## *Taller #2*
## *Econometría 06169*

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \dfrac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$

y además demuestre que $s^2$ es un estimador insesgado de $\sigma^2$.

2.)
Se tiene la siguiente información para el model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ :

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad y^T y = 510$$

a) Encuentre $\left(X^T X\right)^{-1}$.

b) Estime por MCO el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir encuentre los estimadores para $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ y $\sigma^2$.

c) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para $\beta_2$.

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \left[\alpha \cdot \left(L_i\right)^{\beta} \cdot \left(K_i\right)^{1-\beta}\right] + \dfrac{1}{\varepsilon_i}$  b) $U_t = \alpha\left(\dfrac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$  c) $y_i = \dfrac{1}{\alpha \cdot \left(L_i\right)^{\beta} \cdot \left(K_i\right)^{1-\beta}} + \dfrac{1}{\varepsilon_i}$

d) $y_i = \dfrac{1}{\alpha \cdot \left(L_i\right)^{\beta} \cdot \left(K_i\right)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i}$  e) $U_t = \left[\alpha + \left(\dfrac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}$

Donde $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_t$ representan términos de error aleatorio.

4. Dado el modelo $\ln\left(Y_i\right) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln\left(X_{2i}\right) + \beta_3 \cdot \ln\left(X_{3i}\right) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

***Taller #2***
***Econometría 06169***
***Respuestas Sugerida***

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \dfrac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$

y además demuestre que $s^2$ es un estimador insesgado de $\sigma^2$.

NOTA: Esta pregunta no era facil, requeria un poco de investigación.

Remplazando en la expresiión original y aplicando algebra matricial, tenemos:

$$s^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n-k} = \frac{(y-\hat{y})^T (y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \hat{y}^T\right)(y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \left(X\hat{\beta}\right)^T\right)\left(y - \left(X\hat{\beta}\right)\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{\left(y^T - \left(\hat{\beta}^T X^T\right)\right)\left(y - \left(X\hat{\beta}\right)\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \left(\hat{\beta}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{\beta}\right) + \left(\hat{\beta}^T X^T\right)\left(X\hat{\beta}\right)}{n-k}$$

Nosotros sabemos que $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ entonces tenemos que

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{\beta}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{\beta}\right) + \left(\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T y\right)^T X^T\right)\left(X\hat{\beta}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{\beta}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{\beta}\right) + \left(y^T X \left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)\left(X\hat{\beta}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{\beta}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{\beta}\right) + \left(y^T X \left(X^T X\right)^{-1} X^T X\hat{\beta}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{\beta}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{\beta}\right) + \left(y^T X\hat{\beta}\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$$ **Q.E.D.**

Ahora necesitamos demostrar que: $E\left[s^2\right]=\sigma^2$

Como vimos anteriormente, sabemos que:

$$E\left[s^2\right]=E\left[\frac{\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}}{n-k}\right]=\frac{1}{n-k}E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]$$

Antes de seguir, noten que:

$$\hat{\varepsilon}=y-X\hat{\beta}=y-X\left(X^TX\right)^{-1}X^Ty=\left[I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]y$$

Ahora definamos,

$$M_X=\left[I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]$$

Entonces,

$$\hat{\varepsilon}=M_Xy$$

Además, es facil mostrar que $\mathrm{M_X}$ es idempotente, pues

$$M_X\cdot M_X=\left[I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]\left[I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right]$$

$$M_X\cdot M_X=I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T+X\left(X^TX\right)^{-1}X^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^T$$

$$M_X\cdot M_X=I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T+X\left(X^TX\right)^{-1}X^T$$

$$M_X\cdot M_X=I-X\left(X^TX\right)^{-1}X^T=M_X$$

Ahora sí, veamos a que es igual $E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]$

$$E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]=E\left[\varepsilon^TM_XM_X\varepsilon\right]=E\left[\varepsilon^TM_X\varepsilon\right]$$

Ahora, como este producto es igual a un escalar, será lo mismo el valor esperado de la traza o simplemente el valor esperado (¿por qué?) . Empleando las propiedades del valor esperado y de la traza, tenemos que:

$$E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]=tra\left[E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]\right]=E\left[tra\left[\varepsilon^TM_X\varepsilon\right]\right]=E\left[tra\left[M_X\varepsilon^T\varepsilon\right]\right]$$

$$E\left[\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}\right]=tra\left[M_XE\left[\varepsilon^T\varepsilon\right]\right]=tra\left[M_X\sigma^2I_n\right]=\sigma^2tra\left[M_X\right]$$

Noten que

$$tra\left[M_X\right] = tra\left[I - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right] = tra\left[I_n\right] - tra\left[X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right]$$

$$tra\left[M_X\right] = n - tra\left[\left(X^T X\right)^{-1} X^T X\right] = n - tra\left[I_k\right] = n - k$$

Así,

$$E\left[\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}\right] = (n-k)\sigma^2$$

Por tanto:

$$E\left[s^2\right] = E\left[\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n-k}\right] = \frac{1}{n-k} E\left[\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}\right] = \frac{(n-k)\sigma^2}{n-k} = \sigma^2$$

**Q.E.D.**

2.)
Se tiene la siguiente información para el model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ :

$$X^T \cdot y = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad y^T y = 510$$

a) Encuentre $\left(X^T X\right)^{-1}$.

Sin importar el método que empleen, la respuesta debe ser:

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

b) Estime por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir encuentre los estimadores para $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ y $\sigma^2$.

En este caso tenemos que

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\beta}_3\end{bmatrix}=\left(X^T X\right)^{-1}X^T y = \begin{pmatrix}\frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0\\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\ 30\\ 43\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ \frac{43}{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 4.3\end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para $\sigma^2$.

