UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

Profesor Michell A. Gómez L. 26 de Marzo de 2009.

Cálculo de varias variables. Período Académico 091. G-09. Segundo parcial.

Nombre _____ Código _____

1. (10 puntos) Verifique que la curva de nivel de la función $f(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$ en el nivel $c = 2$ es un círculo. Represente la curva con una función vectorial.

2. (10 puntos) Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy^2-1}{x^2+y^2-2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+x^2y^2+y^2}{x^2+y^2}$

3. (12 puntos) a) Encuentre las segundas derivadas parciales de $g(x,y) = \int_y^x te^t\,dt$.

   b) Considere las funciones $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ y $v = \arctan(y/x)$ donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Determine si se satisface la ecuación $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$.

4. (10 puntos) a) Encuentre las direcciones en que la derivada direccional de $h(x,y) = x + \mathrm{sen}(xy)$ en el punto $(1,0)$ tiene el valor de 1.

   b) Halle un vector normal unitario a la curva $xy = -3$ en el punto $P(-1,3)$.

5. (8 puntos) a) Demuestre que si un objeto se mueve con rapidez constante, entonces sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

   b) Calcule $f_x(1,0)$ para $f(x,y) = x^2e^{xy}(x^2+y^2)^{-3/2}$.

   c) Utilice diferenciales para aproximar el cambio en $z = 5x^2+y^2$ cuando (x,y) se desplaza del punto $(1,2)$ al punto $(1.05, 2.1)$.

   d) Suponga que $z = f(x,y)$, $w = g(x,y)$, $z+w = xy$ y $zw = x-y$. Determine si $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-1}{z-w}$.

Opcional (5 puntos) El radio de un cilindro circular recto crece a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es el ritmo de cambio del volumen cuando el radio es 12 pulgadas y la altura es 36 pulgadas?