4.4
	Mínimo Riesgo	0.0016%	0.0149%	-0.00088	0.00000	5.6
	Máxima Entropía	0.0023%	0.0149%	-0.00003	0.00001	12.3
T= 1.50	Diversificado conductual	0.0024%	0.0181%	-0.00461	0.00465	5.5
	Máximo Sesgo	0.0023%	0.0181%	0.05235	0.00034	1.9
	Máxima Kurtosis	0.0026%	0.0181%	0.00569	1.27077	4.4
	Mínimo Riesgo	0.0020%	0.0181%	0.00109	0.00002	5.5
	Máxima Entropía	0.0023%	0.0181%	0.00004	0.00242	14.2

Fuente: Elaboración propia

Se observa que para cada nivel de tolerancia al riesgo, los retornos esperados son iguales al portafolio diversificado conductual que es la base para el análisis de estos resultados, dado que esa fue la restricción preliminar que se colocó. Claramente, a mayor tolerancia al riesgo por parte del inversionista mayor será su retorno esperado.

Al analizar los portafolios obtenidos para un nivel de tolerancia al riesgo de $T=0,5$, teniendo en cuenta el portafolio base, podemos observar que la menor desviación estándar conductual es proporcionada por el portafolio de mínimo riesgo, como era de esperarse, seguidos en su orden por el portafolio base, los de máximo sesgo y máxima entropía, y finalmente, es el portafolio de máxima kurtosis el que presenta el mayor riesgo conductual. En cuanto a la entropía del portafolio el más diversificado es el portafolio de máxima entropía y el menos diversificado es el de máxima kurtosis, es decir el de mayor riesgo. Por tanto, el portafolio de máxima entropía logra un balance entre riesgo-diversificación cumpliendo con el mismo retorno esperado para el portafolio. En los resultados obtenidos para los niveles de tolerancia al riesgo de $T=1$ y $T=1,5$ se observa que prevalece el orden de los portafolios, obtenido para el inversionista con menor tolerancia al riesgo, sin embargo, en el caso de un inversionista neutral ($T=1$), el portafolio de máximo sesgo es el menos diversificado, y para el inversionista con perfil riesgoso ($T=1,5$), la menor diversificación la tiene el portafolio de máximo sesgo. Además, como era de esperarse y sin importar el nivel de tolerancia al riesgo del inversionista, se observa que los portafolios de máximo sesgo y máxima kurtosis tienen niveles más altos en sesgo y kurtosis que el resto de portafolios, pero los valores de estas medidas aumentan cuando aumenta el nivel de tolerancia al riesgo del inversionista.

En la Tabla 4 se presenta la composición de los pesos de los activos para cada uno de los portafolios construidos.

Tabla 4. Distribución de pesos para cada uno de los portafolios construidos

T=0.05	Eco	BCL	ISA	SURA	BIC	GEB	NCH	AVAL	ARG	DAVI	BDBOG	CCB	SUR_PF	CFV	ARG_PF	CEL	AVCH	IMI	PMG
Maximo Sesgo	6.7%	5.4%	6.8%	0.0%	1.3%	18.4%	16.2%	5.9%	0.0%	8.0%	16.3%	0.0%	0.0%	1.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	13.5%
Maxima Kurtosis	0.0%	32.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	16.1%	0.0%	0.0%	36.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Minimo Riesgo	0.0%	9.8%	7.3%	0.0%	0.0%	32.7%	17.3%	1.4%	0.0%	6.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	10.7%
Maxima Diversificación	9.3%	8.5%	14.9%	3.1%	8.4%	6.6%	3.4%	5.0%	3.4%	9.3%	6.0%	1.6%	2.6%	3.2%	2.1%	2.6%	1.4%	1.2%	7.5%
T= 1																			
Maximo Sesgo	0.0%	3.9%	15.6%	0.0%	1.0%	71.8%	0.0%	0.0%	0.0%	7.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Maxima Kurtosis	0.0%	29.2%	14.6%	0.0%	0.0%	0.0%	11.1%	0.0%	0.0%	34.5%	0.0%	0.0%	0.0%	10.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Minimo Riesgo	0.0%	11.6%	12.7%	0.0%	0.0%	34.8%	1.1%	0.0%	0.0%	11.2%	16.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.1%
Maxima Diversificación	10.7%	9.4%	22.0%	2.0%	9.1%	6.3%	2.3%	4.2%	2.2%	10.7%	5.4%	0.7%	1.5%	2.1%	1.1%	1.6%	0.6%	0.5%	7.7%
T= 1.5																			
Maximo Sesgo	0.0%	0.0%	38.3%	0.0%	0.0%	61.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Maxima Kurtosis	0.0%	22.6%	33.9%	0.0%	0.0%	0.0%	8.6%	0.0%	0.0%	26.8%	0.0%	0.0%	0.0%	8.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Minimo Riesgo	0.2%	0.2%	27.2%	0.0%	5.8%	23.4%	0.0%	0.0%	0.0%	19.9%	10.5%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	12.9%
Maxima Diversificación	0.5%	0.4%	37.7%	0.0%	0.4%	59.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.8%	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%

