

13

Matriz insumo - producto



5^{ta}
edición

Técnicas de
medición
económica

Técnicas de medición económica

Eduardo Lora
&
Sergio Ivan Prada

Asistente de investigación y edición:
Ana Melissa Pérez

Diseño y diagramación:
Sandra Marcela Moreno Bolaños

2016

Quinta edición: versión impresa y en línea

Cómo citar este libro:

Recurso en línea:

Lora, Eduardo; Prada, Sergio. *Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia* [en línea]. Quinta Edición. <http://www.icesi.edu.co/medicion-economica-Colombia-Eduardo-Lora-Sergio-Prada>[Consulta: día mes año].

Versión impresa:

Lora, Eduardo & Prada, Sergio (5ta Ed.)(2016). *Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia*. Cali, Colombia: Universidad Icesi

ISBN:978-958-8936-14-7

Universidad Icesi



Introducción al libro

El propósito de este libro es estudiar de manera integrada las bases conceptuales y la metodología de las estadísticas que usan los economistas y otros científicos sociales para describir y analizar los fenómenos económicos y sociales. Las estadísticas que se estudian en este texto han sido seleccionadas por su utilidad y aplicación corriente. El libro no está dirigido a especialistas, su nivel es introductorio y su enfoque eminentemente práctico. Esta edición electrónica es gratuita y con ello aspira a llegar a un público más amplio. De ahí su estructura modular y los numerosos recursos didácticos y de consulta que contiene.

Estructura del libro

El libro está compuesto por 17 capítulos, de los cuales éste es el Capítulo 13: "Matriz insumo - producto". El esquema de la página 5 presenta la estructura del libro, que se explica a continuación. En los primeros cuatro capítulos se estudian los indicadores sociales más importantes en las áreas de demografía, mercado laboral, salud, educación, distribución de ingreso, pobreza y desarrollo humano. Los tres capítulos siguientes estudian los métodos de construcción y las aplicaciones más frecuentes de los indicadores económicos. Se empieza con un capítulo sobre índices de precios y cantidades, se estudian después los principales agregados macroeconómicos y se dedica luego un capítulo a los indicadores de coyuntura que se utilizan en Colombia para medirle el pulso a la actividad económica. Los capítulos restantes se dedican al estudio y manejo de diversos modelos de descripción económica. El análisis se aborda a partir de sistemas muy simplificados de cuentas nacionales, pasando después a los que se utilizan en la práctica en Colombia, para detenerse luego en algunas de sus aplicaciones y extensiones. Se concede una gran importancia al uso de las matrices de insumo-producto, no sólo por constituir la columna vertebral de los sistemas actuales de cuentas nacionales, sino también por sus inmensas posibilidades en numerosas áreas del análisis económico. La metodología y la interpretación de las estadísticas financieras y monetarias, de balanza de pagos y fiscales ocupan los tres últimos capítulos del libro.

Conocimientos requeridos

El lector debe tener en cuenta que algunos capítulos se construyen a partir de los temas desarrollados en capítulos anteriores, como se indica en el diagrama. Las flechas indican qué capítulos se necesitan para

abordar los demás capítulos. Los únicos que no tienen ningún prerrequisito son el Capítulo 1 (indicadores de población), el Capítulo 5 (índices de precios y cantidades) y el Capítulo 6 (conceptos de agregación económica).

Para abordar la mayoría de los capítulos se necesita un conocimiento muy elemental de álgebra y comprender el concepto y la notación de sumatoria (Σ). Éste es el nivel básico de conocimientos matemáticos a que se refiere el diagrama. El Capítulo 8 (medición de la productividad y fuentes de crecimiento económico) y el 17 (contabilidad de finanzas públicas) requieren conocimientos intermedios de matemáticas, debido a que utilizan nociones básicas de cálculo diferencial. Únicamente dos capítulos requieren nociones básicas de álgebra lineal (es a lo que nos referimos con conocimientos avanzados de matemáticas): el Capítulo 13 (matriz insumo-producto) y el Capítulo 14 (aplicaciones de la matriz insumo-producto). El recuadro inicial de cada capítulo le recuerda al lector los prerrequisitos y el nivel de matemáticas en cada caso.

