

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

PRIMER PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL

1. Determine todos los valores de a para los cuales el sistema lineal resultante (i) no tenga solución, (ii) tenga una única solución y (iii) tenga infinitas soluciones.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\2x + 3y + 2z &= 5 \\2x + 3y + (a^2 - 1)z &= a + 1.\end{aligned}$$

2. Muestre que
$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c).$$

3. Demuestre las proposiciones siguientes:

(a) Si u_1 y u_2 son soluciones del sistema lineal $Ax = b$, entonces

$$w = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \text{ es una solución de } Ax = b.$$

(b) Si A es una matriz de $n \times n$ entonces $Tr(AA^T) \geq 0$.

(c) Si A es una matriz de $n \times n$ entonces A se puede escribir como $A = S + K$ donde S es simétrica y K es antisimétrica.

(d) Si A es invertible entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

(e) Si A es una matriz de $n \times n$ entonces $\det(AA^T) \geq 0$.

(f) Si P es una matriz invertible y $B = PAP^{-1}$ entonces $\det B = \det A$.