Se observa que para el inversionista con un perfil al riesgo averso, $T=0,5$, los activos con mayor peso en los portafolios son Bancolombia Preferencial, Interconexión Eléctrica S.A., Grupo de Energía Bogotá S.A., Grupo Nutresa S.A, Banco Davivienda S.A. y Corporación Financiera Colombiana S.A. Es importante tener en cuenta que los portafolios para este nivel de tolerancia se encuentran diversificados de manera diferente cada uno, siendo el portafolio de máxima diversificación el que tiene en cuenta todos los activos financieros para la conformación de éste, y el de máxima kurtosis con el nivel más bajo de diversificación invirtiendo en solo cuatro activos, esto es debido a que solo tiene en cuenta los activos con un mayor nivel de kurtosis positiva.

En el caso del inversionista con perfil neutral al riesgo, $T=1$, las acciones con mayor porcentaje de participación en los portafolios son Bancolombia Preferencial, Interconexión Eléctrica S.A, Grupo de Energía Bogotá S.A. y Banco Davivienda S.A. Para este nivel de tolerancia al riesgo, el portafolio que tiene en cuenta a todos los activos financieros para la conformación del mismo es el de máxima diversificación y en este caso quien tiene la conformación de solo cuatro activos financieros es el de máximo sesgo. Esto se debe a que solo esos activos tienen las características que busca tener el portafolio, es decir estos activos presentan un sesgo positivo por encima del promedio.