Enfoque y recursos didácticos

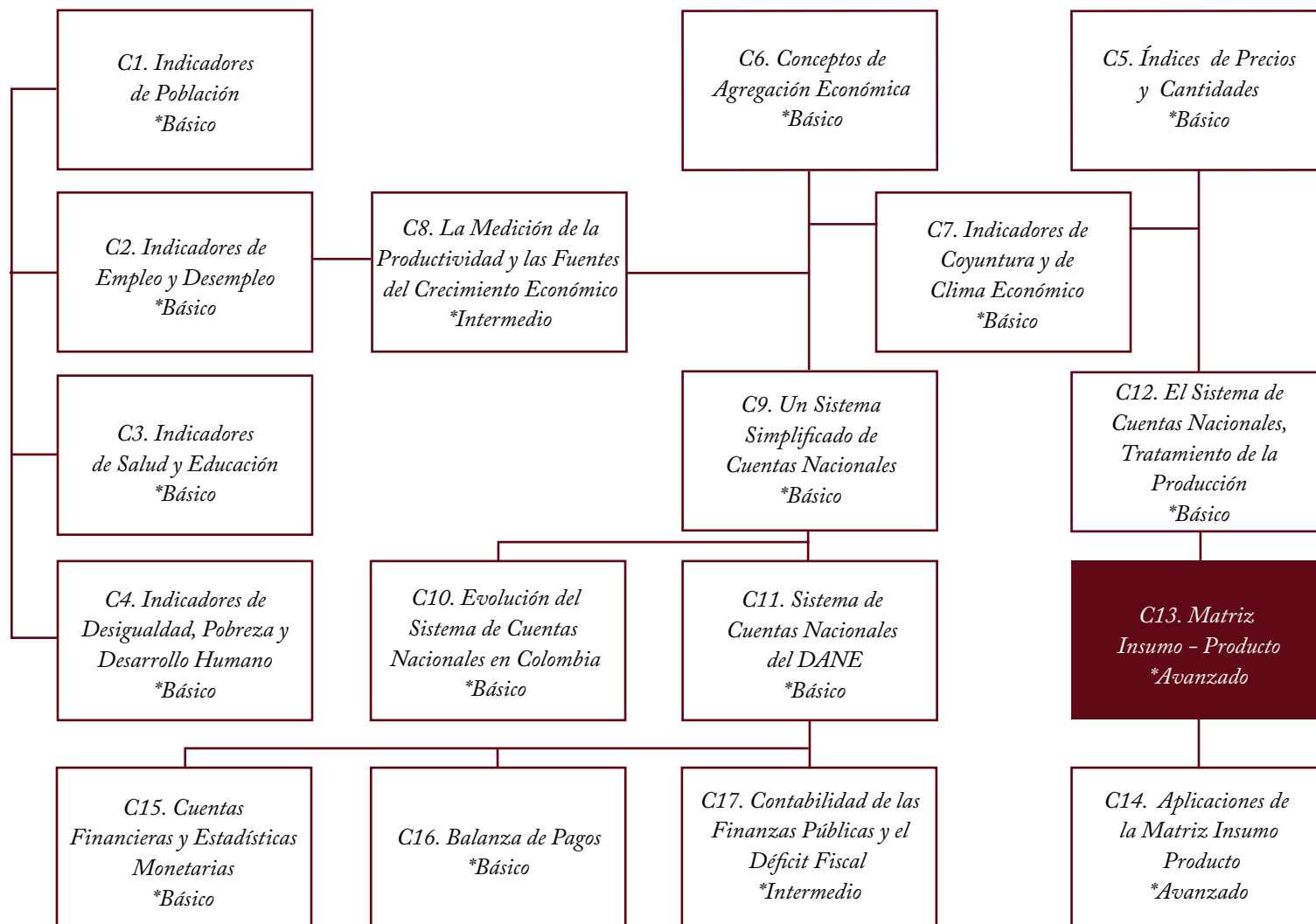
Cada capítulo incluye pequeños bocadillos en el margen izquierdo que resumen las ideas más importantes, y un cuadro al final que lista los conceptos clave que el estudiante debe dominar al terminar. Las ecuaciones que es preciso entender y manejar a la perfección están señaladas con el símbolo \otimes . Con el ánimo de inducir al estudiante a utilizar las estadísticas a lo largo de cada capítulo aparecen ejemplos sencillos, y al final se incluyen ejercicios y preguntas adicionales. Separadamente, para cada capítulo hay una hoja de Excel que contiene las soluciones a todos los ejercicios. El recurso didáctico que los profesores encontrarán más útil son las presentaciones en Power Point capítulo por capítulo.

Utilidad

Esperamos que esta versión electrónica del libro sea útil para todas aquellas personas interesadas en entender las estadísticas económicas y sociales más allá de los espacios académicos: periodistas, columnistas, políticos, líderes empresariales y sindicales, dirigente de gremios o funcionarios públicos. Entre mayor sea la comprensión de las estadísticas, mayor será la calidad del debate público sobre los problemas y políticas económicos y sociales.

Eduardo Lora & Sergio Iván Prada
Boston (EE.UU.) y Cali, agosto de 2016.

Contenido



Contenido

13 *MATRIZ INSUMO-PRODUCTO*

13.1 Construcción de una matriz insumo - producto simplificada

13.2 La metodología básica para fines analíticos

13.2.1 Supuestos tecnológicos

13.2.2 Cálculo de los valores brutos de producción a partir de las demandas finales

13.2.3 Descomposición de los productos finales en sus valores agregados

Conceptos clave

Preguntas y ejercicios

Soluciones a ejercicios seleccionados ()*

Bibliografía y fuentes y métodos

Capítulo 13

MATRIZ INSUMO-PRODUCTO

En el Capítulo 12 se presentó el sistema de descripción de la producción utilizado en el Sistema de Cuentas Nacionales, para lo cual se partió de las cuentas de producción y de bienes y servicios que, organizadas en forma matricial, dan origen a la matriz de insumo-producto. La utilidad de dicha matriz no es solamente la descripción de las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción. Con base en esta descripción y algunos supuestos tecnológicos, la matriz insumo-producto puede servir también como herramienta de programación y análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos; puede utilizarse para estudiar la composición del valor agregado de los productos y efectuar análisis de precios, calcular requerimiento de importaciones, etc. A estas aplicaciones de la matriz insumo-producto se dedican éste y el siguiente capítulo. Con fines expositivos se utilizará inicialmente una matriz simplificada que difiere en algunos detalles de construcción de la matriz de utilización elaborada por el DANE. Como se observará al final del capítulo siguiente, la matriz del Sistema de Cuentas Nacionales no podría ser utilizada directamente en ejercicios matemáticos de programación, debido a las peculiaridades de su construcción. Sin embargo, el DANE hace los ajustes necesarios y calcula los coeficientes y multiplicadores necesarios para ese propósito.

13.1 Construcción de una matriz insumo - producto simplificada

Sin pérdida alguna de generalidad, para fines expositivos puede trabajarse con una matriz en la que intervienen sólo tres ramas y tres productos y en la que los únicos componentes del valor agregado son los salarios y las ganancias. La inclusión de los impuestos indirectos netos de subsidios y los gastos de depreciación no suponen complicación alguna. Inicialmente se considerará una economía sin transacciones con el exterior (el tratamiento de las exportaciones e importaciones será objeto de estudio del siguiente capítulo). Adicionalmente, se supondrá que existe perfecta correspondencia entre las ramas de producción

Una matriz insumo producto describe simplíficadamente el origen y la utilización de los bienes y servicios por parte de todas las ramas productivas y las demandas finales.

y los productos y que ninguna rama obtiene productos diferentes a los que le son característicos, es decir, no obtiene producciones secundarias. El tratamiento de las producciones secundarias introduce algunas dificultades, como se discutirá en el capítulo siguiente.