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat^T \cdot X^T y}{n-k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 5$ y $y^T y = 510$. Así,

$$s^2 = \frac{510 - \begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{43}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\ 30\\ 43\end{pmatrix}}{100-3} = \frac{510-\frac{3349}{10}}{97} = \frac{1751}{970} = 1.805$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas esta dada por

$$\widehat{Var\left(\hat{\beta}\right)} = s^2\left(X^T X\right)^{-1} = \frac{1751}{970}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{60} & \frac{-1}{30} & 0\\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1751}{58200} & \frac{-1751}{29100} & 0\\ \frac{-1751}{29100} & \frac{1751}{5820} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1751}{9700}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.03 & -0.06 & 0\\ -0.06 & 0.301 & 0\\ 0 & 0 & 0.181\end{pmatrix}$$

c) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos probar la siguiente hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A: \beta_3 \neq 0$. Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \frac{\beta hat_3}{s_{(\beta hat_3)}}$. En este caso tenemos

$$t_c = \frac{\frac{43}{10}}{\sqrt{\frac{1751}{9700}}} = 10.121$$

***Nota:*** En el examen yo les daría el valor de esta operación. Es decir les diría $\frac{\frac{43}{10}}{\sqrt{\frac{1751}{9700}}}$.

Este $t_c$ lo tenemos que comparar con el $t_{0.025,97} = 1.661$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.05,97} = 1.985$ y $t_{0.005,97} = 2.627$ ). Note que $|t_c| = 10.121 > t_{0.005,97}$, por lo tanto hay suficiente evidencia para decir que el coeficiente asociado con el regresor $X_3$ no es igual a cero. En otras palabras, podemos decir con un 99% de confianza que $X_3$ ayuda ha explicar la variabilidad en la variable dependiente.

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para $\beta_2$.

Un intervalo de confianza del 95% para $\beta_2$ esta dado por

$$\left(1 - t_{0.025,97}\cdot\sqrt{\frac{1751}{5820}}, 1 + t_{0.025,97}\cdot\sqrt{\frac{1751}{5820}}\right)$$

$$\left(1 - 1.661\cdot\sqrt{\frac{1751}{5820}}, 1 + 1.661\cdot\sqrt{\frac{1751}{5820}}\right)$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(0.089, 1.911)$$

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\right] + \frac{1}{\varepsilon_i}$ b) $U_t = \alpha\left(\frac{w_t\cdot\varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$ c) $y_i = \frac{1}{\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}} + \frac{1}{\varepsilon_i}$

d) $y_i = \frac{1}{\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\cdot\varepsilon_i}$ e) $U_t = \left[\alpha + \left(\frac{w_t\cdot\varepsilon_t}{p_t}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}$

Donde $\varepsilon_i$ y $\varepsilon_t$ representan términos de error aleatorio.

**a)** Claramente el modelo $y_i = \left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\right] + \frac{1}{\varepsilon_i}$ no es lineal. Este modelo no se puede linearlizar, pues no existe una tranformación que permita obtener un modelo lineal.

**b)** Claramente el modelo $U_t = \alpha\left(\frac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$ es no lineal, pero se puede linealizar facilmente aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación. Es decir,

$$U_t = \alpha\left(\frac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$$

$$\ln(U_t) = \ln\left[\alpha \cdot (w_t)^{\beta} \cdot (p_t)^{-\beta} \cdot (\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \ln\left[(w_t)^{\beta}\right] + \ln\left[(p_t)^{-\beta}\right] + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(w_t) - \beta \cdot \ln(p_t) + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

Ahora podemos definir los siguientes regresores y coeficientes:

$$y_t = \ln(U_t) \qquad X_{1t} = \ln(w_t) - \ln(p_t) \qquad \mu_t = \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right] \qquad \eta = \ln(\alpha)$$

Así el modelo original es equivalente a:

$$y_t = \eta + \beta \cdot X_{1t} + \mu_t$$

**c)** Claramente el modelo $y_i = \frac{1}{\alpha \cdot (L_i)^{\beta} \cdot (K_i)^{1-\beta}} + \frac{1}{\varepsilon_i}$ no es lineal. Este modelo no se puede linearlizar, pues no existe una tranformación que permita obtener un modelo lineal.

**d)** El modelo $y_i = \frac{1}{\alpha \cdot (L_i)^{\beta} \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i}$ se puede linealizar de la siguiente forma:

$$y_i = \frac{1}{\alpha \cdot (L_i)^{\beta} \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i}$$

$$\frac{1}{y_i} = \alpha \cdot (L_i)^{\beta} \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i$$

$$\ln\left(\frac{1}{y_i}\right) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(L_i) + (1-\beta) \cdot \ln(K_i) + \ln(\varepsilon_t)$$

Ahora podemos definir los siguientes regresores y coeficientes:

$$z_i = \ln\left(\frac{1}{y_i}\right) \qquad X_{1i} = \ln(L_i) \qquad X_{2i} = \ln(K_i) \qquad \mu_i = \ln(\varepsilon_i) \qquad \eta = \ln(\alpha)$$

Así el modelo original es equivalente a:

$$y_i = \eta + \beta \cdot X_{1i} + (1-\beta)X_{2i} + \mu_i$$

**e) E**l modelo $U_t = \left[\alpha + \left(\frac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}$ no es lineal. Este modelo no se puede linearlizar, pues no existe una tranformación que permita obtener un modelo lineal.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad asociada con $X_2$ esta dada por: $\eta(X_2) = \frac{\Delta\%\text{en}Y}{\Delta\%\text{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}}Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}}Y_i = \beta_2 \cdot \beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2 - 1} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i = \beta_2 \cdot \frac{\beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta(X_2) = \frac{\Delta\%\text{en}Y}{\Delta\%\text{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}}Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta(X_3) = \beta_3$.