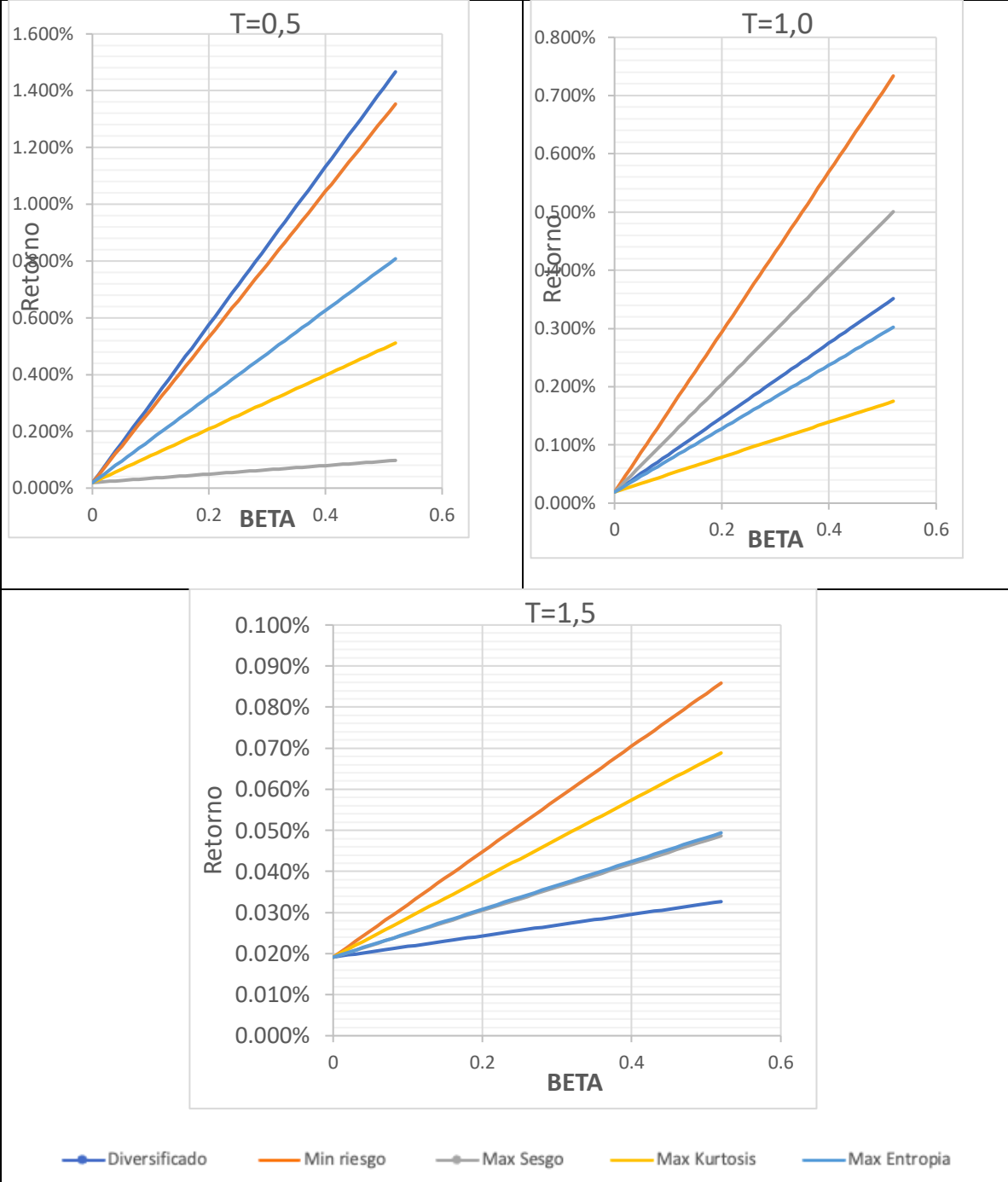
Finalmente, para el inversionista con perfil riesgoso, $T=1,5$, los activos que mayor participación tienen son Interconexión Eléctrica S.A, Grupo de Energía Bogotá S.A y Banco Davivienda S.A. En este nivel de tolerancia al riesgo, los portafolios construidos presentan la mínima diversificación en comparación con los portafolios pares obtenidos en los otros niveles de tolerancia al riesgo, en particular la mínima diversificación es presentada por el portafolio de máximo sesgo, portafolio que presentó un comportamiento decreciente en la diversificación en función de la tolerancia al riesgo del inversionista.

3.3. Comparación de portafolios

Utilizando las medidas de evaluación de los portafolios descritas en la sección 2.2, se obtiene la comparación de los portafolios construidos con las nuevas funciones objetivo con el portafolio base conductual diversificado. Esta comparación se hace teniendo en cuenta la tolerancia al riesgo del inversionista, esto quiere decir que se agrupan los tres portafolios construidos para cada $T=0,5$, $T=1$ y $T=1,5$.

En la figura 5 se presenta la comparación de los portafolios, cada portafolio es comparado con la construcción de la línea de seguridad de mercado (SML) que tiene en cuenta el riesgo sistemático, el riesgo del mercado y la medida de evaluación de desempeño utilizada, para diferentes medidas de riesgo.