Hechas estas simplificaciones, puede presentarse matricialmente la información proveniente de las cuentas de producción de las ramas y de las cuentas de bienes y servicios (o productos) del Sistema de Cuentas Nacionales. Considérese el Ejemplo 13.1. En sentido vertical, las cuentas de cada rama j expresan una igualdad entre el *valor bruto de la producción VBP* y los costos incurridos para generarlo, es decir: las *compras intermedias* (de insumos) a las otras industrias i , $\Sigma_i CI_{ij}$, los pagos de salarios S_j y las *ganancias* G_j , que según nuestros supuestos componen la totalidad del *valor agregado*. Así, cada columna puede ser representada mediante la ecuación

$$VBP_j = \Sigma_i CI_{ij} + S_j + G_j$$

o, de forma más breve,

$$VBP_j = CI_j + VA_j$$

Ejemplo 13.1

Estructura de una matriz insumo-producto

		Compras ↓			Ventas Intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Producto final PIB	Valor bruto de producción VBP
		Ramas de producción							
Ventas →		Primaria (1)	Secundaria (2)	Terciaria (3)					
Productos	Primarios (1)	-	200	-	200	200	100	300	500
	Secundarios (2)	300	-	100	400	200	-	200	600
	Terciarios (3)	-	100	-	100	100	-	100	200
Compras intermedias CI		300	300	100	700	500	100	600	1,300
Salarios S		100	150	100	350				
Ganancias G		100	150	-	250				
Valor agregado (ingreso) VA		200	300	100	600				
Valor bruto de producción VBP		500	600	200	1,300				

En sentido vertical están las compras que hacen los sectores. Así, el sector primario (rama 1) adquirió insumos industriales por \$300, pagó salarios por \$100 y obtuvo ganancias por \$100, para un valor bruto de la producción de \$500. En sentido horizontal están las ventas. Por ejemplo, el sector terciario, o de servicios (3) vendió \$100 al sector secundario (para un total de ventas intermedias de \$100), y \$100 a los consumidores (para un total de ventas de producto final de \$100). Nótese que los totales de la columna y la fila de un sector son iguales (\$500 en el caso del sector primario), puesto que son dos formas alternativas de calcular el valor bruto de producción del sector.

En sentido horizontal se discriminan los usos dados a cada producción i , los cuales comprenden las ventas intermedias a los otros sectores $\sum_j CI_{ij}$, y los usos finales, que en nuestro caso son sólo *consumo final* C_i e *inversión* I_i :

$$O_i = \sum_j CI_{ij} + C_i + I_i$$

donde O_i es *oferta total* del producto i . Como no estamos considerando transacciones exteriores ni producciones secundarias, la oferta del producto i equivale a la producción bruta de la rama correspondiente:

$$O_i = VBP_j \quad \text{para } i = j$$

Si se expresa el total de ventas intermedias del sector i a otros sectores como VI (lo que es lo mismo que $\sum_j CI_{ij}$), cada fila de la matriz puede expresarse con la igualdad:

$$VBP_i = VI_i + C_i + I_i$$

Así, en el Ejemplo 13.1, el producto del sector primario se destina (como se observa en la fila 1) a consumo intermedio en el sector secundario (\$200), consumo final (\$200) e inversión (\$100). Los usos totales del producto primario que se registran en la última casilla de la fila (\$500) son iguales al producto del sector primario como total de la columna 1 correspondiente. De esta manera, para cada columna y fila correspondiente se cumple que

$$CI_j + VA_j = C_i + I_i \quad \text{para } i = j$$

Verticalmente la matriz I-P muestra los consumos intermedios de cada rama, los valores agregados y los valores brutos de producción.

Horizontalmente la matriz I-P muestra las ventas intersectoriales, las demandas finales de cada producto y el valor bruto de producción.

Agregando todas las ecuaciones de todos los productos se tiene que

$$\sum_j CI_j + \sum_j VA_j = \sum_i VI_i + \sum_i CI_i + \sum_i I_i$$

Ambos lados de esta ecuación corresponden en el esquema a los totales de todos los valores brutos de producción. Así, la totalidad de compras intermedias entre todos los sectores, $\sum_j CI_j$, es \$700, y la suma de valores agregados $\sum_j VA_j$ es \$600 para un total de valores brutos de producción de \$1,300, lo que a su vez es igual a la totalidad de las ventas intermedias $\sum_i VI_i$ (que son los mismos \$700 de las compras intermedias), más la totalidad de los consumos finales $\sum_i C_i$ por \$500, más la inversión $\sum_i I_i$ por valor de \$100.

En la matriz I-P el valor bruto de producción de cada fila es igual al de la columna correspondiente

Como el conjunto de las ventas intermedias para toda la economía es idéntico a la totalidad de las compras intermedias, la ecuación anterior puede simplificarse a

$$\sum_j VA_j = \sum_i CI_i + \sum_i I_i$$

ecuación que expresa sencillamente la igualdad entre el agregado del producto o el ingreso y sus *usos finales*, esto es, la expresión macroeconómica básica para una economía cerrada:

$$Y = C + I$$

En el ejemplo este valor es de \$600, o sea, la suma de los valores agregados, que a su vez corresponden al consumo y la inversión.

13.2 La metodología básica para fines analíticos

13.2.1 Supuestos tecnológicos

El uso de la matriz insumo-producto para fines analíticos depende de la adopción de algunas hipótesis. En el Capítulo 12 se observó que la unidad de clasificación para la descripción de la producción debe ser el establecimiento y no el agente económico o la firma. Se considera que el establecimiento es la unidad de producción más homogénea en cuanto a empleo de recursos y producción. Esta *hipótesis de homogeneidad* exige que los establecimientos clasificados dentro de cada rama de la producción produzcan un solo producto con la misma estructura de insumos. Para su estricto cumplimiento esta hipótesis requiere

que todos los establecimientos dentro de una rama utilicen insumos idénticos y en las mismas proporciones y obtengan también productos idénticos. Como las matrices insumo-producto se elaboran en valores monetarios y no en unidades físicas, el requisito de homogeneidad debe extenderse también a los precios: insumos iguales o productos iguales deben tener precios iguales de valoración para todos los productores. En la práctica, la validez del requisito de homogeneidad depende del número de los sectores y de la precisión con que se definen los productos y sus valoraciones.

