



## ÁLGEBRA Y FUNCIONES.

EXAMEN FINAL. 22 de noviembre de 2005

NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos. SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

1. (15 puntos)

(a) Resuelva la ecuación:  $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

(b) Resuelva la desigualdad:  $\log_3 x + \log_3(x + 2) > 1$

2. (15 puntos)

(a) Pruebe la identidad:  $\frac{1}{1 - \sin^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$

(b) Resuelva la ecuación trigonométrica:  $3\sin x = 2\cos^2 x$ , en el intervalo  $[0, 2\pi)$

(c) Encuentre todos los triángulos posibles que satisfagan las siguientes condiciones:  $a = 20$ ,  
 $b = 20\sqrt{3}$ ,  $\angle A = 30^\circ$

3. (20 puntos) Considere la función:  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ ,  $x > -2$ .

(a) Pruebe que  $f$  es inyectiva para  $x > -2$

(b) Explique por qué existe la función inversa de  $f$  y determine el dominio y el rango de  $f^{-1}$

(c) Determine una fórmula para  $f^{-1}(x)$  y verifique su respuesta utilizando la composición de funciones

(d) Trace la gráfica de  $f^{-1}$

4. (15 puntos) En cada uno de los siguientes ítems se da la fórmula **incompleta** de alguna función (hay términos constantes sin determinar). Utilice la información suministrada en cada caso sobre la gráfica respectiva, para identificar completamente la función:

(a)  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Su gráfica tiene un máximo en el punto  $(2, 5)$  y pasa por el punto  $(2 + \sqrt{5}, 0)$ .

(b)  $f(x) = ca^x$ . Su gráfica intercepta el eje de ordenadas en  $y = 2$  y pasa por el punto  $(-2, 18)$ .

(c)  $f(x) = a \cos k(x - b)$  su período es  $\pi$  y alcanza un valor máximo en  $x = \frac{\pi}{6}$ , con  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

5. (15 puntos)

(a) Del polinomio  $P(x) = 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 40$  se sabe que  $P(-1 - i) = 0$ . Utilice esta información para factorizar completamente a  $P(x)$ .

(b) Escriba, si es posible, un ejemplo de un polinomio de grado 3 cuyo coeficiente principal sea  $2 - i$  y cuyas raíces sean los números  $0$ ,  $i$  y  $-1$ . Debe escribir el polinomio en su forma estándar no factorizada (si no existe un polinomio de este tipo, explique las razones)

6. (20 puntos) En cada uno de los siguientes casos escriba en el espacio en blanco la expresión o expresiones algebraicas que completan el enunciado correctamente.

(a) Las asíntotas, si las hay, de la función  $y = \frac{4x^2 - 5}{2x^2 + 5x - 3}$  son:

(b) Al resolver para la variable  $t$  la ecuación  $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ , obtenemos que  $t =$

(c) El valor exacto (sin aproximaciones decimales) de  $\sin 75^\circ$  es: \_\_\_\_\_

(d) La recta que pasa por el centro de la circunferencia  $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y - \frac{1}{2} = 0$  y que es perpendicular a la recta  $x + 2y - 5 = 0$ , intercepta el eje de ordenadas en el punto \_\_\_\_\_

(e) El área  $A$  de un triángulo equilátero, expresada como función de la altura  $h$  del triángulo, es:  
 $A =$  \_\_\_\_\_

(20 puntos) Muestre que la altura  $h$  de la figura se determina con la expresión:  $h = d \frac{\tan b \tan a}{\tan b - \tan a}$