Figura 5. Comparación de portafolios contruidos con el portafolio base para cada nivel de tolerancia al riesgo



Se puede observar que para el inversionista con perfil averso al riesgo, $T= 0,5$, el portafolio que tiene mayor desempeño es el portafolio diversificado conductual, pues aquí solo se tienen en cuenta los activos con las características buscadas por el nivel de tolerancia al riesgo del inversionista y que se encuentre diversificado. Este portafolio es seguido en términos de desempeño por el portafolio de mínimo riesgo, el cual se encarga de seleccionar activos que tengan compartimientos similares con una desviación estándar baja en los retornos. En términos de desempeño, el portafolio de máxima diversificación sigue a los dos anteriores, y los últimos son los portafolios de máxima kurtosis y de máximo sesgo. Este ordenamiento puede ser explicado por las condiciones que ofrecen los activos en kurtosis, sesgo y retorno promedio. los activos del COLCAP y los criterios que utilizan cada portafolio para seleccionar dichos activos, logrando que se puedan seleccionar muy pocos activos con la calidad que requiere el portafolio para lograr su objetivo.

Por otro lado, en cuanto al desempeño de los portafolios obtenidos para un perfil de inversionista neutral, $T=1$, se puede observar que el portafolio de mínimo riesgo es quien obtiene mejores desempeños en comparación con los otros portafolios, debido a que minimiza el riesgo de invertir en ese grupo de activos, a pesar de que tiene un coeficiente de asimetría negativo y un nivel de kurtosis muy bajo debido a que su portafolio está conformado por los activos que cuentan con retornos más altos y con bajos niveles de estas dos medidas estadísticas. El portafolio de máximo sesgo es el segundo portafolio que tiene mejor desempeño, esto debido a que agrupa los activos financieros con mayores niveles de asimetría y permite cumplir la regla propuesta por Chunnachinda y Prakash (2003) donde asegura que el inversionista puede lograr mayor éxito si involucra el sesgo en la toma de decisiones. Por debajo de portafolio conductual diversificado que es el portafolio de referencia, se encuentran los portafolios de máxima entropía y máxima kurtosis, esto se puede explicar porque los activos financieros del índice del COLCAP no tienen altos niveles de kurtosis el promedio de la kurtosis para los activos es de 1,9 que significa una kurtosis platicúrtica permitiendo correr un riesgo mayor, además buscando maximizar la diversificación pueden generar mas riesgo debido a la inestabilidad de la gran mayoría de los retornos ofrecidos por los activos.

Finalmente, al evaluar los portafolios obtenidos para un inversionista con perfil riesgoso, $T= 1,5$, se observa nuevamente que el portafolio de mínimo riesgo es el de mejor

desempeño, como en el caso del inversionista neutral al riesgo. Además, se encuentra que el portafolio de máxima kurtosis es el segundo con mayor desempeño, esto se le puede atribuir a que la conformación de los activos financieros se basaron en los que tenían una kurtosis muy por encima del promedio de los otros activos. Algo muy particular es que los portafolios de máximo sesgo y máxima entropía tienen un desempeño similar en la evaluación de éstos, esto es porque están conformados por activos financieros similares en el riesgo que presentan. Finalmente, encontramos el portafolio conductual diversificado que es el portafolio base, el cual es el que mayor riesgo presenta.

4. Conclusiones

En este trabajo se construyó un portafolio base que fue el portafolio diversificado conductual propuesto por Contreras, Gómez y Rodríguez (2020) que involucra diferentes momentos más altos de la distribución de los retornos, el cual se utilizó para la comparación de los 12 nuevos portafolios que involucran de forma individual momentos más altos de la distribución de los retornos, para cada nivel de tolerancia de riesgo del inversionista. La mayor contribución fue incluir diferentes momentos de los retornos y la tolerancia al riesgo del inversionista en un mismo portafolio aplicado en el contexto colombiano.

En nuestros resultados, cuando se construyen los portafolios de máximo sesgo y máxima kurtosis, la distribución de los activos se concentran en los que mayor coeficiente de asimetría tienen y los de mayor nivel de kurtosis positiva, aunque es diferencial dependiendo de la tolerancia al riesgo del inversionista.

Además, se logró identificar que para un inversionista averso ($T=0.05$) el portafolio óptimo es el portafolio diversificado conductual y el de menor desempeño es el de máximo sesgo, para el inversionista neutro al riesgo ($T=1$) el portafolio con mayor rendimiento es de mínimo riesgo y por el contrario el de menor desempeño es el portafolio de máxima kurtosis. Por último, para el inversionista más tolerante al riesgo ($T=1.5$) el portafolio que logra mayor rendimiento también es el de mínimo riesgo y el de menor rendimiento es el diversificado conductual.