La segunda hipótesis que se requiere para aplicar la matriz insumo-producto como herramienta analítica es la existencia de *proporcionalidad* entre la cantidad de producto de cada sector y las cantidades de insumos y de factores de producción utilizados. El requisito de proporcionalidad implica funciones lineales de producción tales que las necesidades de todos y cada uno de los insumos y factores de producción requeridos en la producción de cada rama varíen proporcionalmente con el volumen de producción. Esto implica que el uso de los insumos y los factores productivos no depende de sus precios relativos, lo cual es un supuesto poco realista y que contradice la lógica de la microeconomía, pues es de esperarse que cualquier recurso que se vuelve más costoso en términos relativos tienda a ser sustituido en alguna medida por otros recursos más baratos. Sin embargo, es preciso mantener este supuesto en un libro introductorio como éste, pues el uso de funciones de producción más realistas, que tengan en cuenta la influencia de los precios relativos, representa complicaciones matemáticas muy importantes. El punto que debe tenerse presente en lo sucesivo es que el supuesto de proporcionalidad sólo tiene sentido siempre que no haya cambios importantes en los precios relativos de los insumos o de los factores productivos.

Como estas hipótesis dejan en claro, los datos de la matriz son útiles para fines analíticos si reflejan las necesidades tecnológicas de los sectores. Por esta razón, es importante distinguir entre la compra y la utilización de inventarios de materias primas. Para propósitos analíticos interesa registrar en la matriz sólo los usos de insumos, en los cuales se basan los supuestos tecnológicos. Por consiguiente, la acumulación o des-acumulación de inventarios en materias primas debe aparecer como un uso final y no como un uso intermedio del producto.

A lo largo de estos dos capítulos supondremos que se cumplen estas hipótesis tecnológicas y de construcción de la matriz insumo-producto. Al referirnos al final del capítulo siguiente a las modificaciones que deben hacerse a la matriz de utilización del *SCN* para fines analíticos, señalaremos algunas complicaciones que resultan de violar estos supuestos y cómo debe procederse para obviarlas.

13.2.2 Cálculo de los valores brutos de producción a partir de las demandas finales

Uno de los problemas que puede resolverse a partir de la información que proporciona la matriz insumo-producto es calcular el valor bruto de la producción de cada rama que se requiere para satisfacer un conjunto de necesidades de *demanda final* de bienes y servicios.

Considérese nuevamente el Ejemplo 13.1. Se necesita una producción bruta total de \$1,300 (\$500 de la agricultura, \$600 de la industria, \$200 de servicios) para conseguir un producto final de \$600, compuesto así: \$300 de bienes primarios, \$200 de manufacturas y \$100 de servicios. La diferencia entre ambos totales corresponde a las compras intermedias, que son \$700 para toda la economía.

Por tanto, podría plantearse la siguiente pregunta: ¿cómo debe modificarse el valor bruto de la producción de cada sector si se desea elevar el consumo de bienes industriales en \$100? En principio puede decirse que el *VBP* industrial deberá también elevarse en \$100 para satisfacer la mayor demanda final. Ello significa un aumento del 16.7% sobre el actual *VBP* industrial, que es de \$600. En consecuencia, todas y cada una de las necesidades de insumos del sector industrial tendrían que incrementarse en un 16.7%, como también el valor agregado industrial, debido al supuesto de proporcionalidad enunciado. Ahora bien, como el sector industrial ha aumentado sus compras a los demás sectores, éstos tendrán que elevar también su producto. Así, el sector primario tendrá que elevar su *VBP* de \$500 a \$533.3, siendo estos \$33.3 lo que ahora el sector secundario va a comprarle de más. Este aumento del *VBP* agrícola equivale a un 6.6%, porcentaje en el cual deben aumentar sus compras a los otros sectores. Las compras intermedias del sector primario al sector industrial pasarán de \$300 a \$320 y el valor agregado agrícola de \$200 a \$213.3. En este punto, sin embargo, el problema se complica, pues al demandar el sector agrícola \$20 más del sector industrial, tendríamos nuevamente que modificar el *VBP* industrial (que habíamos calculado en \$700); y con esta modificación aparecerá una nueva demanda de bienes agrícolas por parte del sector industrial y así sucesivamente. Igual cosa sucedería entre el sector industrial y el de servicios y entre éste y el agrícola.

Es posible desarrollar este método de aproximaciones sucesivas, haciendo ajustes en todos los sectores en forma iterativa. Los resultados de las dos primeras iteraciones aparecen en el Ejemplo 13.2, donde las cifras encima de la diagonal en cada casilla resultan de la primera iteración y las de debajo de la segunda.

Ejemplo 13.2

Método iterativo de cálculo del VBP

Compras ↓ Ventas →	Primaria (1)	Secundaria (2)	Terciaria (3)	Ventas Intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Producto final PIB
Primarios (1)	-	233.3	0	233.3	200	100	300
		242.8	0	242.8			
Secundarios (2)	320.0	-	108.3	428.3	300	-	300
	325.7		110.7	436.4			
Terciarios (3)	0	116.7	-	116.7	100	-	100
	0	121.4		121.4			
Compras intermedias CI	320.0	350.0	108.3	778.3	600	100	700
	325.7	364.2	110.7	800.6			
Salarios S	106.6	175.0	108.3	390.0			
	108.5	182.1	110.7	401.3			
Ganancias G	106.6	175.0	0	281.6			
	108.5	182.1	0	290.6			
Valor agregado (ingreso) VA	213.3	350.0	108.3	671.6			
	217.1	364.2	110.7	692.0			
Valor bruto de producción VBP	533.3	700.0	216.7	1450.0			
	542.8	728.3	221.4	1492.5			

Este ejemplo presenta las dos primeras rondas de re-cálculo de la matriz insumo-producto del Ejemplo 13.1 si la demanda de consumo final, C del sector secundario fuera 300, en vez de 200, y por lo tanto su valor bruto de producción fuera 700 en vez de 600. En el texto se explican los cálculos paso por paso.

En cada iteración serían menores las correcciones que habría que introducir a cada una de las cifras, de modo que a la quinta o sexta iteración ya estaríamos bastante próximos al resultado final. Entonces el VBP de cada rama tendría que satisfacer tanto las necesidades de demanda final de las que partimos, como las necesidades de insumos requeridos por los otros dos sectores, esto es:

$$VBP_j = C_i + I_i + \sum_j CI_{ij}$$

Como desde un principio hemos supuesto que las necesidades de cada tipo de insumos para cada rama son una proporción constante de su producción, las compras intermedias del insumo i por parte de la industria j pueden expresarse como

$$CI_{ij} = a_{ij} VBP_j$$

donde a_{ij} es el *coeficiente técnico* que indica cuáles son las necesidades del insumo por peso de producción bruta del sector j . Si el sector agrícola requiere \$300 de insumo industriales para producir un VBP de \$500, dicho coeficiente es 0.6. Todos los coeficientes técnicos se calculan dividiendo el valor de las compras intermedias de cada rama por el respectivo VBP de esa rama. Los resultados pueden presentarse en una matriz, que se denomina “matriz de coeficientes técnicos”, tal como la que se presenta en el Ejemplo 13.3, obtenido a partir del Ejemplo 13.1.