Uno de los hallazgos importantes en el momento de evaluar el desempeño de los portafolios contruidos es que no logran ser los más eficientes, esto se puede atribuir al índice bursátil de referencia que es el COLCAP, como lo mencionamos a lo largo del estudio es un índice con diversas debilidades y los activos financieros pertenecientes a este tienen muy bajo nivel de sesgo y kurtosis, lo que permite que no exista una diversificación muy alta de activos y que los pocos que tienen altos niveles de esta medida estadística tengan un nivel de riesgo mayor.

Finalmente se logra identificar que esta medida de riesgo conductual puede ajustarse a técnicas de portafolio como Media-Varianza y diversificación, obteniendo lo esperado por la teoría y logrando desarrollar percepciones de riesgo adecuadas a las de cada inversionista.

5. Bibliografia

- Arditti, F. D. (1967). RISK AND THE REQUIRED RETURN ON EQUITY. *The Journal of Finance*, 22(1), 19-36. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1967.tb01651.x>
- Babaei, S., Sepehri, M. M., & Babaei, E. (2015). Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns. *European Journal of Operational Research*, 244(2), 525-539. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.01.025>
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43. <https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- Chang, B. Y., Christoffersen, P., & Jacobs, K. (2009). Market Skewness Risk and the Cross-Section of Stock Returns. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1480332>
- Chiang, I.-H. E. (2016). SKEWNESS AND COSKEWNESS IN BOND RETURNS: Skewness and Coskewness. *Journal of Financial Research*, 39(2), 145-178. <https://doi.org/10.1111/jfir.12093>
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking & Finance*, 21(2), 143-167. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(96\)00032-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(96)00032-5)
- Conrad, J., Dittmar, R. F., & Ghysels, E. (2013). Ex Ante Skewness and Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, 68(1), 85-124. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2012.01795.x>
- Davies, G., & Servigny, A. de. (2012). *Behavioral investment management: An efficient alternative to modern portfolio theory*. McGraw-Hill.
- Kim, H.-Y. (2013). Statistical notes for clinical researchers: Assessing normal distribution (2) using skewness and kurtosis. *Restorative Dentistry & Endodontics*, 38(1), 52. <https://doi.org/10.5395/rde.2013.38.1.52>
- Koumou, G., & Dionne, G. (2019). Coherent Diversification Measures in Portfolio Theory: An Axiomatic Foundation. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3351423>
- Luis Francisco Ruiz. (2017). *Debilidades Colcap*. <https://www.dinero.com/inversionistas/articulo/rentabilidad-de-acciones-colombianas-e-indice-colcap/241426>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77. <https://doi.org/10.2307/2975974>
- Mazzoli, C., & Marinelli, N. (2011). The Role of Risk in the Investment Decision Process: Traditional vs Behavioural Finance. En C. Lucarelli & G. Brighetti (Eds.), *Risk Tolerance in Financial Decision Making* (pp. 8-66). Palgrave Macmillan UK. https://doi.org/10.1057/9780230303829_2
- McLendon. (2019). Kurtosis. <https://www.simplypsychology.org/kurtosis.html>
- Pola, G. (2016). On entropy and portfolio diversification. *Journal of Asset Management*, 17(4), 218-228. <https://doi.org/10.1057/jam.2016.10>
- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3), 379-423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>
- Sun, R., Ma, T., Liu, S., & Sathye, M. (2019). Improved Covariance Matrix Estimation for Portfolio Risk Measurement: A Review. *Journal of Risk and Financial Management*, 12(1), 48. <https://doi.org/10.3390/jrfm12010048>
- Usta, I., & Kantar, Y. M. (2011). Mean-Variance-Skewness-Entropy Measures: A Multi-Objective Approach for Portfolio Selection. *Entropy*, 13(1), 117-133. <https://doi.org/10.3390/e13010117>