Cada columna de la matriz de coeficientes técnicos es la mezcla de insumos directos que se requiere por cada unidad de producto.

Ejemplo 13.3

Matriz de coeficientes técnicos

	Primario (1)	Secundario (2)	Terciario (3)
Primario (1)	0.00	0.33	0.00
Secundario (2)	0.60	0.00	0.50
Terciario (3)	0.00	0.17	0.00

Este ejemplo presenta los coeficientes técnicos, que son simplemente el coeficiente entre las compras de insumos intermedios y el valor bruto de producción del sector que hace la compra, calculados a partir de la matriz insumo-producto del Ejemplo 13.1.

De acuerdo con lo anterior, las ventas intermedias de cada artículo pueden calcularse a partir de estos coeficientes técnicos multiplicados por el VBP de cada sector. Según nuestros datos, las ventas intermedias de bienes primarios deberán ser iguales al 33% del VBP industrial; las de bienes industriales serán el 60% del VBP primario más el 50% del VBP terciario, y las ventas intermedias del sector terciario el 17% del VBP industrial. Entonces, de manera general, las ventas intermedias totales de cualquier sector i son

$$VI_i = \sum_j CI_{ij} = \sum_j a_{ij} VBP_j$$

Como el VBP de cada sector es

$$VBP_i = C_i + I_i + VI_i$$

se tiene entonces que

$$\textcircled{\checkmark} \quad VBP_i = C_i + I_i + \sum_j a_{ij} VBP_j$$

Con esta expresión, los VBP de los tres sectores serán, respectivamente:

$$\begin{aligned} VBP_1 &= 200 + 100 + (0.33VBP_2) \\ VBP_2 &= 300 + (0.6VBP_1 + 0.5VBP_3) \\ VBP_3 &= 100 + (0.17VBP_2) \end{aligned}$$

O, de manera simbólica

$$\begin{aligned}
 VBP_1 &= C_1 + I_1 + a_{12}VBP_2 + a_{13}VBP_3 \\
 \textcircled{\checkmark} \quad VBP_2 &= C_2 + I_2 + a_{21}VBP_1 + a_{23}VBP_3 \\
 VBP_3 &= C_3 + I_3 + a_{31}VBP_1 + a_{32}VBP_2
 \end{aligned}$$

donde los espacios en blanco corresponden a los coeficientes técnicos de cada rama sobre sus propios productos, los cuales son cero.

El sistema anterior consta de tres incógnitas y tres ecuaciones y puede resolverse sin mayor dificultad, como se ve en el Ejemplo 13.4.

Ejemplo 13.4

Cálculo de los valores brutos de producción conociendo las demandas finales

Queremos calcular los valores brutos de producción utilizando las igualdades entre producción y usos de la producción de cada sector que acabamos de presentar. Para nuestro ejemplo, sustituyendo VBP_3 en la ecuación de VBP_2

$$VBP_2 = 300 + 0.6VBP_1 + 0.5(100 + 0.17VBP_2)$$

de donde se deduce que:

$$VBP_2 = \frac{350 + 0.6VBP_1}{0.915}$$

y reemplazando esto en la ecuación de VBP_1

$$VBP_1 = 200 + 100 + 0.33 \frac{350 + 0.6VBP_1}{0.915}$$

Por consiguiente:

$$VBP_1 = 543.9$$

$$VBP_2 = 739.2$$

$$VBP_3 = 225.7$$

También es posible utilizar expresiones matriciales para representar el sistema anterior de ecuaciones:

$$\textcircled{\checkmark} [VBP]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 1} + [A]_{3 \times 3} [VBP]_{3 \times 1}$$

donde $[VBP]$ es el vector columna de los VBP_i , $[D]$ el vector columna de las demandas finales C_i e I_i tomadas conjuntamente y $[A]$ la matriz cuadrada de los coeficientes técnicos a_{ij} , cuyo tamaño en nuestro caso es 3×3 , como lo señala el subíndice.

Mediante algunas transformaciones (en las cuales $[I]$ es la matriz identidad), se puede despejar el vector $[VBP]$, que es la incógnita del problema:

$$[I]_{3 \times 3} [VBP]_{3 \times 1} - [A]_{3 \times 3} [VBP]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 1}$$

$$[I-A]_{3 \times 3} [VBP]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 1}$$

$$[VBP]_{3 \times 1} = [I-A]_{3 \times 3}^{-1} [D]_{3 \times 1}$$

La matriz $[I-A]$, cuya inversa aparece premultiplicando el vector columna de demanda final $[D]$, se conoce también con el nombre de *matriz de Leontief*. Fue Wassily Leontief quien inició la construcción de matrices insumo-producto y su empleo para fines de estimación y programación económica.

Si se regresa a los datos numéricos del ejemplo, las matrices de la última expresión pueden escribirse como

$$[VBP]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.33 & 0 \\ -0.6 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.17 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Calculando la inversa mediante $[I - A]^{-1} = \frac{1}{\text{Det}[I - A]} \text{Adj}[I - A]$

donde Det es determinante y Adj adjunta, o sea, *transpuesta* de cofactores, se tiene que

$$\begin{aligned} [I - A]^{-1} &= \frac{1}{0.0717} \begin{bmatrix} 0.915 & 0.330 & 0.165 \\ 0.600 & 1.000 & 0.500 \\ 0.102 & 0.170 & 0.802 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.276 & 0.460 & 0.230 \\ 0.837 & 1.395 & 0.697 \\ 0.142 & 0.237 & 1.119 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde los valores de producto buscados son:

$$\begin{bmatrix} 543.8 \\ 739.3 \\ 225.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.276 & 0.460 & 0.230 \\ 0.837 & 1.395 & 0.697 \\ 0.142 & 0.237 & 1.119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que hemos llegado a los mismos resultados del Ejemplo 13.4, pero ahora mediante un método matricial. La última ecuación representa numéricamente que el valor del producto de cada sector es igual a la sumatoria de los coeficientes de la fila correspondiente, multiplicados por los valores de demanda final, esto es

$$VBP_i = \sum_j r_{ij} \cdot D_j$$

La inversa de la matriz de Leontief tiene en cuenta todos los encadenamientos entre los sectores productivos.

En consecuencia, cada uno de los elementos r_{ij} de la inversa de la *matriz de Leontief* es un coeficiente que indica la cantidad de producto VBP_i del sector i que se requiere para producir \$1 de producto final (D_j) del sector j . Así, el elemento r_{23} , ubicado en la fila 2 y la columna 3 de la inversa de la matriz de Leontief, indica el valor de producto del sector 2 requerido para obtener \$1 de producto final del sector 3. En nuestro ejemplo, se necesita \$0.697 de producto del sector industrial para conseguir \$1 de producto final del sector terciario.

Es importante señalar que estos coeficientes r_{ij} comprenden no sólo los insumos directamente requeridos en la producción de cada bien, sino aquéllos que resultan de las demandas indirectas provenientes de otros sectores, que a su vez aportan insumos para la producción de dicho bien. Como puede verse, cada uno de los coeficientes de la inversa de la *matriz de Leontief* es mayor que el correspondiente coeficiente técnico de la matriz original, $[A]$.

Recuadro 13.1 Encadenamientos hacia atrás y hacia adelante

Un resultado muy interesante que se deriva de la matriz de coeficientes técnicos y de la matriz Leontief son los denominados encadenamientos hacia atrás y hacia adelante de una actividad económica. Los *encadenamientos hacia atrás* estiman la importancia relativa de la demanda intermedia, directa e indirecta, del sector j , respecto de la demanda intermedia directa e indirecta de la economía en su conjunto. El encadenamiento directo hacia atrás se mide calculando la suma de los coeficientes de la columna respectiva en la matriz de coeficientes técnicos. El encadenamiento total (que captura los efectos directos e indirectos) se mide realizando la misma operación pero en la matriz de Leontief. Por su parte los *encadenamientos hacia adelante*, se refieren a los estímulos que el sector i proporciona al resto de la economía cuando produce y ofrece un bien que puede emplearse como insumo. De manera análoga el encadenamiento directo hacia adelante se mide calculando la suma de los coeficientes de la fila respectiva en la matriz de coeficientes técnicos. Y el encadenamiento hacia adelante total se mide realizando la misma operación pero en la matriz de Leontief.

También se puede observar que cada peso de producto final (en cualquier sector) exige en total más de un peso de producción por parte de todos los sectores. Esto no debe extrañar, ya que al sumar entre sí los *VBP* de los diversos sectores necesarios para producir el producto final, se están contabilizando doblemente algunas compras intermedias que están incluidas en tales *VBP*. Se puede regresar a los datos originales de la matriz insumo-producto y observar que no hay nada de particular en que la suma de los *VBP* sea mayor a la suma de los productos finales de toda la economía.

Antes de avanzar en la descripción de las aplicaciones e implicaciones del modelo de programación económica propuesto por Leontief, es importante resaltar un último punto. Nótese que el modelo supone que los niveles de producción de los sectores están completamente determinados por la demanda; ello implica, en otras palabras, que existen *excesos de capacidad* de producción (o de capacidad instalada) en todos los sectores productivos y oferta laboral disponible para ser utilizada a los salarios existentes, de forma que la producción siempre puede aumentar o disminuir para igualar la demanda sin cambios en los precios.

13.2.3 Descomposición de los productos finales en sus valores agregados

Si del total del valor bruto de la producción se descuentan las compras intermedias, se obtiene el valor del producto final de la economía, que a su vez es igual a la suma de los valores agregados. La matriz insumo-producto permite demostrar que esta igualdad entre el valor agregado rige también para cada producto tomado por separado y no sólo para el total.

Para mostrarlo es preciso calcular primero los *coeficientes de valor agregado* de cada rama de la producción, los cuales indican qué porcentaje del valor bruto de la producción de cada sector corresponde al valor agregado directamente por el mismo sector. Puesto que el valor agregado se compone de salarios y ganancias, el coeficiente de valor agregado total f_j de un sector j cualquiera será la suma de sus coeficientes de salarios s_j y de ganancias g_j del sector, como se puede ver en el Ejemplo 13.5. En general,

$$s_j = \frac{S_j}{VBP_j}$$

$$\textcircled{\surd} \quad g_j = \frac{G_j}{VBP_j}$$

$$f_j = \frac{VA_j}{VBP_j} = s_j + g_j$$

Ejemplo 13.5*Cálculos de la matriz de coeficientes técnicos*

Queremos calcular la matriz de coeficientes técnicos y de valor agregado, partiendo de los datos del Ejemplo 13.1. Ya habíamos calculado los coeficientes técnicos en el Ejemplo 13.3. Por su parte, los coeficientes de valor agregado total, incluidos salarios y ganancias, son 0.4, 0.5 y 0.5 para las tres ramas, respectivamente. De acuerdo con estos coeficientes, por cada peso de producto bruto del sector agrícola, por ejemplo, se generan \$0.40 de valor agregado directo en dicho sector.

Matriz de coeficientes técnicos y de valor agregado

<i>Compras</i> ↓ <i>Ventas</i> →	<i>Primario</i> <i>(1)</i>	<i>Secundario</i> <i>(2)</i>	<i>Terciario</i> <i>(3)</i>
<i>Primario (1)</i>	0.00	0.33	0.00
<i>Secundario (2)</i>	0.50	0.00	0.50
<i>Terciario (3)</i>	0.00	0.17	0.00
$\sum_j a_{ij}$	0.60	0.50	0.50
<i>s</i>	0.20	0.25	0.50
<i>g</i>	0.20	0.25	0.00
<i>f</i>	0.40	0.50	0.50
<i>Total</i>	1.00	1.00	1.00

El valor del producto final de cualquier sector puede descomponerse en su totalidad en los valores agregados por los diversos sectores que contribuyen a su producción de forma directa o indirecta.

Por lo tanto, si los requerimientos de producto bruto necesarios para satisfacer una demanda de producción final se multiplican por estos coeficientes, se tienen como resultado los componentes de valor agregado, libres de duplicaciones, de cada sector en esa producción final. Según los datos de la tercera columna de la matriz $[I - A]^{-1}$ calculada antes, que indican los requerimientos de producción bruta de cada sector por peso de demanda final del sector terciario, para obtener \$100 de producción final de ese sector se precisan \$23.0 de producción bruta del sector primario, \$69.7 del secundario y \$111.9 del mismo sector terciario. Si cada uno de estos valores se multiplica por su respectivo coeficiente de valor agregado f_j y se suman entre sí estos valores, se tiene que

$$\begin{aligned} VA &= 0.4 \times 23.0 + 0.5 \times 69.7 + 0.5 \times 111.9 \\ &= 100 \end{aligned}$$

con lo cual se muestra que, en efecto, para generar \$100 de producto final de sector terciario se requiere en total \$100 de valor agregado por toda la economía. Este resultado puede expresarse simbólicamente:

$$VA = \sum_j f_j VBP_j$$

Como ya lo mostramos, la producción bruta que cada sector j debe generar para satisfacer la demanda final de un sector cualquier i se calcula como

$$\textcircled{\surd} \quad VBP_j = r_{ij} D_i$$

donde r_{ij} es el término correspondiente en la *matriz inversa* de Leontief. De modo que si se reemplaza en la ecuación anterior, se deduce que

$$VA = \sum_j f_j r_{ij} D_i$$

Pero, según hemos expuesto, el valor agregado es igual a la demanda final; por lo tanto,

$$1 = \sum_j f_j r_{ij}$$

Esta expresión rige para todos los sectores y puede escribirse matricialmente como

$$\textcircled{\surd} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada que aparece con esta expresión es la transpuesta de $[I - A]^{-1}$, así que en forma abreviada:

$$\textcircled{\surd} [1]_{3 \times 1} = [(I - A)^{-1}]_{3 \times 3}^T [F]_{3 \times 1}$$

La suma de las demandas finales es idéntica a la suma de los valores agregados.

El vector columna de unos es igual a la transpuesta de la matriz invertida de Leontief¹ multiplicada por el vector columna de los coeficientes de valor agregado $[F]$. Se aprecia, entonces, que el valor del producto final de cualquier sector puede descomponerse en su totalidad en los valores agregados por los diversos sectores que contribuyen a su producción en forma directa o indirecta. Según veremos en el capítulo siguiente, esta propiedad es de utilidad para análisis de descomposición del ingreso y de precios.

NOTA: Véase la bibliografía sobre matrices insumo-producto al final del capítulo siguiente.

¹ Como puede demostrarse es lo mismo $[(I - A)^{-1}]^T$ que $[(I - A)^T]^{-1}$.

Matriz insumo-producto

Conceptos clave

Diferentes matrices

- Matriz de oferta
- Matriz de utilización
- Matriz insumo-producto
- Matriz de Leontief
- Matriz inversa
- Matriz transpuesta

Métodos de análisis que utilizan la matriz insumo-producto

- Programación y análisis económico
- Modelo insumo-producto

Agregados económicos que aparecen en la matriz insumo-producto

- Valor bruto de la producción
- Salarios
- Ganancias
- Valor agregado
- Consumo intermedio
- Ventas intermedias
- Consumo final
- Inversión
- Demanda final
- Oferta total
- Oferta final
- Usos finales

Matriz insumo-producto

Conceptos clave

Conceptos para usar la matriz insumo-producto con fines analíticos

- Hipótesis de homogeneidad
- Requisitos de proporcionalidad
- Coficiente(s) técnico(s)
- Coficientes de valor agregado
- Descomposición del producto
- Encadenamientos hacia adelante
- Encadenamientos hacia atrás
- Excesos de capacidad

Preguntas y ejercicios

13.1*

Obtenga la matriz insumo-producto completa para la economía de tres sectores que se describe en seguida.

En el año de actividad observado, el sector primario obtuvo una producción bruta de \$500, de la cual vendió solamente \$400, así: \$200 al sector industrial y \$200 a los consumidores, ingresos con los cuales cubrió totalmente sus costos antes de ganancias. El sector industrial efectuó compras intermedias por un total de \$300 y vendió la totalidad de su producción por un valor bruto de \$600, obteniendo ganancias por \$150. Dichas ventas se distribuyeron así: \$300 a la agricultura, \$100 al sector terciario y el resto a los consumidores. Por su parte, el sector terciario obtuvo una producción total por un valor de \$200, en la que no hizo ganancia alguna. Por último, el consumo total de bienes finales durante el período analizado fue de \$500.

13.2*

Obtenga la matriz insumo-producto completa para la economía de tres sectores que se describe en seguida.

En el año de actividad observado, el sector primario adquirió insumos industriales por \$100 y pagó servicios por \$50. El producto se destinó en su totalidad a la venta, así: \$300 al sector industrial y \$200 a los consumidores. Una vez cubiertos los costos, los agricultores obtuvieron ganancias por \$150. El sector secundario compró, además, servicios por \$100, pagó salarios por \$200 y obtuvo una producción por valor de \$1,000, de los cuales pudo vender \$100 a los agricultores, \$100 a los productores de servicios y \$600 a los consumidores. En cuanto al sector terciario, produjo y vendió servicios por \$300 a precios de costo, sin obtener pérdida ni ganancia alguna.

13.3*

Obtenga la matriz de coeficientes técnicos y de valor agregado para la matriz insumo-producto del ejercicio anterior.

13.4*

Obtenga la matriz de Leontief y su inversa a partir del punto anterior.

Preguntas y ejercicios

- 13.5 Con los resultados de los Ejercicios 13.3 y 13.4 calcule los encadenamientos hacia delante y hacia atrás de cada sector. Explique.
- 13.6* Calcule los requerimientos de valor bruto de la producción de cada uno de los sectores para satisfacer una demanda de bienes finales de \$300 del sector primario, \$1,000 del sector secundario y \$200 del terciario.
- 13.7* A partir de los resultados del punto anterior demuestre que el valor agregado total es idéntico al valor de los productos finales. Muestre que esto es válido también para cada sector individual.
- 13.8 Con los resultados de los Ejercicios 13.3 y 13.4 compruebe que $[I]=[I-A^T]^{-1}[F]$. Explique por qué tiene que ser así.
- 13.9* Calcule cómo se distribuye el valor bruto de la producción de cada uno de los tres sectores entre las demandas finales de los tres productos.
- 13.10* Calcule ahora el destino de los valores brutos distinguiendo en cada demanda final entre consumo e inversión de acuerdo con los datos del Ejercicio 13.2.

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

13.1R

		Compras ↓			Ventas Intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Producto final PIB	Valor bruto de producción VBP
		Ramas de producción							
Ventas →		Primaria (1)	Secundaria (2)	Terciaria (3)					
Productos	Primarios (1)	-	200	-	200	200	100	300	500
	Secundarios (2)	300	-	100	400	200	-	200	600
	Terciarios (3)	-	100	-	100	100	-	100	200
Compras intermedias Cl		300	300	100	700	500	100	600	1,300
Salarios S		100	150	100	350				
Ganancias G		100	150	-	250				
Valor agregado (ingreso) VA		200	300	100	600				
Valor bruto de producción VBP		500	600	200	1,300				

13.2R

		Compras ↓			Ventas Intermedias VI	Consumo C	Inversión I	Producto final PIB	Valor bruto de producción VBP
		Ramas de producción							
Ventas →		Primaria (1)	Secundaria (2)	Terciaria (3)					
Productos	Primarios (1)	-	300	-	300	200	-	200	500
	Secundarios (2)	100	-	100	200	600	200	800	1,000
	Terciarios (3)	50	100	-	150	150	-	150	300
Compras intermedias Cl		150	400	100	650	950	200	1,150	1,800
Salarios S		100	200	200	500				
Ganancias G		250	400	-	650				
Valor agregado (ingreso) VA		350	600	200	1,150				
Valor bruto de producción VBP		500	1,000	300	1,800				

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

13.3R

		<i>Ramas de producción</i>		
		<i>Primario (1)</i>	<i>Secundario (2)</i>	<i>Terciario</i>
<i>Ventas</i> →	<i>Compras</i> ↓			
<i>Primario (1)</i>		-	0.3	-
<i>Secundario (2)</i>		0.2	-	0.33
<i>Terciario (3)</i>		0.1	0.1	-
<i>CI</i>		0.3	0.4	0.33
<i>s</i>		0.2	0.2	0.67
<i>g</i>		0.5	0.4	-
<i>f</i>		0.7	0.6	0.67
<i>Total</i>		1.0	1.0	1.00

13.4R

Sea A la matriz de coeficientes técnicos e I la matriz identidad; la matriz de Leontief se define como

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & 0 \\ -0.2 & 1 & -0.33 \\ -0.1 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su inversa,

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.078 & 0.334 & 0.110 \\ 0.260 & 1.115 & 0.368 \\ 0.134 & 0.145 & 1.048 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que los valores de la inversa son todos positivos y de mayores valores absolutos que los de la matriz de Leontief.

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

13.6R

El vector de producción bruta se calcula como

$$\begin{aligned}
 [VBP] &= [I - A]^{-1}[D] \\
 &= \begin{bmatrix} 1.078 & 0.334 & 0.110 \\ 0.260 & 1.115 & 0.368 \\ 0.134 & 0.145 & 1.048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 1,000 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 679.9 \\ 1,266.2 \\ 394.6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

13.7R

A nivel agregado el resultado puede obtenerse ajustando los valores brutos de producción arriba obtenidos por los coeficientes de valor agregado respectivos. Matricialmente:

$$\begin{aligned}
 [VA] &= [VBP]^T[F] \\
 &= [679.9 \quad 1,266.2 \quad 394.6] \begin{bmatrix} 0.70 \\ 0.60 \\ 0.67 \end{bmatrix} \\
 &= 1,500
 \end{aligned}$$

Los valores agregados totales equivalen al total de demanda final. Lo anterior es válido también para cada sector. Los coeficientes de la matriz inversa de Leontief obtenidos atrás dicen que para obtener un peso de producto final del sector agrícola se requieren \$1.078 de producto bruto del mismo sector, \$0.260 del sector secundario y \$0.134 del terciario. Por lo tanto, para \$300 de demanda final se requieren \$323.4, \$77.9 y \$40.1, respectivamente. Aplicando a cada uno de estos valores los respectivos coeficientes de valor agregado y sumando entre sí se tiene que

$$300 = 0.7 \times 323.4 + 0.6 \times 78 + 78 + 0.67 \times 40.2$$

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

13.9R

Cada elemento r_{ij} de la matriz $[I - A]^{-1}$ indica la producción bruta del sector i requerida para satisfacer un peso de demanda final del sector j . Luego, multiplicando cada elemento r_{ij} por su correspondiente demanda final del sector j se tendría la descomposición buscada. Matricialmente puede operarse definiendo una matriz cuadrada $[ID]$, cuyos elementos en la diagonal son las demandas finales y los demás elementos son cero. Multiplicando la matriz $[I - A]^{-1}$ por esa nueva matriz $[ID]$ se tiene

$$= \begin{bmatrix} 1.078 & 0.334 & 0.110 \\ 0.260 & 1.115 & 0.368 \\ 0.134 & 0.145 & 1.048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 323.4 & 334 & 21.4 \\ 78.0 & 1,115 & 73.6 \\ 40.2 & 145 & 209.6 \end{bmatrix}$$

donde cada fila distribuye el valor bruto de la producción de cada sector según su demanda final. Así, la producción bruta total del sector primario (primera fila) tiene los siguientes destinos:

<i>Demandas directas e indirectas para satisfacer la demanda final de bienes primarios</i>	\$323.4
<i>Demandas directas e indirectas para satisfacer la demanda final de bienes secundarios</i>	\$334.0
<i>Demandas directas e indirectas para satisfacer la demanda final de servicios</i>	\$21.4
TOTAL VBP	\$678.8

Como se comprueba, este VBP es muy semejante al obtenido en el Ejercicio 13.6 (las diferencias se deben al número limitado de decimales usados en los coeficientes. Compruébelo en una hoja de cálculo usando todos los decimales).